ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 517.54

І. І. ЧУЛИК

ДО ВИЗНАЧЕННЯ КЛАСІВ РЯДІВ ЛОРАНА В МЕТОДАХ ЛОКАЛІЗАЦІЇ НУЛІВ ЗА МОДУЛЯМИ

Розглянемо ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{\nu=p}^{q} A_\nu z^\nu, \quad (-\infty\leqslant p<q\leqslant\infty\,; \tag{1}$$

$A_p\neq 0$, якщо $p>-\infty$; $A_q\neq 0$, якщо $q<\infty$), збіжний в деякому кільці. Нехай $\mathfrak{M}_f(z)=\sum\limits_{\nu=p}^{q} T_\nu z^\nu$ є його мажорантою Ньютона. Позначимо через $M=\{\nu\}$ множину всіх індексів ν та розглянемо довільну систему множин $\mathfrak{A}=\{M_n\}$, $(n=0, 1, 2, \ldots, m; \infty)$, що задовольняє умови

1) $M_n\in M$;
2) $M_i\cap M_j=0$, якщо $i\neq j$;
3) $\bigcup\limits_{n=0}^{m} M_n\cup M_\infty=M$;
4) $M_2\neq 0$:
4) p, $q\in M_\infty$, якщо p і q — скінченні.

Введемо функцію дійсної змінної

$$H_k(u)=\sum_{\substack{\nu=p-k\\ \nu\neq 0}}^{q-k} u^{-\mu_\nu}-1, \tag{2}$$

де $\mu_\nu=|\nu|+\sum\limits_{j=1}^{|\nu|-1}(|\nu|-j)\tau_{k+j\,\mathrm{sign}\,\nu}$, а τ_ν — цілочисленна функція, причому $\tau_\nu=n$, якщо $\nu\in M_n$. Як відомо [1], функція (2) має єдиний простий додатний корінь u_k такий, що $2\leqslant u_k\leqslant 3$.

В роботі [1] вводиться поняття класу $\mathfrak{K}_k(\mathfrak{A})$ для кожного фіксованого $k\in M_2$ як множини рядів Лорана, відхилення яких задовольняють умови

$$D_k>u_k^2;$$

$$D_\nu\geqslant u_k^{\tau_\nu}, \quad \nu\neq k;$$

$$D_\nu=\infty, \text{ якщо } \nu\in M_\infty.$$

Там же для рядів $f(z) \in \mathfrak{K}_k(\mathfrak{A})$ виділяються області, в яких ряд (1) не має нулів, а також області, в яких цей ряд має нулі, та встановлюється їх число.

У даній замітці буде показано, що клас рядів Лорана, для яких справедливі теореми роботи [1] про локалізацію нулів, може бути розширений. Виберемо для кожного фіксованого $k \in M_2$ нормальний ряд

$$\mathfrak{N}_f(z) = \sum_{\nu=p}^{q} T_\nu^* z^\nu,$$

відхилення якого

$$D_\nu^* = \frac{T_\nu^{*2}}{T_{\nu-1}^* T_{\nu+1}^*} = u_k^{*\nu}.$$

Дамо означення класу $\mathfrak{K}_k(\mathfrak{A})$ рядів Лорана для кожного $k \in M_2$.

Означення. Ряд $f(z)$ належить до класу $\mathfrak{K}_k^*(\mathfrak{A})$, якщо існують такі комплексні числа b та α, що коефіцієнти ряда $bf(\alpha z) = \sum_{\nu=p}^{q} A_\nu^* z^\nu$ задовольняють умови

$$|A_k^*| = T_k^*;\ k \in M_2.$$
$$|A_\nu^*| \leqslant T_\nu^*;\ \nu \neq k.$$
$$D_k^* > D_k = u_k^2.$$

Має місце

Теорема 1. Якщо ряд Лорана

$$f(z) \in \mathfrak{K}_k^*(\mathfrak{A}),$$

де $k \in M_2$, то $f(z)$ не має нулів в кільці

$$R_k u_k \leqslant |z| \leqslant \frac{R_{k+1}}{u_k}, \tag{3}$$

де R_k, R_{k+1} — числові нахили мажоранти Ньютона $\mathfrak{M}_f(z)$.

