ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 517.946

Г. С. ГУПАЛО

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 2-ГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Дана замітка є узагальненням результатів [1—3], в якій ми розглядаємо узагальнену (в певному розумінні) задачу Діріхле для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу з безмежно диференційовними коефіцієнтами, подаємо розв'язок такої задачі, доводимо теорему єдиності і необхідну і достатню умову того, що розв'язок набирає узагальнених граничних значень.

1. Нехай Ω — обмежена область n-вимірного евклідового простору E^n точок $x=(x_1, \ldots, x_n)$, S — її $n-1$-вимірна гладка границя. В $\Omega \cup S$ розглядається еліптичний диференціальний оператор 2-го порядку з безмежно диференційовними коефіцієнтами

$$\mathfrak{M}u = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

крім того, вважається, що $c(x) \leqslant 0$, $a_{ik} = a_{ki}$ в області Ω.

Через n_y позначимо внутрішню нормаль до поверхні S в точці y, через $\nu(y)$ — її орт, S_ε $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ — поверхня в Ω, паралельна до поверхні S. Через $D(S)$ позначимо простір безмежно диференційовних функцій на поверхні S (простір основних функцій), $D'(S)$ — простір лінійних неперервних функціоналів над $D(S)$ (простір узагальнених функцій). Нехай $F \in D'(S)$, говоритимемо, що функція $u(x)$, визначена в області Ω, набуває на S узагальнених граничних значень F, коли

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon) \varphi(x_\varepsilon) d_{x_\varepsilon} S = F[\varphi] \text{ для кожної } \varphi \in D(S), \tag{1}$$

причому $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y)$, $x_\varepsilon = y + \varepsilon\nu(y)$, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$, $y \in S$.

2. Постановка задачі. Знайти розв'язок $u(x)$ рівняння $\mathfrak{M}u = 0$ в обмеженій області $\Omega \subset E^n$, який на поверхні S набуває узагальнених граничних значень F.

Лема 1. Якщо $\varphi(x)$ — основна функція на S, то

$$\psi(x) = \int_S Q_x G(y, x) \varphi(y) d_y S, \qquad x \in S$$

— основна функція на S, де $G(x, y)$ — головний фундаментальний розв'язок [4] рівняння $\mathfrak{M}u=0$ в E^n, $Q=a\frac{d}{d\nu}+(\beta-b)$, $a=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\times\times n_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $\frac{d}{d\nu}$ — диференціювання по конормалі, n_k — напрямні косинуси нормалі, $b=\sum_{i=1}^{n} e_i n_i$, $e_i=b_i-\sum_{k=1}^{n}\frac{da_{ik}}{dx_k}$, β — довільна функція з $D(S)$.

Лема 1 доводиться аналогічно, як лема 4 з статті [3].

Теорема 1. Якщо $F\in D'(S)$ і $A[g]=F[\varphi_g]$, де φ_g — розв'язок інтегрального рівняння

$$g(x)=\varphi(x)+2\int_S Q_x G(y, x)\varphi(y)\,d_yS, \qquad x\in S$$

то функція $u(x)=2A[Q_yG(x, y)]$ при $x\in\Omega$ є розв'язком узагальненої задачі Діріхле для рівняння $\mathfrak{M}u=0$.

Доведення. Використовуючи означення похідної, в силу лінійності і неперервності функціоналу A матимемо, що $\mathfrak{M}u=2A[Q_y\mathfrak{M}_xG(x, y)]=0$, при $x\in\Omega$. Покажемо, що функція $u(x)$ набирає заданих узагальнених граничних значень F

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} 2A[Q_yG(x_\varepsilon, y)]\varphi(x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon=$$

в силу леми 5 з [3]

$$=2A\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} Q_yG(x_\varepsilon, y)\varphi(x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon\right]=$$

в силу формул стрибка з [4], леми 1 і умов теореми остаточно одержуємо

$$=A\left[\varphi(y)+2\int_S Q_yG(x, y)\varphi(x)\,d_xS\right]=F[\varphi_g].$$

Теорема 2. Якщо u_1 і u_2 є розв'язками сформульованої узагальненої задачі Діріхле, то різниця u_1-u_2 дорівнює нулю.

Доведення. Різницю u_1-u_2 позначимо через u, тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon=0 \text{ для кожної } \varphi\in D(S).$$

Перейшовши до інтегрування по поверхні S, матимемо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_S u_\varepsilon(y)\varphi(y)\,d_yS=0 \text{ для кожної } \varphi\in D(S), \tag{2}$$

де $u_\varepsilon(y)=u(y+\varepsilon\nu(y))\,W_\varepsilon(y)$, $W_\varepsilon(y)$ — якобіан перетворення.

Функцію u, яка задовольняє рівняння $\mathfrak{M}u=0$ в області Ω, можна подати у вигляді

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}2\int_{S_\varepsilon}\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)\,Q_{x_\varepsilon}G(z, x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon, \tag{3}$$

де $\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)$ — розв'язок відповідного інтегрального рівняння.

Підставивши $\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)$ в (2), використавши позначення $u_\varepsilon(y)$, матимемо

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_S u_\varepsilon(y)\,\varphi_\varepsilon(z,\ y)\,d_yS, \tag{2}$$

де

$$\varphi_\varepsilon(z,\ y)=Q_yG(z,\ y+\varepsilon\nu(y))-\int_{S_\varepsilon}\Gamma(x,\ y+\varepsilon\nu(y))\,Q_{x_\varepsilon}G(z,\ x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon$$

і

$$\varphi_\varepsilon(z,\ y)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}\varphi(z,\ y)\in D(S),\quad z\in\Omega,\quad y\in S.$$

В силу леми з [5] і рівностей (2) і (4) одержуємо, що $u(z)=0$. Оскільки z — яка-небудь точка області Ω, то $u(z)\equiv 0$, тобто $u_1-u_2=0$ в області Ω.

Теорема 3. Для того щоб розв'язок рівняння $\mathfrak{M}u=0$ набирав узагальнених граничних значень, необхідно і достатньо, щоб знайшлося таке число $k\geqslant 0$, щоб $\int_\Omega r^k(x)\,|u(x)|\,dx<+\infty$, де $r(x)$ — віддаль від точки x до границі S області Ω.

Теорема 3 доводиться аналогічно, як теорема 3 в роботі [3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Z. Szmydt. Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzatto. Atti Accad. Naz. Lincei, **32**, 867 (1962).
2. Z. Szmydt. L'unicite des solutions d'un probleme de Dirichlet generalise. Atti Accad. Naz. Lincei, **33**, 6 (1962—1963).
3. Г. С. Гупало. Про узагальнену задачу Діріхле. Доповіді АН УРСР, **843** (1966).
4. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Изд-во иностр. л-ры, 1957.
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Пространства основных и обобщенных функций. М., 1958.