ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 517.55

А. І. КАРДАШ, І. І. ЧУЛИК

ПРО ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ ТА ЙОГО МАЖОРАНТИ НЬЮТОНА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

1. Розглянемо функцію

$$f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} a_{kl} z^k w^l, \tag{1}$$

степеневий ряд якої абсолютно збігається в обмеженій повній бікруговій області D.

Нехай E_f — множина пар (k, l) цілих невід'ємних індексів коефіцієнтів $a_{kl} \neq 0$. В системі координат $\mu\nu\lambda$ кожній точці $(k, l) \in E_f$ зіставимо точку зображення $P_{kl}\,(k, l, -\ln|a_{kl}|)$. Множину всіх точок зображення позначимо Φ_0, а множину точок відрізків, що сполучають кожну пару точок множини Φ_0, через Φ_1. Сполучимо відрізками кожну пару точок множини Φ_1, одержимо множину Φ_2. Нарешті, з'єднуючи відрізками кожну пару точок множини Φ_2 і беручи її замикання, одержимо множину $\overline{\Phi}_f$ з точками $B(\alpha, \beta, \gamma)$ в системі координат $\mu\nu\lambda$. Опукла множина $\overline{Q}_f$ є проекцією множини $\overline{\Phi}_f$ на площину $\mu\nu$. Для кожної фіксованої точки $(\alpha, \beta) \in \overline{Q}_f$ визначимо точку $B_{\alpha\beta}(\alpha, \beta, \varkappa_{\alpha\beta})$, де $\varkappa_{\alpha\beta} = \inf\limits_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \overline{\Phi}_f} \gamma$. Множині всіх точок $(\alpha, \beta) \in \overline{Q}_f$ відповідає множина $\mathfrak{D}_f$ точок $B_{\alpha\beta}$, яку назвемо діаграмою Ньютона [1] функції (1).

Теорема 1. Діаграма $\mathfrak{D}_f$ є відкритою опуклою вниз поверхнею.

Візьмемо дві довільні точки $B_1, B_2 \in \overline{\Phi}_f$. Можливі два випадки:

а) відрізок $\overline{B_1B_2} \in \overline{\Phi}_f$ і $\overline{\Phi}_f$ — опукла множина;

б) знайдеться принаймні одна точка $B(\alpha, \beta, \gamma)$ відрізка $\overline{B_1B_2}$ така, що $B \overline{\in} \overline{\Phi}_f$. Це означає, що

$$\gamma < \varkappa_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

де $\varkappa_{\alpha\beta}$ за означенням — апліката точки, що лежить на границі множини $\overline{\Phi}_f$, тобто на діаграмі $\mathfrak{D}_f$. Однак нерівність (2) суперечить означенню величини $\varkappa_{\alpha\beta}$. Отже, другий випадок неможливий, і $\overline{\Phi}_f$ — опукла вниз множина, звідки й випливає теорема 1.

Функцію

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} T_{kl} z^k w^l, \tag{3}$$

де

$$T_{kl}=\exp(-\varkappa_{kl}),\quad (k, l)\in \overline{Q}_f \tag{4}$$

назвемо мажорантою Ньютона [1] функції $f(z, w)$.

Із означення $\varkappa_{\alpha\beta}$ випливає, що $\varkappa_{kl}\leqslant -\ln|a_{kl}|$, тому має місце нерівність

$$|a_{kl}|\leqslant T_{kl},\qquad (k,\ l)\in \overline{Q}_f. \tag{5}$$

Коефіцієнти T_{kl} мажоранти $\mathfrak{M}_f(z, w)$ можна виразити безпосередньо через модулі коефіцієнтів ряду (1).

Розглянемо трикутник Δ_P, утворений точками зображення $P_{k_1l_1}$, $P_{k_2l_2}$, $P_{k_3l_3}$, проекція якого на площину $\mu\nu$ дасть трикутник Δ з вершинами в точках $(k_1,\ l_1)$, $(k_2,\ l_2)$, $(k_3,\ l_3)$. Для того, щоб точка $(k,\ l)\in \in\Delta$ $(\Delta\in\overline{Q}_f)$, необхідно й достатньо, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned} H_1&=h_{23}(k,\ l)\cdot h_{23}(k_1,\ l_1)\geqslant 0;\\ H_2&=h_{31}(k,\ l)\cdot h_{31}(k_2,\ l_2)\geqslant 0;\\ H_3&=h_{12}(k,\ l)\cdot h_{12}(k_3,\ l_3)\geqslant 0, \end{aligned} \tag{6}$$

де $h_{12}(k,\ l)=(k-k_1)\ (l_2-l_1)-(k_2-k_1)\ (l-l_1)$, а h_{23} і h_{31} одержуються циклічною перестановкою індексів [1].

