ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 517.946

Г. С. ГУПАЛО

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ НЕЙМАНА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 2-го ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Дана робота є узагальненням результатів [1—3], в якій розглядається узагальнена (в певному розумінні) задача Неймана для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу з безмежно диференційовними коефіцієнтами, подано розв'язок такої задачі, теорему єдиності.

1. Нехай маємо позначення, введені в попередній статті [4].

2. **Постановка задачі.** Нехай $B \in D'(S)$. Знайти розв'язок $u(x)$ рівняння $\mathfrak{M}u=0$ в обмеженій області $\Omega \subset E^n$, який на поверхні S задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\left(\alpha\frac{du}{d\nu}+\beta u\right)\varphi dS_\varepsilon=B[\varphi] \text{ для кожної } \varphi\in D(S), \qquad (1)$$

де α, $\beta \in D(S)$ і $\alpha \neq 0$ на поверхні S. Без порушення загальності можна припустити, що $\alpha=a=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}n_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, тоді (1) запишеться у вигляді

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}Pu\cdot\varphi dS_\varepsilon=B[\varphi] \text{ для кожної } \varphi\in D(S), \qquad (2)$$

де

$$P\equiv a\frac{du}{d\nu}+\beta u, \qquad (3)$$

β — довільна функція з $D(S)$.

Має місце

Лема 1. Якщо $\varphi(x)$ — основна функція на S, то

$$\chi(x)=\int\limits_S P_y G(y,x)\varphi(y)d_yS —$$

основна функція на S, де $G(x,y)$ — головний фундаментальний розв'язок [5] рівняння $\mathfrak{M}u=0$ в E^n і P означено формулою (3).

Доведення леми 1 аналогічно доведенню леми 1 в роботі [3].

Теорема 1. Якщо $B \in D'(S)$ і $C[g] = B[\varphi_g]$, де φ_g — розв'язок інтегрального рівняння

$$g(x) = -\varphi(x) + 2\int_S P_y G(y, x)\varphi(y)\, d_y S,$$

то функція $u(x) = 2C[G(x, y)]$ при $x \in \Omega$ є розв'язком узагальненої задачі Неймана для рівняння $\mathfrak{M}u = 0$.

Доведення. В силу означення похідної, лінійності і неперервності функціоналу C маємо $\mathfrak{M}u = 2C[\mathfrak{M}_x G(x, y)] = 0$, $x \in \Omega$. Тепер

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} Pu \cdot \varphi dS_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} P_{x_\varepsilon} C[G(x_\varepsilon, y)]\varphi(x_\varepsilon)\, d_{x_\varepsilon} S_\varepsilon =$$

в силу леми 5 з [6]

$$= 2C\left[\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} P_{x_\varepsilon} G(x_\varepsilon, y)\varphi(x_\varepsilon)\, d_{x_\varepsilon} S_\varepsilon\right] =$$

в силу формули стрибка з [5], леми 1 і умов теореми остаточно одержуємо

$$= C\left[-\varphi(y) + 2\int_S P_x G(x, y)\varphi(x)\, d_x S\right] = B[\varphi_g].$$

Має місце така теорема:

Теорема 2 (єдиності). Якщо $c \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, причому хоча б одна з функцій c і β не дорівнює тотожньо нулеві, а u_1 і u_2 є розв'язками сформульованої узагальненої задачі Неймана, то різниця $u_1 - u_2$ дорівнює нулю.

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 2 з попередньої статті [4], тому ми його не проводимо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Z. Szmydt. Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzatto. Atti Accad. Nar. Lincei, **32**, 867 (1962).
2. Z. Szmydt. Sur un probleme de Neumann generalise. Ann. Polon. Math. XV, **3**, 309 (1964).
3. Г. С. Гупало. Про узагальнену задачу Неймана. Доп. АН УРСР, 199 (1967).
4. Г. С. Гупало. Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу. Даний збірник.
5. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Изд-во иностр. л-ры, 1957.
6. Г. С. Гупало. Про узагальнену задачу Діріхле. Доп. АН УРСР, **843** (1966).