ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 517.55

А. І. КАРДАШ

НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ НАЯВНОСТІ ПРАВИЛЬНИХ ВЕРШИН ДІАГРАМ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Для спрощення викладок будемо розглядати цілу раціональну функцію (многочлен) двох комплексних змінних

$$f(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in E} A_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu} \tag{1}$$

над полем комплексних чисел. Через E позначено множину пар (μ, ν) цілих невід'ємних індексів, відмінних від нуля коефіцієнтів функції (1). $E \subset Q_f$, де Q_f — деякий опуклий многокутник.

В роботі [1] для функції $f(z, w)$ було введено поняття мажоранти

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in Q_f} T_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu} \tag{2}$$

та діаграми $\mathfrak{D}_f$ Ньютона в системі координат $\zeta\xi\lambda$ і доведено необхідні та достатні умови, щоб точка зображення $P_{kl}(k, l, -\ln|A_{kl}|)$ $(k, l) \in E$ була правильною вершиною, тобто вершиною чотиригранного опуклого кута, ребра якого паралельні координатним площинам $\zeta\lambda$, $\xi\lambda$. При цьому необхідні та достатні умови виражались через коефіцієнти $T_{\mu\nu}$ мажоранти Ньютона (2), обчислення яких зв'язане з певними труднощами.

Метою даної замітки є вираження необхідних та достатніх умов правильних вершин діаграм Ньютона $\mathfrak{D}_f$ безпосередньо через коефіцієнти $A_{\mu\nu}$ функції (1).

Наявність правильних вершин широко використовується в застосуванні теорії мажорант і діаграм Ньютона до прикладних питань, тому що основна функція в цьому випадку надзвичайно проста [1].

Як відомо [1],

$$r_{kl}^{+}(\xi) = \min_{\substack{\mu_1 \geq 0,\ \mu_2 > 0 \\ h_{12}(k, l) < 0}} \left(\frac{a_{kl}^{\mu_1 + \mu_2}}{a_{k_1 l_1}^{\mu_2} a_{k_2 l_2}^{\mu_1}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1}}; \tag{3}$$

$$r_{kl}^{-}(\xi) = \max_{\substack{\mu_1 \geq 0,\ \mu_2 > 0 \\ h_{12}(k, l) > 0}} \left(\frac{a_{k_1 l_1}^{\mu_2} a_{k_2 l_2}^{\mu_1}}{a_{kl}^{\mu_1 + \mu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1}}; \tag{4}$$

$$r_{kl}^{+}(\zeta) = \min_{\substack{\nu_1 \geq 0,\ \nu_2 > 0 \\ h_{12}(k, l) > 0}} \left(\frac{a_{kl}^{\nu_1 + \nu_2}}{a_{k_1 l_1}^{\nu_2} a_{k_2 l_2}^{\nu_1}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1}}; \tag{5}$$

$$r_{kl}^{-}(\zeta) = \max_{\substack{\nu_1>0,\ \nu_2>0 \\ h_{12}(k,l)<0}} \left(\frac{a_{k_1 l_1}^{\nu_2} a_{k_2 l_2}^{\nu_1}}{a_{kl}^{\nu_1+\nu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1}}; \tag{6}$$

де $a_{kl}=|A_{kl}|$, $\mu_1=k_1-k$, $\mu_2=k-k_2$, $\nu_1=l_1-l$, $\nu_2=l-l_2$,

$$h_{12}(k,l) = \begin{vmatrix} k-k_1 & l-l_1 \\ k_2-k_1 & l_2-l_1 \end{vmatrix}$$

і

$$d_{kl}(\xi) = \frac{r_{kl}^{+}(\xi)}{r_{kl}^{-}(\xi)}, \quad d_{kl}(\zeta) = \frac{r_{kl}^{+}(\zeta)}{r_{kl}^{-}(\zeta)}. \tag{7}$$