Нехай трикутник Δ не вироджується в пряму, тобто серед нерівностей (6) є хоча б одна строга нерівність. Із рівняння площини, яка проходить через точки $P_{k_1l_1}$, $P_{k_2l_2}$, $P_{k_3l_3}$, визначимо аплікату λ_{kl} точки $(k,\ l,\ \lambda_{kl})\in\Delta_P$:

$$\lambda_{kl}=-\frac{1}{h_{12}(k_3,\ l_3)}\ln\left[\,|a_{k_1l_1}|^{h_{23}(k,\,l)}\cdot|a_{k_2l_2}|^{h_{31}(k,\,l)}\cdot|a_{k_3l_3}|^{h_{12}(k,\,l)}\right].$$

Тоді з побудови діаграми $\mathfrak{D}_f$ випливає формула

$$T_{kl}=\sup_{H_1,\,H_2,\,H_3\geqslant 0}\left[\,|a_{k_1l_1}|^{h_{23}(k,\,l)}\cdot|a_{k_2l_2}|^{h_{31}(k,\,l)}\cdot|a_{k_3l_3}|^{h_{12}(k,\,l)}\right]^{\frac{1}{h_{12}(k_3,l_3)}}. \tag{7}$$

2. Введемо допоміжну функцію

$$g(z,\ w)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\Bigl(\sum_{n=k+l}z^kw^l\Bigr), \tag{8}$$

де

$$b_n=\max_{n=k+l}|a_{kl}|,\qquad (k,\ l=0,\ 1,\ 2,\ldots). \tag{9}$$

В силу (9) всі точки зображення $\widetilde{P}_{kl}\ (k,\ l,\ -\ln b_n)$ функції $g(z,\ w)$ для фіксованого $n=k+l$ лежать на відрізку $\Gamma_n=\widetilde{P}_{n0}\widetilde{P}_{0n}$, де $\widetilde{P}_{n0}$ і $\widetilde{P}_{0n}$ — точки зображення коефіцієнтів b_n функцій $\varphi(z)\equiv g(z,0)$ та $\varphi(w)\equiv \equiv g(0,w)$ відповідно.

Нехай $\{n_i\}$ — послідовність вершинних індексів плоскої діаграми $\mathfrak{D}_\varphi$ [2]. Тоді $\{(n_i,0)\}$ та $\{(0,\ n_i)\}$ є послідовностями вершинних індексів діаграми $\mathfrak{D}_g$. Ребрами $\mathfrak{D}_g$ є відрізки Γ_{n_i}, а також ребра діаграм $\mathfrak{D}_\varphi$ в площинах $\mu\lambda$ та $\nu\lambda$. Таким чином, гранями діаграми $\mathfrak{D}_g$ є рівнобічні трапеції з основами Γ_{n_i} та $\Gamma_{n_{i+1}}$ за винятком хіба що грані, на якій лежить точка $\widetilde{P}_{00}$. В кожній грані $\mathfrak{D}_g$ лежить принаймні одне ребро діаграми $\mathfrak{D}_\varphi$. Для всіх $n=k+l$ кожній точці $(k,\ l)\in\overline{Q}_g=\overset{np}{\mu\nu}\mathfrak{D}_g\supseteq\overline{Q}_f$ відповідає точка $\widetilde{B}_{kl}\ (k,\ l,\ \widetilde{\varkappa}_n)\in\mathfrak{D}_g$.

Нехай $t_n = \exp(-\varkappa_n)$, тоді функція

$$\mathfrak{M}_g(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \left(\sum_{n=k+l} z^k w^l \right) \quad (k, l) \in \overline{Q}_g \tag{10}$$

є мажорантою Ньютона функції (8), причому $b_n \leqslant t_n$. Зокрема, $\mathfrak{M}_\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ є мажорантою Ньютона функції $\varphi(z)$.

