ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 517.946

М. І. ІВАНЧОВ

ДЕЯКІ АПРІОРНІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

Нехай задана квазілінійна система вигляду

$$a_{ij}(x, \vec{u})\, u^l_{x_i x_j} + a^l(x, \vec{u}, \vec{u}_x) = 0, \qquad (l = 1, \ldots, N) \tag{1}$$

де

$$\vec{u}(x) = \{u^1(x), \ldots, u^N(x)\}. \qquad x = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Для системи (1) розглянемо задачу Діріхле в області Ω, що лежить зовні поверхні S з класу $C^{(2)}$:

$$u^l(x)|_S = \psi^l(x). \qquad (l = 1, \ldots, N) \tag{2}$$

Будемо вважати, що початок координат знаходиться всередині поверхні S.

Встановимо деякі апріорні оцінки розв'язків задачі (1)—(2) в просторі $C^{(2)}_\beta(\overline{\Omega})$, $\beta > -1$ [1] .Будемо вважати, що функція $\vec{u}(x)$ належить до класу $C^{(2)}_\beta(\overline{\Omega})$, якщо для неї визначена і скінченна норма

$$\|\vec{u}(x)\|_{C^{(2)}_\beta(\overline{\Omega})} = \left\{ \sum_{l=1}^{N} \left[\sum_{k=0}^{2} \max_{\Omega} \left(|x|^{k+\beta} |D^{(k)} u^l| \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Введемо позначення

$$M_{0,\beta}[\vec{u}] = \left[\sum_{l=1}^{N} \left(\max_{\Omega} |x|^{\beta} |u^l(x)| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$M_{1,\beta}[\vec{u}] = \left[\sum_{l=1}^{N} \left(\max_{\Omega} |x|^{1+\beta} |\nabla u^l(x)| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай виконуються такі умови:

а) коефіцієнти $a_{ij}(x, \vec{u})$ і $a^l(x, \vec{u}, \vec{p})$ неперервно диференційовані по всіх аргументах і при $x \in \Omega$, довільних $\vec{u}(x)$, таких, що $M_{0,\beta}[\vec{u}] < \infty$, і довільних скінченних $\vec{p}$ задовольняють умови

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant a_{ij}(x, \vec{u})\, \xi_i \xi_j \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2; \tag{3}$$

$$\left(\left|\frac{\partial a_{ij}(x,\ u)}{\partial x_k}\right|+\left|\frac{\partial a^l}{\partial p_k^m}\right|\right)|\vec{p}|+\left|\frac{\partial a^l}{\partial x_k}\right||x|+|a^l|\leqslant\mu|\vec{p}||x|^{-1};$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^m}\right||\vec{p}|+\left|\frac{\partial a^l}{\partial u^m}\right||x|\leqslant(\varepsilon+P)|\vec{p}||x|^{\beta}, \tag{4}$$

де $\beta>-1$; $\mu=\mu(M_{0,\beta}[\vec{u}])>0$ — монотонна неспадна функція; $\nu=\nu(M_{0,\beta}[\vec{u}])>0$ — монотонна незростаюча функція; $\varepsilon>0$ — достатньо мале число, що залежить від ν, μ, $M_{0,\beta}[\vec{u}]$ і N; $P[|x|^{\beta}|\vec{u}|;\ |x|^{1+\beta}|\nabla\vec{u}|]$ — неперервна функція, монотонно зростаюча по першому аргументу і прямуюча до нуля при $|x|^{1+\beta}|\nabla\vec{u}|\to\infty$; $\vec{p}=\{p^1,\ldots,\ p^N\}=\{\nabla u^1,\ldots,\nabla u^N\}$;

б) $\psi^l(x)\in C^{(2)}(S)$. $(l=1,\ldots,\ N)$

Теорема. При виконанні умов а)—б) для довільного розв'язку задачі (1)—(2) $\vec{u}(x)$ з класу $C_{\beta}^{(2)}(\overline{\Omega})$ величина $M_{1,\beta}[\vec{u}]$ оцінюється через $M_{0,\beta}[\vec{u}]$, постійні ν, μ, N, $\hat{P}=\max\limits_{\Omega} P(M_{0,\beta}[\vec{u}],\ |x|^{1+\beta}|\nabla\vec{u}|)$, норму $\|\psi\|_{C^{(2)}(S)}$ і норму границі S в $C^{(2)}$.

