ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 517.512

Я. Г. ПРИТУЛА

ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР'Є МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БОРА

У роботі узагальнюються відомі теореми про абсолютну збіжність рядів Фур'є рівномірних майже-періодичних (далі скорочено р. м. п.) функцій [1, стор. 72, 73].

Відзначимо деякі властивості сум Бохнера—Фейера $P_B^m(x)$ для р. м. п. функцій $f(x)$ [1, стор. 70]

$$P_B^m(x) = \sum_{\substack{|\nu_1|<n_1\\ \vdots\\ |\nu_r|<n_r}} k_{n_1,\ldots,n_r;\nu_1,\ldots,\nu_r} A\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \ldots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right) e^{i\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\ldots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)x} \qquad (1)$$

а) функції $P_B^m(x)$ рівномірно обмежені числом $M = \sup\limits_x |f(x)|$;

б) коефіцієнти $k_{n_1,\ldots,n_r;\nu_1,\ldots,\nu_r} \leqslant 1$ і при фіксованих r, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ і $n_1, n_2, \ldots, n_r \to \infty$ прямують до 1;

в) коефіцієнти $k_{n_1,\ldots,n_r;\nu_1,\ldots,\nu_r}$ додатні.

Лема. Нехай для комплексних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ існують дійсні числа $\alpha\,(0 \leqslant \alpha < \pi/2)$ і a, що

$$|\Theta_j - a| \leqslant \alpha \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

де $\Theta_j = \arg a_j$. Тоді

$$\cos\alpha\,(1 - \sin\alpha) \sum_{j=1}^{n} |a_j| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right|, \qquad (3)$$

а якщо $0 \leqslant \alpha < \pi/4$, то

$$(1 - \sin 2\alpha) \sum_{j=1}^{n} |a_j| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right|. \qquad (4)$$

При доведенні леми користуємось геометричною інтерпретацією комплексних чисел.

Нехай $0 \leqslant \alpha < \pi/4$. Очевидно, що кути між вектором $\sum\limits_{j=1}^{n} \vec{a}_j = \vec{l}$ і векторами $\vec{a}_j\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ не перевищують 2α, тому

$$|\vec{a}_j| \leqslant |np_{\vec{l}}\, \vec{a}_j| + \sin 2\alpha \cdot |\vec{a}_j|; \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} |np_{\vec{l}}\, \vec{a}_j| = \left|\sum_{j=1}^{n} \vec{a}_j\right|.$$

Просумувавши по j нерівність (5), одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} |\vec{a}_j| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} \vec{a}_j\right| + \sin 2\alpha \sum_{j=1}^{n} |\vec{a}_j|.$$

Значить, (4) доведено.

Нехай $0 \leqslant \alpha < \pi/2$. Існує число s, що кути між $\vec{s}$ і $\vec{a}_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ не перевищують α. Нехай p буде пряма, на якій лежить вектор s. Всі числа a_j (розглядаємо їх як точки площини), які лежать по одній стороні p і на ній, позначатимемо a_j', а ті, що по другій стороні, — a_j''.

$$\left|\sum \vec{a}_j\right| \geqslant \left|np_{\vec{s}} \sum_{j=1}^{n} a_j\right| = \left|np_{\vec{s}} \sum \vec{a}_j'\right| + \left|np_{\vec{s}} \sum \vec{a}_j''\right| \geqslant$$

$$\geqslant \cos\alpha \left|\sum \vec{a}_j'\right| + \cos\alpha \left|\sum \vec{a}_j''\right|.$$

З доведеної першої частини леми маємо такі нерівності:

$$\left|\sum \vec{a}_j'\right| \geqslant (1-\sin\alpha) \sum |\vec{a}_j'|, \quad \left|\sum \vec{a}_j''\right| \geqslant (1-\sin\alpha) \sum |\vec{a}_j''|,$$

а звідси

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \vec{a}_j\right| \geqslant \cos\alpha\,(1-\sin\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} |\vec{a}_j|.$$

Лема доведена.

Теорема 1. Нехай $f(x)$ р. м. п. функція і $\sum\limits_{j} A_j e^{i\lambda_j x}$ — її ряд Фур'є. Розглянемо сукупність показників Фур'є $\{\lambda_j\}$ і сукупність аргументів коефіцієнтів Фур'є $\{\Theta_j\}$ функції $f(x)$. Якщо для будь-якого набору $\{\lambda_{j_k}\}$ і відповідних $\{\Theta_{j_k}\}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ існують дійсні числа a і α $(0 \leqslant \alpha \leqslant \leqslant \alpha_0 < \pi/2)$, що система нерівностей

$$|\lambda_{j_k} x + \Theta_{j_k} - a| \leqslant \alpha \pmod{2\pi} \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

має дійсний розв'язок (існує x, при якому мають місце нерівності (6)), тоді ряд Фур'є $f(x)$ є абсолютно збіжний і

$$\sum_{j} |A_j| \leqslant \frac{M}{\cos\alpha_0\,(1-\sin\alpha_0)}. \tag{7}$$

$$M = \sup_x |f(x)|.$$

Доведення проведемо від супротивного.

