ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 512.39

Г. Г. ЦЕГЕЛИК

УМОВА НАЙКРАЩОГО ВИБОРУ ПАРАМЕТРІВ У МЕТОДІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ЛОКАЛІЗАЦІЇ НУЛІВ ФУНКЦІЙ

У роботах [1, 2] розглядається локалізація за модулями нулів рядів Лорана (зокрема, степенних рядів або многочленів) за допомогою мажорант і діаграм Ньютона. Більш загальним методом локалізації за модулями нулів рядів Лорана (зокрема, степенних рядів або многочленів) є метод локалізації за допомогою параметрів, який введений в роботі [3]. У даній статті досліджується умова найкращого вибору параметрів у цьому методі, а також можливість за допомогою параметрів розширювати області, в яких немає нулів, або звужувати області, в яких є визначене число нулів.

Розглянемо ряд Лорана (зокрема, степенний ряд або многочлен)

$$f(z) = \sum_{\nu=p}^{q} A_\nu z^\nu, \quad (-\infty \leqslant p < q \leqslant \infty;\ A_p,\ A_q \neq 0) \tag{1}$$

який збігається в кільці $r<|z|<R$.

Позначимо через M множину індексів, відмінних від нуля коефіцієнтів ряду (1); через M_1 — множину тих індексів із M, які менші від k $(p<k<q)$; через M_2 — множину тих індексів із M, які більші від k.

Нехай $k \in M$ і $\{\alpha_\nu\}$ $(\nu \in M)$ — довільна послідовність додатних чисел (параметрів), яка задовольняє умову

$$\sum_{\nu \in M_1} \alpha_\nu = \delta, \quad \sum_{\nu \in M_2} \alpha_\nu = \alpha_k - \delta. \quad (0 < \delta < \alpha_k) \tag{2}$$

Покладемо

$$R_k = \inf_{\nu \in M_2} \left(\frac{\alpha_\nu a_k}{\alpha_k a_\nu} \right)^{\frac{1}{\nu-k}};$$

$$r_k = \sup_{\nu \in M_1} \left(\frac{\alpha_k a_\nu}{\alpha_\nu a_k} \right)^{\frac{1}{k-\nu}},$$

де $a_\nu = |A_\nu|$ $(\nu \in M)$.

В роботі [3] показано, що якщо $A_k \neq 0$ $(p<k<q)$ і існує такий набір параметрів $\{\alpha_\nu\}$ $(\nu \in M)$, який задовольняє умову (2), що $R_k > r_k$, то ряд Лорана (1) (зокрема, степенний ряд або многочлен) не перетворюється в нуль в кільці $r_k \leqslant |z| \leqslant R_k$.

Легко бачити, що різним наборам параметрів $\{\alpha_\nu\}$ $(\nu \in M)$ (при постійних α_k і δ) відповідають різної величини кільця $r_k \leqslant |z| \leqslant R_k$. Розглянемо множину всіляких наборів параметрів $\{\alpha_\nu\}$ $(\nu \in M)$, для яких $R_k > r_k$. Цій множині наборів параметрів відповідає якась множина кілець $K = \{r_k \leqslant |z| \leqslant R_k\}$. Позначимо об'єднання всіх кілець з множини K через кільце $q_k \leqslant |z| \leqslant Q_k$. Нехай це кільце відповідає якомусь наборові параметрів $\{\alpha_\nu^{(0)}\}$ $(\nu \in M)$.

Для знаходження набору параметрів $\{\alpha_\nu^{(0)}\}$ і кільця $q_k \leqslant |z| \leqslant Q_k$, яке йому відповідає, використаємо наступну лему.

Нехай в області D:

$$\begin{cases} 0 < x_i < \delta, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \delta \quad (1 \leqslant i \leqslant n;\ 1 < n \leqslant \infty) \end{cases}$$

n-вимірного Евклідового простору задана послідовність функцій $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)$, яка задовольняє такі умови:

1) всі функції неперервні і або зростають, або спадають;

2) якщо всі функції неперервно зростають, то кожна функція $\varphi_\nu(x_\nu)$ зростає від 0 до деякого постійного β_ν при зростанні x_ν від 0 до δ; якщо всі функції неперервно спадають, то кожна функція $\varphi_\nu(x_\nu)$ спадає від ∞ до деякого постійного γ_ν при зростанні x_ν від 0 до δ.

Позначимо

$$B_1 = \sup_{x \in D} \inf_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \varphi_\nu(x_\nu);$$

$$B_2 = \inf_{x \in D} \sup_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \varphi_\nu(x_\nu),$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Має місце наступна лема.