Для доведення теореми введемо нові функції $v^l(x)$ за допомогою заміни

$$u^l=\varphi(v^l)|x|^{-\beta}, \tag{5}$$

де

$$\varphi(t)=-2M_{0,\beta}[\vec{u}]+6eM_{0,\beta}[\vec{u}]\int\limits_0^t e^{-s^q}\,ds,\qquad q\gg 1$$

і величина q пізніше буде зафіксована. З такої заміни легко бачити, що для оцінки $M_{1,\beta}[\vec{u}]$ достатньо оцінити $M_{1,0}[\vec{v}]$.

Після заміни (5) система (1) буде мати вигляд

$$M^l(\vec{u},\ \vec{v})\equiv a_{ij}(x,\ \vec{u})\,v^l_{x_ix_j}+\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)}a_{ij}v^l_{x_i}v^l_{x_j}-2\beta\frac{a_{ij}x_i}{|x|^2}v^l_{x_j}+$$
$$+\beta(\beta+2)\frac{a_{ij}x_ix_j}{|x|^4}\ \frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)}-\beta\frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)}\ \frac{\Sigma a_{ij}}{|x|^2}+\frac{|x|^{\beta}}{\varphi'(v^l)}a^l(x,\ \vec{u},\ \vec{u}_x)=0 \tag{6}$$
$$(l=1,\ldots,\ N).$$

Введемо в розгляд функцію $w=|x|^{2r}|\nabla\vec{v}|^2$, де $r=1-\delta$, $0<\delta\ll 1$. Очевидно, що для оцінки $M_{1,0}[\vec{v}]$ достатньо отримати рівномірну відносно δ оцінку $\max\limits_{\Omega} w$. Якщо $\max\limits_{\Omega} w$ досягається на границі S, то оцінка проводиться так само, як і у випадку обмеженої області [2]. Тому величину $\max\limits_{S} w$ можна вважати відомою. Якщо ж $\max\limits_{\Omega} w$ на границі S не досягається, то він досягається у внутрішній точці області Ω, бо $w(x)\to 0$, коли $x\to\infty$. Оцінку w всередині області Ω встановлюємо таким чином. Введемо функцію $\eta(x)=\max\{w(x)-\lambda,0\}$, $\lambda\geqslant\max\limits_{S} w$ і розглянемо рівність

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{l=1}^{N}M^l(\vec{u},\ \vec{v})\,(2v^l_{x_\alpha}\eta|x|^{4r})_{x_\alpha}\,dx=0. \tag{7}$$

Використовуючи результати роботи [1], з рівності (7) одержимо

$$\int\limits_{A_\lambda} \Big\{ a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} |x|^{2r} + (w-\lambda) \Big[2a_{ij} v^l_{x_\alpha x_i} v^l_{x_\alpha x_j} |x|^{4r} + 2a_{ij} B_{ij} w |x|^{2r-2} +$$

$$+ 6r a_{ij} x_i w_{x_j} |x|^{2r-2} + \frac{da_{ij}}{dx_i} w_{x_j} |x|^{2r} - 2 \frac{da_{ij}}{dx_\alpha} v^l_{x_i x_j} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r} -$$

$$-2 \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' a_{ij} v^l_{x_i} v^l_{x_j} w |x|^{2r} - 2 \frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \frac{da_{ij}}{dx_\alpha} v^l_{x_i} v^l_{x_j} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r} -$$

$$-4 \frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} a_{ij} v^l_{x_j} v^l_{x_j x_\alpha} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r} + 4\beta \frac{da_{ij}}{dx_\alpha} x_i v^l_{x_j} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r-2} +$$

$$+ 4\beta a_{ij} \delta_{i\alpha} v^l_{x_j} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r-2} + 4\beta a_{ij} x_i v^l_{x_j x_\alpha} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r-2} -$$

$$- 8\beta a_{ij} x_i x_\alpha v^l_{x_j} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r-4} + 2 \left(\frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' a_{ij} A_{ij} w |x|^{2r-2} +$$

$$+ 2 \frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)} \frac{da_{ij}}{dx_\alpha} A_{ij} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r-2} + 2 \frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)} \frac{dA_{ij}}{dx_\alpha} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r-2} -$$

$$-4 \frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)} a_{ij} A_{ij} x_\alpha v^l_{x_\alpha} |x|^{4r-4} + \frac{2}{\varphi'(v^l)} \frac{da^l}{dx_\alpha} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r+\beta} +$$

$$+ 2 \frac{\varphi''(v^l)}{(\varphi'(v^l))^2} a^l w |x|^{2r+\beta} - 2\beta \frac{a^l}{\varphi'(v^l)} x_\alpha v^l_{x_\alpha} |x|^{4r+\beta-2} \Big] \Big\} dx = 0, \qquad (8)$$