Нехай нерівність (7) не виконується. Тоді можна вибрати N коефіцієнтів Фур'є $A_1', A_2', \ldots, A_N'$ і $k<1$, що

$$k \sum_{j=1}^{N} |A_j'| > \frac{M}{\cos\alpha_0\,(1-\sin\alpha_0)}. \tag{8}$$

Візьмемо в сумі Бохнера—Фейера (1) для функції $f(x)$ m, r, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ настільки великими, щоб сума містила члени з усіма A_j' $(j=1, 2, \ldots, N)$. Тоді при фіксованих m, r збільшимо $n_1, n_2, \ldots, n_r$ так, щоб $k_{n_1,\ldots,n_r;\nu_1,\ldots,\nu_r}$, які відповідають A_j' $(j=1, 2, \ldots, N)$, стали більшими від k.

Одержали суму

$$\sum_j k_j A_j e^{i\lambda_j x} = \sum_j k_j |A_j| e^{i(\lambda_j x + \theta_j)}. \qquad (9)$$

За умовою теореми знайдуться a, $\alpha (\alpha < \alpha_0)$, x_0, що

$$|\lambda_j x_0 + \theta_j - a| \leqslant \alpha \pmod{2\pi}$$

для всіх j, по яких сумується в (9).

З леми випливає, що

$$\cos \alpha_0 (1 - \sin \alpha_0) \sum_j k_j |A_j| \leqslant \left| \sum_j k_j A_j e^{i\lambda_j x_0} \right|. \qquad (9a)$$

Враховуючи властивість а) сум $P_B^m(x)$, маємо

$$\cos \alpha_0 (1 - \sin \alpha_0)\, k \sum_{j=1}^{N} |A_j'| \leqslant M,$$

що суперечить виразу (8). Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай

$$f(x) = |A_1| e^{i(\lambda_1 x + \theta_1)} + \ldots + |A_n| e^{i(\lambda_n x + \theta_n)}.$$

Якщо існує дійсне число α а) $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, б) $0 \leqslant \alpha < 2\pi/3$, що з

$$l_1 \lambda_1 + l_2 \lambda_2 + \ldots + l_n \lambda_n = 0 \qquad (10)$$

($l_1, l_2, \ldots, l_n$ — будь-які цілі числа) випливає

$$|l_1 \theta_1 + l_2 \theta_2 + \ldots + l_n \theta_n| < \alpha \pmod{2\pi}, \qquad (11)$$

тоді

$$\text{а)} \quad \sup_x |f(x)| \geqslant (1 - \sin \alpha) \sum_{j=1}^{n} |A_j|;$$

$$\text{б)} \quad \sup_x |f(x)| \geqslant \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \sum_{j=1}^{n} |A_j|.$$

Доведемо теорему для випадку б). У другому випадку доведення аналогічне.

Розглянемо функцію

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |A_1| x_1 + |A_2| x_2 + \ldots + |A_n| x_n.$$

Нехай

$$\{f(x)\}^p = \sum_\nu \alpha_\nu e^{i\beta_\nu x}; \qquad (12)$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{n_1, n_2, \ldots, n_n} x^{n_1} x^{n_2}, \ldots, x^{n_n}. \qquad (13)$$

Щоб з виразу (13) одержати (12), потрібно у виразі (13) покласти $x_k = e^{i(\lambda_k x + \theta_k)}$, потім звести подібні члени. Якщо

$$l_1' \lambda_1 + l_2' \lambda_2 + \ldots + l_n' \lambda_n = l_1'' \lambda_1 + l_2'' \lambda_2 + \ldots + l_n'' \lambda_n,$$

тоді за умовою (10), (11)

$$|(l_1' \theta_1 + l_2' \theta_2 + \ldots + l_n' \theta_n) - (l_1'' \theta_1 + l_2'' \theta_2 + \ldots + p_n'' \theta_n)| \leqslant \alpha \pmod{2\pi}.$$

Це означає, що подібні члени задовольняють умову леми з $\alpha<\pi/3$. Звідси одержуємо

$$\sum_{\nu}|\alpha_\nu|>\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sum a_{n_1, n_2, \ldots, n_n}\geqslant$$

$$\geqslant\left[\sum_{j=1}^{n}|A_j|\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]^p. \tag{14}$$

Тепер приймемо супротивне. Нехай

$$\sup_x|f(x)|=c<\left[\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{j=1}^{n}|A_j|\right].$$

Звідси

$$|\alpha_\nu|=\left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(t)]^p e^{-i\beta_\nu t}\,dt\right|<c^p.$$

З того, що число членів у виразі (12) менше від $(p+1)^n$, випливає

$$\sum|\alpha_\nu|<(p+1)^n c^p. \tag{15}$$

Розглянемо відношення

$$\frac{(p+1)^n c^p}{\left[\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sum\limits_{j=1}^{n}|A_j|\right]^p}=(p+1)^n\left[\frac{c}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sum\limits_{j=1}^{n}|A_j|}\right]^p. \tag{16}$$

При $p\to\infty$ вираз (16) прямує до нуля, але це суперечить нерівностям (14), (15).

