ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 Серія механіко-математична Випуск 4

УДК 517.9 : 621.3.032.26

Й. В. ЛЮДКЕВИЧ

ПРО УТОЧНЕННЯ ОДНОГО МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОДІВ МАЛОЇ ТОВЩИНИ

В роботах [1, 2] вказувалось, що розрахунок електростатичного поля системи електродів малої товщини електронної лінзи у випадку осьової симетрії зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_L q(\tau)\cdot\frac{K[r,\ z,\ R(\tau),\ \xi(\tau)]\,d\tau}{\sqrt{[R(\tau)+r]^2+[\xi(\tau)-z]^2}}=U_0\Big|_{L'}, \tag{1}$$

де $q(\tau)$ — невідома густина зарядів на деякій поверхні всередині електроду; L — твірна цієї поверхні; L' — твірна поверхні електроду, на якій заданий потенціал U_0, інші позначення ті ж самі. У формулі (1) опущено сумування по всіх електродах лінзи і формально вважається, що лінза складається з одного електрода.

Якщо густина $q(\tau)$ відома, то потенціал поля в будь-якій точці з координатами (r, z) визначається за формулою

$$U(r,\ z)=\int_L q(\tau)\cdot\frac{K[r,\ z,\ R(\tau),\ \xi(\tau)]\,d\tau}{\sqrt{[R(\tau)+r]^2+[\xi(\tau)-z]^2}}\,. \tag{2}$$

Ефективність інтегрування рівняння (1) істотно залежить від способу зображення густини $q(\tau)$. Як показали приклади розрахунку електронних лінз (поля, траєкторій і оптичних параметрів), найбільш ефективним і практично вигідним є зображення густини $q(\tau)$ у вигляді суми кільцевих зарядів на кінцях твірної L і раціональних функцій (неперервних на всій твірній L) з нелінійними параметрами

$$q(\tau)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{b_k^2+(\tau_k-\tau)^2}, \tag{3}$$

де b_k — наперед задані нелінійні параметри; τ_k — деякі значення τ на твірній L; a_k — невідомі лінійні параметри, які визначаються з граничних умов.

Недоліком даного методу є затрата великої кількості машинного часу на добір параметрів b_k при розрахунку потенціалу поля і, якщо потрібно знаходити тільки потенціал поля, то більш ефективне зображення густини у вигляді кусочно-неперервної функції на L.

Нехай твірна L розбита на декілька нерівних частин, густина на кожній з яких задається у вигляді

$$q_k = \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (\tau_k - \tau)^2}. \qquad (4)$$

Тоді формула (2) для потенціалу поля перепишеться так:

$$U(r, z) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+1}} \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (\tau_k - \tau)^2} \cdot \frac{K[r, z, R(\tau), \xi(\tau)]\, d\tau}{\sqrt{[R(\tau) + r]^2 + [\xi(\tau) - z]^2}}, \qquad (5)$$

де τ_k, τ_{k-1}, τ_{k+1} — координати середини і кінців відрізка L_k. Деколи вигідно ще ставити кільцеві заряди на кінцях твірної L. Параметри a_k з виразу (5) визначаються шляхом задоволення граничних умов в середніх точках відрізків твірної L'. При цьому для досягнення заданої точності задоволенням граничних умов в (3) потрібна більша кількість доданків вигляду (4), порядку 30—40 на лінзу. Не дивлячись на збільшення числа невідомих коефіцієнтів у зображенні густини $q(\tau)$, машинний час на розрахунок поля в 3—4 рази менший, ніж у випадку неперервних густин, внаслідок зменшення проміжку інтегрування при обчисленні коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь. Крім цього, даний метод дає можливість одержати розв'язок задачі при однократному прорахунку, оскільки для параметрів b_k вдалось вказати проміжок їх зміни, а саме:

$$\Delta_k \leqslant b_k \leqslant 2\Delta_k, \qquad (6)$$

де Δ_k — довжина відрізка L_k твірної L. Нерівність (6) була одержана таким чином: необхідно було спочатку при фіксованому числі n для конкретної лінзи прорахувати потенціал при декількох різних наборах значень b_k, тобто, зафіксувавши будь-який набір b_k, розв'язуємо систему алгебраїчних рівнянь, до якої зводиться інтегральне рівняння (1). Потім фіксується другий набір параметрів b_k, і знову робимо аналогічно, і так далі. Слід зауважити, що програма при цьому зовсім не змінюється.

Якщо прораховано декілька варіантів при різних наборах b_k, то про кращий з них судять за точністю задоволення граничних умов у проміжкових точках. Нехай, наприклад, граничні умови задовольнялись в m точках при декількох наборах b_k; шукаємо середню відносну похибку ε при кожному з цих наборів b_k і при мінімальному значенні ε вважаємо, що даний набір b_k є найбільш точним. Таким чином, вдалось зв'язати значення b_k з довжинами Δ_k і одержати графічну залежність похибки ε від величин b_k. Досліджено, що залежність похибки ε від значень b_k має місце не тільки при фіксованому значенні n, але і при різній кількості невідомих a_k, тобто вона не залежить від кількості розбивок твірної L.

Крім того, велись дослідження в напрямі вибору числа n, що має істотне значення, оскільки з ростом n сильно зростає машинний час. Очевидно, потрібно було знайти такі границі для n, щоб, по-перше, досягалась бажана точність, по-друге, затрачувався мінімальний час.

Як показали розрахунки багатьох оптичних систем, Δ_k повинно знаходитись в таких границях (в одиницях довжини електрода):

$$0{,}15 \leqslant \Delta_k \leqslant 0{,}3. \qquad (7)$$

Знаючи Δ_k і довжину твірної L, кількість невідомих знаходимо за формулою

$$n = \frac{L}{\Delta_k}. \qquad (8)$$

Таким чином, при знаходженні потенціалу електронних лінз необхідно додержуватися нерівності (7), тому що зменшення Δ_k приводить до системи з визначником, близьким до нуля, а збільшення Δ_k зменшує точність задоволення граничних умов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. В. Валько, І. О. Прусов, Й. В. Людкевич. Визначення осесиметричного потенціалу системи електродів малої товщини методом нелінійних параметрів. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 1, 1965.
2. Б. В. Валько, І. О. Прусов, Л. О. Романів. Осесиметричний потенціал системи електродів малої товщини. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 2, 1965.