де A_λ — множина точок області Ω, в якій $w > \lambda$;

$$A_{ij}(x) \equiv \beta \left[\delta_{ij} - (2+\beta) \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right]; \quad B_{ij}(x) \equiv r \left[\delta_{ij} - 2(1+r) \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right];$$

$$\frac{da_{ij}}{dx_\alpha} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^m} [|x|^{-\beta} \varphi'(v^m) v^m_{x_\alpha} - \beta x_\alpha \varphi(v^m) |x|^{-2-\beta}] + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha};$$

$$\frac{da^l}{dx_\alpha} = \frac{\partial a^l}{\partial p^m_k} [|x|^{-\beta} \varphi'(v^m) v^m_{x_k x_\alpha} + |x|^{-\beta} \varphi''(v^m) v^m_{x_k} v^m_{x_\alpha} -$$

$$- 2\beta x_k |x|^{-2-\beta} \varphi'(v^m) v^m_{x_\alpha} - \beta \varphi(v^m) |x|^{-2\beta} \delta_{\alpha k} +$$

$$+ \beta(\beta+2) x_k x_\alpha \varphi(v^m) |x|^{-4-\beta}] + \frac{\partial a^l}{\partial u^m} [|x|^{-\beta} \varphi'(v^m) v^m_{x_\alpha} -$$

$$- \beta x_\alpha \varphi(v^m) |x|^{-2-\beta}] + \frac{\partial a^l}{\partial x_\alpha}.$$

Використовуючи умову (3) для оцінки знизу, оцінимо наступні члени рівності (8):

$$a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} |x|^{2r} \geqslant \nu |\nabla w|^2 |x|^{2r};$$

$$a_{ij} v^l_{x_\alpha x_i} v^l_{x_\alpha x_j} |x|^{4r} \geqslant \nu \sum_{i,j=1}^{n} \vec{v}^2_{x_i x_j} |x|^{4r};$$

$$- \left[\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right]' a_{ij} v^l_{x_i} v^l_{x_j} w |x|^{2r} \geqslant - \nu \sum_{l=1}^{N} \left[\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right]' w^2. \qquad (9)$$

При цьому враховуємо, що внаслідок вибору функції φ величина $-\left[\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)}\right]'$ додатня.

Інші члени рівності (8) оцінюємо зверху, використовуючи при цьому умови (3)—(4) і нерівність Коші $ab \leqslant \varepsilon_1 a^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} b^2$. Для прикладу наведемо кілька таких оцінок:

$$\frac{da_{ij}}{dx_\alpha} v^l_{x_i x_j} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r} \leqslant \varepsilon_1 \sum_{i,j=1}^{n} \vec{v}^2_{x_i x_j} |x|^{4r} +$$

$$+ \frac{(\varepsilon + P)^2}{4\varepsilon_1} \sum_{m=1}^{N} [\varphi'(v^m)]^2 w^2 + c_1(\varepsilon, \varepsilon_1, P, q, M_{0,\beta}[\vec{u}])\, w;$$

$$\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \frac{da_{ij}}{dx_\alpha} v^l_{x_i} v^l_{x_j} v^l_{x_\alpha} |x|^{4r} \leqslant c_2(\mu, M_{0,\beta}[\vec{u}]) \left[(\varepsilon + P)\left(\sum_{l=1}^{N} |\varphi''(v^l)| + 1\right) +\right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)}\right)^2\right] w^2 + c_3(\mu, q, M_{0,\beta}[\vec{u}])\, w;$$

$$\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} a_{ij} v^l_{x_i} v^l_{x_\alpha} v^l_{x_j x_\alpha} |x|^{4r} \leqslant c_4(\mu) |\nabla w|^2 |x|^{2r} +$$