Теорема доведена (метод доведення даної теореми аналогічний методу, який наведений в роботі [1]).

Теорема 3. Нехай для р. м. п. функції $f(x)\sim\sum\limits_j|A_j|e^{i(\lambda_j x+\theta_j)}$ існує число а) $0\leqslant\alpha<\pi/2$, б) $0\leqslant\alpha<2\pi/3$, що для будь-якого набору $\{\lambda_{j_k}\}$ і відповідних $\{\theta_{j_k}\}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ з умови (10) випливає (11), тоді ряд Фур'є $f(x)$ абсолютно збіжний і

$$\text{а)}\ \sum_j|A_j|\leqslant\frac{M}{1-\sin\alpha};$$

$$\text{б)}\ \sum_j|A_j|\leqslant\frac{M}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Доведення теореми 3 аналогічне доведенню теореми 1 (нерівність (9а) одержуємо з теореми 2).

Наслідки. З теорем 1 і 3 легко одержуються наступні твердження для р. м. п. функцій:

1. Якщо показники Фур'є $\{\lambda_j\}$ функції $f(x)$ лінійно незалежні, то її ряд Фур'є збігається абсолютно.

2. Якщо для функції $f(x) \sim \sum_j A_j e^{i\lambda_j x}$ існує число a, що $a \leqslant \arg A_j \leqslant \leqslant a+\alpha$, $\alpha<\pi$, то ряд Фур'є $f(x)$ збігається абсолютно і

$$\sum_j |A_j| < \frac{M}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3. Нехай для

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x} \,(j \neq 0;\ \lambda_{-j}=-\lambda_j,\ \arg A_j=-\arg A_{-j},$$

якщо $A_j A_{-j} \neq 0$; $\lambda_j > 0$, $\lambda_{j+1} > \lambda_j$ при $j>0$: $\lambda_j \to \infty$ при $j \to \infty$) виконується

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \geqslant q > 3,$$

тоді ряд Фур'є $f(x)$ збігається абсолютно і

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j| < \frac{M}{\cos\frac{\pi}{q-1}\left(1-\sin\frac{\pi}{q-1}\right)}.$$

Подібний результат одержано в роботі [2]. Для доведення наслідка 3 покажемо, що для будь-якого набору $\{\lambda_{j_k}\}$ і відповідних $\{\theta_{j_k}\}$ ($k= =1, 2, \ldots, n$) існує рішення системи (6) при $a=0$ і деякому $\alpha<\pi/2$. Очевидно, що це досить показати для додатних λ_j.

Нехай $\{y=\lambda_{j_k}x+\theta_{j_k}\}$ ($k=1, 2, \ldots, n$) — множина прямих в координатній площині XOY. Назвемо α^i полосами множини точок з координатами $2\pi i-\alpha<y<2\pi i+\alpha$ ($i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Проекцію на вісь OX системи відрізків прямої $y=\lambda_{j_k}x+\theta_{j_k}$, які належать α^i-полосам, назвемо α_k-системою відрізків ($\alpha_k=\{\alpha_{ik}\}_{i=-\infty}^{\infty}$). Тепер очевидно, що для рішення системи (6) необхідно і достатньо, щоб перетин $\prod_{k=1}^{n}\alpha_k$ був не пустий. Довжина одного α_k^i-відрізка є $2\alpha/\lambda_{j_k}$, а його довжина разом із віддалю до сусіднього α_k^{i+1} відрізка дорівнює $2\pi/\lambda_{j_k}$.

Якщо виконується нерівність

$$\frac{2\alpha}{\lambda_{j_k}}-\frac{2\pi}{\lambda_{j_{k+1}}} \geqslant \frac{2\alpha}{\lambda_{j_{k+1}}}, \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

то кожний α_k^i-відрізок містить у собі α_{k+1}^i-відрізок. Значить, перетин $\prod_{k=1}^{n}\alpha_k$ не пустий. Нерівність (17) виконується, якщо

$$\frac{\lambda_{j_{k+1}}}{\lambda_{j_k}} \geqslant q > 3 \quad \text{і} \quad \alpha=\frac{\pi}{q-1}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан. Почти-периодические функции. М., 1953.
2. Е. А. Бредихина. О наилучших приближениях почти-периодических функций целыми функциями конечной степени. ДАН СССР, 117, № 1, 1957.