Лема 1. Існує одна і тільки одна точка $x = x^{(1)}$ області D, для якої

$$\varphi_1(x_1^{(1)}) = \varphi_2(x_2^{(1)}) = \ldots = \varphi_n(x_n^{(1)}), \tag{3}$$

причому для цієї точки досягається B_1 та B_2 і $B_1 = B_2$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що якщо для точки $x = x^{(1)}$ області D виконується (3), то, очевидно, для неї досягається B_1 та B_2 і $B_1 = B_2$. Доведемо тепер, що така точка існує і вона єдина.

Допустимо, що всі функції $\varphi_\nu(x_\nu)$ неперервно зростають (якщо всі $\varphi_\nu(x_\nu)$ неперервно спадають, то доведення аналогічне). Нехай $n = 2$. Виберемо в області D точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, для якої $\varphi_1(x_1^{(0)}) < \varphi_2(x_2^{(0)})$. При зростанні x_1 від $x_1^{(0)}$ до δ функція $\varphi_1(x_1)$ неперервно зростає від $\varphi_1(x_1^{(0)})$ до β_1, в той час $x_2 = \delta - x_1$ спадає від $x_2^{(0)}$ до 0 і функція $\varphi_2(x_2)$ неперервно спадає від $\varphi_2(x_2^{(0)})$ до 0. Тому існує одне значення $x = x^{(1)}$ в області D, для якого $\varphi_1(x_1^{(1)}) = \varphi_2(x_2^{(1)})$, тобто лема справедлива для $n = 2$.

Нехай лема вірна для $n = k > 2$, доведемо, що вона вірна для $n = k + 1$. Виберемо в області D точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_{k+1}^{(0)})$, для якої $\varphi_1(x_1^{(0)}) = \varphi_2(x_2^{(0)}) = \ldots = \varphi_k(x_k^{(0)}) < \varphi_{k+1}(x_{k+1}^{(0)})$.

Позначимо

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = y_k, \quad x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + \ldots + x_k^{(0)} = y_k^{(0)}.$$

Оскільки лема вірна для $n = k$, то для кожного значення y_k з проміжку $[y_k^{(0)}, \delta]$ існує одна точка, для якої

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2) = \ldots = \varphi_k(x_k). \tag{4}$$

Позначимо множину точок $(x_1, \ldots, x_k)$, для якої виконується (4), коли y_k пробігає свої значення від $y_k^{(0)}$ до δ, через S. Очевидно, що, розглядаючи тільки точки множини S, при зростанні y_k від $y_k^{(0)}$ до δ функція $\varphi_k(x_k)$ неперервно зростає, в той час $x_{k+1}=\delta-y_k$ спадає від $\delta-y_k^{(0)}$ до 0, і функція $\varphi_{k+1}(x_{k+1})$ також неперервно спадає до 0. Таким чином, існує одна точка $x=x^{(1)}$ $(y_k^1=y_k^{(1)},\ x_{k+1}=\delta-y_k^{(1)})$ області D, для якої $\varphi_k(x_k^{(1)})=\varphi_{k+1}(x_{k+1}^{(1)})$. А оскільки для цієї точки виконується (4), то має місце (3). Лема доведена.

Використовуючи лему 1, легко бачити, що $q_k=t_1$, де t_1 — додатний корінь рівняння

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i_j} t^{k-i_j} = \frac{a_k}{\alpha_k}\,\delta, \tag{5}$$

$i_1, i_2, \ldots, i_m$ $(1 \leqslant m \leqslant \infty)$ — всі елементи множини M_1, розміщені в порядку $i_l > i_{l+1}$ $(1 \leqslant l \leqslant m-1)$; $Q_k=t_2$, де t_2 — додатний корінь рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} a_{s_j} t^{s_j-k} = \frac{a_k}{\alpha_k}(\alpha_k-\delta), \tag{6}$$

$s_1, s_2, \ldots, s_n$ $(1 \leqslant n \leqslant \infty)$ — всі елементи множини M_2, розміщені в порядку $s_l < s_{l+1}$ $(1 \leqslant l \leqslant n-1)$.

Набір параметрів $\{\alpha_\nu^{(0)}\}$ $(\nu \in M)$ буде

$$\begin{aligned} \alpha_{i_l}^{(0)} &= \frac{\alpha_k}{a_k} a_{i_l} \frac{1}{t_1^{k-i_l}}; \quad (1 \leqslant l \leqslant m) \\ \alpha_{s_l}^{(0)} &= \frac{\alpha_k}{a_k} a_{s_l} t_2^{s_l-k}. \quad (1 \leqslant l \leqslant n) \end{aligned} \tag{7}$$

З цього випливає

Теорема 1. Якщо $R_k > r_k$ для деякого набору параметрів $\{\alpha_\nu\}$ $(\nu \in M)$ (при заданих постійних α_k і δ), то існує єдиний набір параметрів $\{\alpha_\nu^{(0)}\}$ $(\nu \in M)$, який визначається з (7), що ряд Лорана (1) (зокрема, степенний ряд або многочлен) не перетворюється в нуль у кільці

$$q_k \leqslant |z| \leqslant Q_k,$$

де q_k і Q_k — відповідно додатні корені рівнянь (5) і (6).