$$+ c_5(\mu) \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)}\right)^2 w^2 + c_6(\mu, q, M_{0,\beta}[\vec{u}])\, w;$$

$$\frac{da^l}{dx_\alpha} \frac{v^l_{x_\alpha}}{\varphi'(v^l)} \leqslant \varepsilon_1 \sum_{i,j=1}^{n} \vec{v}^2_{x_i x_j} |x|^{4r} + \left[\varepsilon + P + \sum_{l,m=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^m)}\right)^2\right] w^2 +$$

$$+ c_7(\mu, \varepsilon, \varepsilon_1, \beta, q, N, M_{0,\beta}[\vec{u}])\, w. \tag{10}$$

При одержанні оцінок враховувалось те, що без обмеження загальності можна вважати $w > 1$ і $|x| > 1$. Застосуємо одержані оцінки до членів рівності (8):

$$\int_{A_\lambda} \left\{ |\nabla w|^2 |x|^{2r} + 2(w - \lambda)\left[\sum_{i,j=1}^{n} \vec{v}^2_{x_i x_j} |x|^{4r} - \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)}\right)' w^2\right]\right\} dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{A_\lambda} (w - \lambda) \Bigg\{ c_8(\mu, \nu) |\nabla w|^2 |x|^{2r} + 3\varepsilon_1 \sum_{i,j=1}^{n} \vec{v}^2_{x_i x_j} |x|^{4r} +$$

$$+ c_9(\varepsilon, \mu, \nu, M_{0,\beta}[\vec{u}]) \Bigg[(\varepsilon + P)^2 \sum_{m=1}^{N} (\varphi'(v^m))^2 +$$

$$+ (\varepsilon + P)\left(\sum_{l=1}^{N} |\varphi''(v^l)| + 1\right) + \sum_{l=1}^{N} \frac{(\varphi''(v^l))^2}{(\varphi'(v^l))^4} +$$

$$+ \sum_{l,m=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^m)}{\varphi'(v^l)}\right)^2\Bigg] w^2 + c_{10}(\nu, \mu, \beta, N, q, \varepsilon, P, \varepsilon_1, M_{0,\beta}[\vec{u}])\, w \Bigg\} dx. \tag{11}$$

Покладемо в (11) $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$. Тоді приходимо до такої нерівності:

$$\int_{A_\lambda} \left[|\nabla w|^2 |x|^{2r} - 2(w-\lambda) \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' w^2 \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{A_\lambda} (w-\lambda) \left\{ c_8 |\nabla w|^2 |x|^{2r} + c_9 \left[(\varepsilon + P)^2 \sum_{m=1}^{N} (\varphi'(v^m))^2 + \right.\right.$$

$$+ (\varepsilon + P) \left(\sum_l |\varphi''(v^l)| + 1 \right) + \sum_l \frac{(\varphi''(v^l))^2}{(\varphi'(v^l))^4} +$$

$$\left.\left. + \sum_{l,m=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^l)}{(\varphi'(v^m))} \right)^2 \right] w^2 + c_{10} w \right\} dx. \qquad (12)$$

Використаємо властивості функції P з умови (4). Для цього попередньо встановимо таку оцінку:

$$|x|^{1+\beta} |\nabla \vec{u}| \geqslant M_{0,\beta}[\vec{u}] (6\sqrt{\lambda} - |\beta|), \qquad (13)$$

яка отримується з формули (5) з врахуванням властивостей функції $\varphi(t)$ [2]. Тепер виберемо λ_1 настільки великим, щоб при $\lambda > \lambda_1$ мала місце нерівність $P(M_{0,\beta}[\vec{u}], (6\sqrt{\lambda} - |\beta|) M_{0,\beta}[\vec{u}]) < \varepsilon$. Це можливо внаслідок властивостей функції P. Тоді при $\lambda > \lambda_1$ ми також будемо мати

$$P(|x|^\beta |\vec{u}|, |x|^{1+\beta} |\nabla \vec{u}|) \leqslant P(M_{0,\beta}[\vec{u}] (6\sqrt{\lambda} - |\beta|) M_{0,\beta}[\vec{u}]) < \varepsilon, \quad (14)$$

якщо врахувати нерівність (13).