Має місце

Теорема 1. Для того, щоб вершина P_{kl} діаграми Ньютона була правильною, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови

$$a_{k+\mu,\,l+\nu} \leqslant \frac{\widetilde{T}^{|\mu|}_{k+\operatorname{sign}\mu,\,l}\,\widetilde{T}^{|\nu|}_{k,\,l+\operatorname{sign}\nu}}{\widetilde{T}_{kl}^{|\mu|+|\nu|-1}}, \qquad (k+\mu,\ l+\nu)\in\overline{Q}_f \tag{8}$$

$$\widetilde{T}_{kl}=a_{kl}, \tag{9}$$

де

$$\begin{gathered} \widetilde{T}_{k+1,\,l} = \frac{a_{kl}}{r_{kl}^{+}(\zeta)}, \quad \widetilde{T}_{k,\,l+1} = \frac{a_{kl}}{r_{kl}^{+}(\xi)}; \\ \widetilde{T}_{k-1,\,l} = a_{kl}\, r_{kl}^{-}(\zeta), \quad T_{k,\,l-1} = a_{kl}\, r_{kl}^{-}(\xi). \end{gathered} \tag{10}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай вершина P_{kl} — правильна. Тоді за теоремою 2.3 [1] має місце нерівність

$$T_{k+\mu,\,l+\nu} \leqslant \frac{T^{|\mu|}_{k+\operatorname{sign}\mu,\,l}\,T^{|\nu|}_{k,\,l+\operatorname{sign}\nu}}{T_{kl}^{|\mu|+|\nu|-1}} \tag{11}$$

для всіх коефіцієнтів $T_{k+\mu,\,l+\nu}$ мажоранти (2).

З означення правильної вершини випливає рівність (9), а також, що відрізки $P_{kl}B_{k+1,\,l}$; $P_{kl}B_{k,\,l+1}$; $P_{kl}B_{k,\,-1,\,l}$; $P_{kl}B_{k,\,l-1}$ є правильними ребрами або становлять частину спрямлених ребер діаграми Ньютона $\mathfrak{D}_f$ функції $f(z,w)$, тому

$$\begin{gathered} \widetilde{T}_{kl} = T_{kl} = a_{kl}; \quad \widetilde{T}_{k+1,\,l} = T_{k+1,\,l}; \quad \widetilde{T}_{k,\,l+1} = T_{k,\,l+1}; \\ \widetilde{T}_{k-1,\,l} = T_{k-1,\,l}; \quad \widetilde{T}_{k,\,l-1} = T_{k,\,l-1}; \end{gathered} \tag{12}$$

де B_{ij} — точка діаграми $\mathfrak{D}_f$.

Беручи до уваги, що $a_{k+\mu,\,l+\nu}\leqslant T_{k+\mu,\,l+\nu}$, з виразів (11)—(12) випливає нерівність (8). Необхідність доведена.

Достатність. Припустимо тепер, що мають місце умови (8)—(9). Побудуємо точки $\widetilde{B}_{k+1,\,l}$ $(k+1,\ l,\ -\ln\widetilde{T}_{k+1,\,l})$; $\widetilde{B}_{k,\,l+1}$ $(k,\ l+1,\ -\ln\widetilde{T}_{k,\,l+1})$; $\widetilde{B}_{k-1,\,l}$ $(k-1,\ l,\ -\ln\widetilde{T}_{k-1,\,l})$; $\widetilde{B}_{k,\,l-1}$ $(k,\ l-1,\ -\ln\widetilde{T}_{k,\,l-1})$. Через три точки P_{kl}, $\widetilde{B}_{k+1,\,l}$, $\widetilde{B}_{k,\,l+1}$ проведемо площину $\widetilde{\sigma}_1$. Аналогічно проведемо площини $\widetilde{\sigma}_2$, $\widetilde{\sigma}_3$, $\widetilde{\sigma}_4$ через відповідні трійки точок P_{kl}, $\widetilde{B}_{k-1,\,l}$, $\widetilde{B}_{k,\,l+1}$; P_{kl}, $\widetilde{B}_{k-1,\,l}$, $\widetilde{B}_{k,\,l-1}$; P_{kl}, $\widetilde{B}_{k+1,\,l}$, $\widetilde{B}_{k,\,l-1}$.

