ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 517.9 : 621.3.032.26

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ

РОЗРАХУНОК ТРАЄКТОРІЙ ЛІНЗ З ПОРУШЕНОЮ ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

Рух електронів в осесиметричному просторі можна описати системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 r}{dt^2} = a\dfrac{\partial u}{\partial r} + r\left(\dfrac{d\Theta}{dt}\right)^2; \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} = a\dfrac{\partial u}{\partial z}; \\ \dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\Theta}{dt}\right) = a\dfrac{\partial u}{\partial \Theta}, \end{cases} \tag{1}$$

де $u=u(r,z,\Theta)$ — електростатичний потенціал, створений електронною лінзою; a — константа, вибір якої обумовлений значенням потенціалу в точці вильоту. Початкові дані при $t=0$

$$r=r(0),\ \dot r=\dot r(0),\ z=z(0),\ \dot z=\dot z(0),\ \Theta=\Theta(0),\ \dot\Theta=\dot\Theta(0). \tag{2}$$

У випадку осьової симетрії $\dfrac{\partial u}{\partial \Theta}=0$, $r^2\dfrac{d\Theta}{dt}=\text{const}$, і третє рівняння системи (1) інтегрується в кінцевому вигляді. Якщо ж електронна лінза незначно збурена, потенціал її можна зобразити у вигляді ряду [1] по степенях параметрів збурення λ, μ

$$u^*(r,z,\Theta) = u_0(r,z) + \lambda u_1(r,z,\Theta) + \mu u_2(r,z,\Theta) + \\ + \frac{\lambda^2}{2}u_{11}(r,z,\Theta) + \lambda\mu u_{12}(r,z,\Theta) + \frac{\mu^2}{2}u_{22}(r,z,\Theta) + O(\lambda^m\mu^n), \tag{3}$$

де $u_1, \ldots, u_{22}$ — збурення, а $u_0(r,z)$ — потенціал незбуреної осесиметричної лінзи.

В роботі [2] розглянуто три види порушень осьової симетрії електронно-оптичних систем: еліптична дисторсія, паралельне зміщення осей та перекос осей окремих електродів. У цих випадках порушень симетрії збурення, що входять у вираз (3), зображуються у вигляді

$$u_\nu(r,z,\Theta) = v_\nu(r,z)\,\varphi_\nu(\Theta), \tag{4}$$

де $v_\nu(r,z)$ є розв'язками задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца в осесиметричній області. Для знаходження $u_0(r,z)$, $v_\nu(r,z)$ можна використати метод функцій дискретного аргументу [3]. При наближеному інтегруванні системи (1) з початковими умовами (2) виникає необхідність в обчисленні частинних похідних від електростатичного потенціалу, що задані тільки таблично, і обчисленні значень потенціалу в проміжкових точках, відмінних від узлів прямокутної сітки.

Для забезпечення високої точності інтерполяції табличних функцій двох змінних будемо враховувати значення в дев'яти вузлах, що межують з заданою точкою

$$
\begin{array}{ccc}
(i-1,\ k+1) & (i,\ k+1) & (i+1,\ k+1) \\
 & \updownarrow l & \\
(i-1,\ k) & (i,\ k) \xleftrightarrow{\quad h \quad} & (i+1,\ k) \\
 & & \\
(i-1,\ k-1) & (i,\ k-1) & (i+1,\ k-1)
\end{array}
$$

Тоді значення функції в проміжковій точці $(r_k+\eta,\ z_i+\xi)$ обчислюється за формулою [4]

$$
\begin{aligned}
u(r_k+\eta,\ z_i+\xi) &= u_{ki} + \frac{\eta}{2l}(u_{k+1,\,i} - u_{k-1,\,i}) + \frac{\xi}{2h}(u_{k,\,i+1} - u_{k,\,i-1}) + \\
&+ \frac{\eta^2}{2l^2}(u_{k+1,\,i} - 2u_{k,\,i} + u_{k-1,\,i}) + \frac{\xi^2}{2h^2}(u_{k,\,i+1} - 2u_{k,\,i} + u_{k,\,i-1}) + \\
&+ \frac{\xi\eta}{4hl}(u_{k+1,\,i+1} + u_{k-1,\,i-1} - u_{k+1,\,i-1} - u_{k-1,\,i+1}). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

З формули (5) легко дістати наближені значення для частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial r}$ і $\frac{\partial u}{\partial z}$ в проміжкових точках через значення функції в дев'яти вузлах