Геометрично це означає, що якщо $R_k > r_k$ для деякого набору параметрів $\{\alpha_\nu\}$ $(\nu \in M)$, то існує єдиний набір параметрів $\{\alpha_\nu^{(0)}\}$ $(\nu \in M)$, що всі точки зображення коефіцієнтів ряду [1, 2]

$$f_0(z) = \sum_{\nu=p}^{q} \frac{A_\nu}{\alpha_\nu^{(0)}} z^\nu$$

лежать на двох півпрямих, які виходять з точки зображення k-го коефіцієнта, тобто діаграма Ньютона функції $f_0(z)$ складається з двох півпрямих, які виходять з однієї точки.

Різним значенням δ $(0 < \delta < \alpha_k)$ (при постійному α_k) відповідають різні значення величин q_k і Q_k. Розглянемо множину всіх значень δ, для яких $Q_k \geqslant q_k$. Цій множині значень δ відповідає якась множина L значень q_k і Q_k. Позначимо через p_k і P_k відповідно нижню і верхню границі множини L.

Очевидно, що величинам p_k і P_k відповідають два значення δ: δ_1 і δ_2 і два набори параметрів $\{\alpha_\nu^{(1)}\}$ і $\{\alpha_\nu^{(2)}\}$, для яких $q_k=Q_k$. Щоб знайти p_k, P_k, δ_1, δ_2, $\{\alpha_\nu^{(1)}\}$ і $\{\alpha_\nu^{(2)}\}$, використаємо таку лему.

Розглянемо дві області $D_1(t)$:

$$\begin{cases} 0 < x_i < t, \\ \sum\limits_{i=1}^{n_1} x_i = t \qquad (1 \leq i \leq n_1;\ 1 \leq n_1 \leq \infty) \end{cases}$$

і $D_2(t)$:

$$\begin{cases} 0 < y_i < \gamma - t, \\ \sum\limits_{i=1}^{n_2} y_i = \gamma - t \qquad (1 \leq i \leq n_2;\ 1 \leq n_2 < \infty;\ 0 < t < \gamma = \mathrm{const}). \end{cases}$$

відповідно n_1- і n_2-вимірного Евклідового простору, які при кожному фіксованому значенні t набирають конкретного вигляду.

Нехай в області $D_1(t)$ задана послідовність функцій $\{\varphi_\nu(x_\nu)\}$ $(1 \leq \nu \leq n_1)$, кожна функція $\varphi_\nu(x_\nu)$ неперервна і спадає від ∞ до деякого $b_\nu(t)$ при зростанні x_ν від 0 до t; в області $D_2(t)$ задана послідовність функцій $\{\psi_\nu(y_\nu)\}$ $(1 \leq \nu \leq n_2)$, кожна функція $\psi_\nu(y_\nu)$ неперервна і зростає від 0 до деякого $c_\nu(t)$ при зростанні y_ν від 0 до $\gamma - t$.

Нехай на основі леми 1 існує хоч би одне значення $t=t_0$, для якого в області $D_1(t_0)$ існує точка $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n_1}^{(0)})$ і в області $D_2(t_0)$ існує точка $y^{(0)}=(y_1^{(0)}, \ldots, y_{n_2}^{(0)})$, що

$$\varphi_1(x_1^{(0)}) = \ldots = \varphi_{n_1}(x_{n_1}^{(0)}) < \psi_1(y_1^{(0)}) = \ldots = \psi_{n_2}(y_{n_2}^{(0)}).$$

Тоді на основі леми 1 справедлива така лема:

Лема 2. Існує тільки два значення t: t_1 і t_2, дві точки $x^{(1)}$ і $x^{(2)}$ відповідно в $D_1(t_1)$ і $D_2(t_2)$ і дві точки $y^{(1)}$ і $y^{(2)}$ відповідно в $D_2(t_1)$ і $D_2(t_2)$, що

$$\varphi_1(x_1^{(i)}) = \ldots = \varphi_{n_1}(x_{n_1}^{(i)}) = \psi_1(y_1^{(i)}) = \ldots = \psi_{n_2}(y_{n_2}^{(i)}). \qquad (i=1,\ 2)$$

Доведення леми очевидне.