Як відомо [1], завдяки нерівності (8), оскільки точка P_{kl}— вершинна,

$$\tilde{D}_{kl}(\zeta) = d_{kl}(\zeta) > 1, \quad \tilde{D}_{kl}(\xi) = d_{kl}(\xi) > 1. \tag{13}$$

Із виразів (9)—(10) випливає

$$r_{kl}^{+}(\zeta) = \frac{\tilde{T}_{kl}}{\tilde{T}_{k+1,\,l}}, \quad r_{kl}^{+}(\xi) = \frac{\tilde{T}_{kl}}{\tilde{T}_{k,\,l+1}},$$
$$r_{kl}^{-}(\zeta) = \frac{\tilde{T}_{k-1;\,l}}{\tilde{T}_{kl}}, \quad r_{kl}^{-}(\xi) = \frac{\tilde{T}_{k,\,l-1}}{\tilde{T}_{kl}}. \tag{14}$$

Підставивши вираз (14) в (13), одержимо

$$\frac{\tilde{T}_{kl}^{2}}{\tilde{T}_{k-1,\,l}\,\tilde{T}_{k+1,\,l}} > 1, \quad \frac{\tilde{T}_{kl}^{2}}{\tilde{T}_{k,\,l-1}\,\tilde{T}_{k,\,l+1}} > 1. \tag{15}$$

Отже, чотиригранний кут, утворений площинами $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$, $\tilde{\sigma}_3$, $\tilde{\sigma}_4$, є правильним. Всі точки $P_{k+\mu,\,l+\nu}$ знаходяться всередині чотиригранного кута, тому всередині даного кута будуть знаходитись і всі точки $B_{k+\mu,\,l+\nu}$ діаграми $\mathfrak{D}_f$. Звідси випливає, що

$$T_{k+\mu,\,l+\nu} \leqslant \frac{\tilde{T}^{|\mu|}_{k+\operatorname{sign}\mu,\,l}\,\tilde{T}^{|\nu|}_{k,\,l+\operatorname{sign}\nu}}{\tilde{T}_{kl}^{|\mu|+|\nu|-1}}. \tag{16}$$

Отже, відрізки $P_{kl}\tilde{B}_{k+1,\,l}$; $P_{kl}\tilde{B}_{k,\,l+1}$; $P_{kl}\tilde{B}_{k-1,\,l}$; $P_{kl}\tilde{B}_{k,\,l-1}$ є правильними ребрами або становлять частину спрямлених ребер $\mathfrak{D}_f$. Тому, згідно з виразами (9)—(10), можемо записати $\tilde{T}_{kl}=T_{kl}$; $\tilde{T}_{k+1,\,l}=T_{k+1,\,l}$; $\tilde{T}_{k,\,l+1}=T_{k,\,l+1}$; $\tilde{T}_{k-1,\,l}=T_{k-1,\,l}$; $\tilde{T}_{k,\,l-1}=T_{k,\,l-1}$. Тоді нерівність (16) зводиться до нерівності (11), яка є необхідною та достатньою умовою, щоб вершина P_{kl} була правильною.

Як прямий наслідок з теореми 1 і теореми 2.3 випливає

Теорема 2. Для того, щоб точка зображення P_{kl} цілої раціональної функції (1) була правильною вершиною, необхідно та достатньо, щоб, крім умов теореми 1, виконувались також нерівності

$$\tilde{D}_{kl}(\zeta) = d_{kl}(\zeta) > 1, \quad \tilde{D}_{kl}(\xi) = d_{kl}(\xi) > 1; \tag{17}$$

$$a_{kl} > \left(a^{\mu_2}_{k_1 l_1}\,a^{\mu_1}_{k_2 l_2}\right)^{\frac{1}{\mu_1+\mu_2}}. \tag{18}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. А. І. Кардаш, О. М. Костовський, І. І. Чулик. Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат, вип. 3. Вид-во Львів. ун-ту, 1967.