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{(r_k+\eta,\ z_i+\xi)} &= \frac{1}{2l}(u_{k+1,\,i} - u_{k-1,\,i}) + \frac{\eta}{l^2}(u_{k+1,\,i} - 2u_{k,\,i} + u_{k-1,\,i}) + \\
&+ \frac{\xi}{4hl}(u_{k+1,\,i+1} + u_{k-1,\,i-1} - u_{k+1,\,i-1} - u_{k-1,\,i+1}); \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(r_k+\eta,\ z_i+\xi)} &= \frac{1}{2h}(u_{k,\,i+1} - u_{k,\,i-1}) + \frac{\xi}{h^2}(u_{k,\,i+1} - 2u_{k,\,i} + u_{k,\,i-1}) + \\
&+ \frac{\eta}{4hl}(u_{k+1,\,i+1} + u_{k-1,\,i-1} - u_{k+1,\,i-1} - u_{k-1,\,i+1}). \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Виходячи із зображення потенціалу $u^*(r, z, \Theta)$ у вигляді ряду (3), а членів ряду у вигляді (4), похідну по Θ легко знайти.

Для чисельного інтегрування системи (1) застосуємо метод Рунге—Кутта четвертого порядку, який забезпечує високу точність розв'язку і легко реалізується на ЕОМ. Для ЕОМ «Мінськ-2» складено стандартну програму розв'язку системи (1) з початковими умовами (2) у випадку трьох згаданих порушень осьової симетрії. Для прикладу розглянемо випадок еліптичної дисторсії. Як показано в роботі [1], потенціал електронної лінзи зображується формулою

$$u^*(r, z, \Theta) = u_0(r, z) + \lambda v_1(r, z)\cos 2\Theta, \qquad (8)$$

де $u_0(r, z)$ — осесиметричний потенціал; $v_1(r, z)\cos 2\Theta$ — збурення.

З формули (8) одержуємо

$$\frac{\partial u^*}{\partial r}=\frac{\partial u_0}{\partial r}+\lambda\frac{\partial v_1}{\partial r}\cos 2\Theta;$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z}=\frac{\partial u_0}{\partial z}+\lambda\frac{\partial v_1}{\partial z}\cos 2\Theta, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \Theta}=-2\lambda v_1\sin 2\Theta,$$

а числові значення для $\frac{\partial u_0}{\partial r}$, $\frac{\partial u_0}{\partial z}$, $\frac{\partial v_1}{\partial r}$, $\frac{\partial v_1}{\partial z}$, v_1 знаходимо за формулами (5)—(7).

Використання чисельних значень потенціалу при розв'язуванні системи (1)—(2) значно економить машинний час і порівняно легко реалізується на ЕОМ.

Вплив порушень симетрії лінзи на її оптичні характеристики легко виявити, коли прорахувати траєкторії для незбуреної ідеальної лінзи, а потім з врахуванням збурення при різних значеннях λ при одних і тих самих початкових умовах (2). На екрані побачимо відхилення точок попадання траєкторій збуреної лінзи від незбуреної лінзи. Для прикладу наведемо точки попадання на два екрани $z_{e_1}=3{,}5$, $z_{e_2}=3{,}7$ декількох траєкторій, випущених під кутом в площині $\Theta=0$ при $\lambda=\frac{1}{64}$, однієї електронно-оптичної системи:

Осесиметрична лінза		Збурена лінза	
r_{e_1}	r_{e_2}	r_{e_1}	r_{e_2}
0,0828	0,0762	0,0848	0,0784
0,1977	0,1876	0,1887	0,1778
0,1032	0,0768	0,1361	0,1115

Обчисливши необхідні фізичні характеристики лінзи, зможемо відповісти на питання про межі зміни параметрів збурення, і, отже, на можливі допуски виготовлення лінз.

ЛІТЕРАТУРА

1. Є. С. Дорожовський, В. Г. Костенко. Поле потенціалу електронної лінзи з порушеною осьовою симетрією. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 2, 1965.
2. Е. С. Дорожовский, В. Г. Костенко. Поле потенциала електронной линзы с незначительно нарушенной осевой симметрией. Труды I Всесоюз. семинара по расчетам электронно-оптических систем. Новосибирск, 1965.
3. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киев. ун-та, 1962.
4. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, К. Е. Черныш. Таблицы для решения граничных задач. М., 1956.