Виберемо q, що входить у визначення функції $\varphi(t)$, настільки великим, щоб мало місце

$$- \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' \geqslant c_9 \left[4\varepsilon^2 \sum_{m=1}^{N} (\varphi'(v^m))^2 + 2\varepsilon \sum_{l=1}^{N} |\varphi''(v^l)| + 2\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{N} \frac{(\varphi''(v^l))^2}{(\varphi'(v^l))^4} + \sum_{l,m=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^m)} \right)^2 \right]. \qquad (15)$$

Покажемо, що це можливо.

Перш за все відзначимо деякі співвідношення, які випливають з визначення функції $\varphi(t)$ (5):

$$\varphi'(t) = 6eM_{0,\beta}[\vec{u}] e^{-t^q};$$

$$\varphi''(t) = -6eM_{0,\beta}[\vec{u}] e^{-t^q} qt^{q-1};$$

$$-\frac{\varphi''}{\varphi'} = qt^{q-1}; \quad -\left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)' = q(q-1) t^{q-2}. \qquad (16)$$

Крім того, $\frac{1}{6e} < t < \frac{1}{2}$ [2].

Використовуючи співвідношення (16), легко бачити, що

$$\frac{(\varphi''(t))^2}{(\varphi'(t))^4} \leqslant t^{q-2} q^2 2^{-q} \frac{1}{36 e M_{0,\beta}^2 [\bar{u}]};$$

$$\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2 \leqslant t^{q-2} q^2 2^{-q}; \tag{17}$$

$$\left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^m)}\right)^2 \leqslant q^2 (v^l)^{2q-2} e^{-2(v^l)^q + 2(v^m)^q} \leqslant q^2 (v^l)^{q-2} 2^{-q} e.$$

Тепер, якщо врахувати співвідношення (16) і (17), то при досить великому q і досить малому $\varepsilon > 0$ справедливість нерівності (15) стає очевидною. Отже, використовуючи нерівності (14) і (15), маємо при $\lambda > \lambda_1$

$$\int\limits_{A_\lambda} \left[|\nabla w|^2 |x|^{2r} - (w-\lambda) \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)}\right)' w^2 \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{A_\lambda} (w-\lambda)(c_8 |\nabla w|^2 |x|^{2r} + c_{10} w)\, dx.$$

Позначимо $\min\limits_{|\vec{u}| \leqslant |x|^{-\beta} M_{0,\beta}[\vec{u}]} \left\{ - \sum\limits_{l=1}^{N} \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)}\right)' \right\} = \varkappa > 0$. Одержимо

$$\int\limits_{A_\lambda} [|\nabla w|^2 |x|^{2r} + \varkappa (w-\lambda) w^2]\, dx \leqslant \int\limits_{A_\lambda} (w-\lambda)(c_8 |\nabla w|^2 |x|^{2r} + c_{10} w)\, dx. \tag{18}$$

Нехай $\lambda_2 = \max\limits_{\Omega} w$ і $\lambda_3 = \lambda_2 - \frac{1}{c_8}$. Якщо $\lambda_3 \leqslant \lambda_1$, то $\max\limits_{\Omega} w \leqslant \lambda_1 + \frac{1}{c_8}$, і ми маємо потрібну оцінку. Якщо ж $\lambda_3 > \lambda_1$, то візьмемо (18) при $\lambda = \lambda_3$ і одержимо

$$\varkappa \int\limits_{A_{\lambda_3}} (w-\lambda_3) w^2 dx \leqslant c_{10} \int\limits_{A_{\lambda_3}} (w-\lambda_3) w dx.$$

Тому що в A_{λ_3} $w > \lambda_3$, то

$$\varkappa \lambda_3 \int\limits_{A_{\lambda_3}} (w-\lambda_3) w dx \leqslant c_{10} \int\limits_{A_{\lambda_3}} (w-\lambda_3) w dx,$$

або $\lambda_3 \leqslant \frac{c_{10}}{\varkappa}$. Звідси випливає, що

$$\max_{\Omega} w \leqslant \frac{c_{10}}{\varkappa} + \frac{1}{c_8},$$

тобто необхідна оцінка встановлена і тим самим доведена теорема.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. П. Осколков, В. А. Тарасов. Об априорных оценках первых производных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченной области. Вестник Ленингр. ун-та, сер. мат., мех. и астрон., № 7, 1966.
2. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.