Використовуючи лему 2, легко бачити, що $p_k=t_3$ і $P_k=t_4$, де t_3 і t_4 — два додатні корені $(t_3<t_4)$ рівняння

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i_j} t^{k-i_j} + \sum_{j=1}^{n} a_{s_j} t^{k-s_j} = a_k. \tag{8}$$

Набір параметрів $\{\alpha_\nu^{(1)}\}$ і $\{\alpha_\nu^{(2)}\}$ $(\nu \in M)$ буде

$$\begin{aligned} \alpha_{i_l}^{(j)} &= \frac{\alpha_k}{a_k} a_{i_l} t_{j+2}^{k-i_l}; \quad (1 \leq l \leq m) \\ \alpha_{s_l}^{(j)} &= \frac{\alpha_k}{a_k} a_{s_l} \frac{1}{t_{j+2}^{s_l-k}}, \quad (1 \leq l \leq n) \end{aligned} \tag{9}$$

де $j=1, 2$.

Значення δ_1 і δ_2 будуть

$$\delta_1 = \frac{\alpha_k}{a_k} \sum_{\nu \in M_1} a_\nu t_3^{k-\nu}; \quad \delta_2 = \frac{\alpha_k}{a_k} \sum_{\nu \in M_1} a_\nu t_4^{k-\nu}, \tag{10}$$

Звідси випливає наступна теорема:

Теорема 2. Якщо $R_k > r_k$ для деякого набору параметрів $\{\alpha_\nu\}$ $(\nu \in M)$ (при заданих постійних α_k і δ), то існує таких два значення δ: δ_1 і δ_2, які визначаються з (10), для яких існує два набори параметрів $\{\alpha_\nu^{(1)}\}$ і $\{\alpha_\nu^{(2)}\}$ $(\nu \in M)$, які визначаються з (9), що ряд Лорана (1) (зокрема, степенний ряд або многочлен) не перетворюється в нуль у кільці

$$p_k < |z| < P_k,$$

де p_k і P_k — два додатних корені рівняння (8).

Геометрично це означає, що якщо $R_k > r_k$ для деякого набору параметрів $\{\alpha_\nu\}$ $(\nu \in M)$, то існує такі два набори параметрів $\{\alpha_\nu^{(1)}\}$ і $\{\alpha_\nu^{(2)}\}$ $(\nu \in M)$, що всі точки зображення коефіцієнтів ряду

$$f_i(z) = \sum_{\nu=p}^{q} \frac{A_\nu}{\alpha_\nu^{(i)}} z^\nu \quad (i=1,\ 2)$$

для $\delta = \delta_i$ будуть лежати на одній прямій, тобто діаграма Ньютона функції $f_i(z)$ $(i=1,\ 2)$ буде складатися з однієї прямої.

В роботі [3] показано, що якщо за допомогою параметрів встановлено, що ряд Лорана (1) (зокрема, степенний ряд або многочлен) не перетворюється в нуль у кільцях $r_{k_1} \leqslant |z| \leqslant R_{k_1}$, $r_{k_2} \leqslant |z| \leqslant R_{k_2}$, $(k_2 > k_1)$, то він має точно $h = k_2 - k_1$ нулів у кільці

$$R_{k_1} < |z| < r_{k_2}.$$

Враховуючи це і попередні теореми, бачимо справедливість такої теореми:

Теорема 3. Якщо ряд Лорана (1) (зокрема, степенний ряд або многочлен) не перетворюється в нуль у кільцях $p_{k_1} < |z| < P_{k_1}$, $p_{k_2} < |z| < P_{k_2}$ $(k_2 > k_1)$, які визначаються теоремою 2, то він має точно $h = k_2 - k_1$ нулів у кільці

$$P_{k_1} \leqslant |z| \leqslant p_{k_2}.$$

Зауваження. При $n = \infty$ лема 1 справедлива для функцій типу

$$\psi_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{x_\nu}{a_\nu}}, \quad \varphi_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{b_\nu}{x_\nu}}, \quad \overline{\lim} \sqrt[\nu]{a_\nu} < \infty, \quad \overline{\lim} \sqrt[\nu]{b_\nu} > 0,$$

де a_ν, $b_\nu > 0$; при $n_1 = n_2 = \infty$ лема 2 вірна для функцій типу

$$\varphi_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{c_\nu}{x_\nu}}, \quad \psi_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{x_\nu}{d_\nu}}, \quad \overline{\lim} \sqrt[\nu]{c_\nu} > 0, \quad \overline{\lim} \sqrt[\nu]{d_\nu} < \infty,$$

де c_ν, $d_\nu > 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. A. Ostrowski. Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des series Laurent. Acta Math., 72, 1940.
2. А. Н. Костовский. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во Львов. ун-та, 1967.
3. Г. Г. Цегелик. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. Изв. вузов, Математика, 12, 1967.