Доведення. За умовою теореми

$$D_k^* > u_k^2 > 4,$$

отже,

$$A_k^* \neq 0,\ A_k \neq 0.$$

Розглянемо

$$-A_k^* z^k = \sum_{\substack{\nu=p \\ \nu \neq k}}^{q} A_\nu^* z^\nu,$$

звідки одержимо (див. [1])

$$0 \leqslant -1 + \sum_{\nu=p-k}^{q-k} \left|\frac{A_{k+\nu}^*}{A_k^*}\right| \rho^\nu \leqslant$$

$$\leqslant -1 + \sum_{\nu=p-k}^{q-k} \frac{T_{k+\nu}^*}{T_k^*}\rho^\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{k-p} \frac{1}{D_{k-\nu+1}^* D_{k-\nu+2}^{*2} \cdots D_{k-1}^{*\nu-1}} \left(\frac{R_k^*}{\rho}\right)^\nu -$$

$$-1 + \sum_{\nu=1}^{q-k} \frac{1}{D_{k+1}^{*\nu-1} D_{k+2}^{*\nu-2} \cdots D_{k+\nu-1}^*} \left(\frac{\rho}{R_{k+1}^*}\right)^\nu,$$

де $|z| = \rho$, $R_\nu^* = \dfrac{T_{\nu-1}^*}{T_\nu^*}$, $D_\nu^* = \dfrac{R_{\nu+1}^*}{R_\nu^*}$.

Допустимо тепер, що на колі радіуса $\rho=\tilde{R}_k^* u_k$ функція $f(z)$ має нуль, де

$$R_k^* \leqslant \tilde{R}_k^* \leqslant \frac{R_{k+1}^*}{u_k^2}. \tag{4}$$

Одержимо

$$0 \leqslant \sum_{\nu=1}^{k-p} \frac{1}{D_{k-\nu+1}^{*} D_{k-\nu+2}^{*2} \cdots D_{k-1}^{*\nu-1}} \left(\frac{R_k^*}{\tilde{R}_k^* u_k} \right)^{\nu} - 1 +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q-k} \frac{1}{D_{k-\nu+1}^{*} D_{k-\nu+2}^{*2} \cdots D_{\kappa-1}^{*\nu-1}} \left(\frac{u_k}{\dfrac{R_{k+1}^*}{\tilde{R}_k^*}} \right)^{\nu} <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{k-p} \frac{1}{D_{k-\nu+1}^{*} D_{k-\nu+2}^{*2} \cdots D_{k-1}^{*\nu-1}} \left(\frac{1}{u_k} \right)^{\nu} - 1 +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q-k} \frac{1}{D_{k+1}^{*\nu-1} D_{k+2}^{*\nu-2} \cdots D_{k+\nu-1}^{*}} \left(\frac{1}{u_k} \right)^{\nu} < H_k(u_k) = 0.$$

Ми прийшли до суперечливої нерівності, тобто наше припущення, що функція $f(z)$ має нуль на колі радіуса $\rho=\tilde{R}_k^* u_k$, неправильне. Виходячи з виразу (4), ми й одержимо, що в кільці (3) ряд (1) не має нулів.

Теорема 2. Якщо $f(z) \in \bigcap\limits_{k \in \tilde{M}_2} \mathfrak{K}_k^*(\mathfrak{A})$, де $k_2 \in M_2$, то ряд $f(z)$ має рівно $k_j - k_i$ нулів у кільці

$$\frac{R_{k_i}}{u_{k_i}} < |z| < u_{k_j}, \tag{5}$$

де $k_i, k_j \in \tilde{M}_2$; $k_i < k_j$; u_{k_i}, u_{k_j} — корені функції (2) відповідно при $k=k_i$, $k=k_j$.

Доведення аналогічне.

Таким чином, теореми про локалізацію нулів мають місце для рядів Лорана із класу $\mathfrak{K}_k^*(\mathfrak{A})$. Клас $\mathfrak{K}_k^*(\mathfrak{A})$ більш широкий, ніж клас $\mathfrak{K}_k(\mathfrak{A})$, оскільки в першому відсутня умова, що обмежує $\mathfrak{K}_k(\mathfrak{A})$,

$$D_\nu \geqslant u_{k^\nu}^{\tau}, \quad \nu \neq k, \tag{6}$$

яка, як легко було зауважити, не є необхідною. Клас $\mathfrak{K}_k^*(\mathfrak{A})$ було визначено, виходячи з нормального ряду, не використовуючи умови (6). Отже, $\mathfrak{K}_k(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{K}_k^*(\mathfrak{A})$.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Костовский. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во Львов. ун-та, 1967.