Лема. Для всіх $n = k + l$, $(k, l) \in \overline{Q}_f$ має місце нерівність

$$|a_{kl}| \leqslant T_{kl} \leqslant t_n. \tag{11}$$

Нехай пряма L, що проходить через довільну точку $(k, l) \in \overline{Q}_f$, перпендикулярна до площини $\mu\nu$ і перетинає діаграми $\mathfrak{D}_f$ та $\mathfrak{D}_g$ в точках B_{kl} та $\widetilde{B}_{kl}$ відповідно. Припустимо, що точка $P_{kl} \in \mathfrak{D}_f$ лежить на L нижче точки $\widetilde{B}_{kl}$. Тоді

$$\varkappa_{kl} = -\ln|a_{kl}| < \widetilde{\varkappa}_n = -\ln t_n \leqslant -\ln b_n, \quad n = k + l.$$

Звідси $|a_{kl}| > b_n$, що неможливе. Отже, $\varkappa_{kl} \geqslant \widetilde{\varkappa}_n$, тобто $T_{kl} \leqslant t_n$ для довільної точки $P_{kl} \in \mathfrak{D}_f$, а в силу опуклості фігур $\mathfrak{D}_f$ та $\mathfrak{D}_g$ ця нерівність справедлива й для довільної точки $P_{kl} \overline{\in} \mathfrak{D}_f$. Із врахуванням (5) лема доведена.

3. Розглянемо випадок, коли степеневий ряд (1) абсолютно збігається в біциліндрі

$$\{|z| < 1, |w| < 1\}. \tag{12}$$

Оскільки

$$\overline{\lim_{k+l \to \infty}} \sqrt[k+l]{|a_{kl}|} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{b_n} \leqslant 1, \qquad (n = k + l), \tag{13}$$

то степеневий ряд допоміжної функції $g(z, w)$ також збігається в біциліндрі (12).

Функція $\varphi(z)$ (чи $\varphi(w)$) збігається в одиничному крузі, а за теоремою О. Островського [3] там же збігається її мажоранта Ньютона $\mathfrak{M}_\varphi(z)$, отже,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{t_n} \leqslant 1. \tag{14}$$

На підставі леми та (13), (14) одержимо

$$\overline{\lim_{k+l \to \infty}} \sqrt[k+l]{T_{kl}} \leqslant 1,$$

тобто мажоранта Ньютона $\mathfrak{M}_f(z, w)$ збігається в одиничному біциліндрі.

4. Нехай степеневий ряд (1) абсолютно збігається в біциліндрі

$$\{|z| < R_1, |w| < R_2\}. \tag{15}$$

За теоремою Айзенберга—Мітягіна [4] ряд

$$\widetilde{f}(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} \widetilde{a}_{kl} z^k w^l, \tag{16}$$

де

$$\widetilde{a}_{kl} = a_{kl} R_1^k R_2^l$$

збігається в одиничному біциліндрі. За доведеним в п. 3, мажоранта Ньютона ряду (16)

$$\mathfrak{M}_{\tilde{f}}(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} \tilde{T}_{kl} z^k w^l \tag{17}$$

також збігається в біциліндрі (12).

На підставі (7) коефіцієнт $\tilde{T}_{kl}$ ряду (17) виражається через коефіцієнт T_{kl} мажоранти (3) так:

$$\tilde{T}_{kl} = T_{kl} R_1^k R_2^l.$$

Отже, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} T_{kl} R_1^k R_2^l z^k w^l$$

збігається в одиничному біциліндрі; тоді мажоранта Ньютона

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} T_{kl} z^k w^l$$

ряду (1) збігається [4] в біциліндрі (15).

Таким чином, доведена

Теорема 2. Якщо степеневий ряд

$$f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} a_{kl} z^k w^l$$

абсолютно збігається в біциліндрі

$$\{|z| < R_1, \ |w| < R_2\},$$

то і його мажоранта Ньютона

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} T_{kl} z^k w^l$$

збігається в цьому ж біциліндрі.

Неважко бачити, що доведена теорема 2 має місце й для довільної обмеженої повної бікругової області D.

Одержані результати справджуються й для функцій n комплексних змінних; випадок $n=2$ розглянуто нами для спрощення викладу.

На закінчення висловлюємо подяку О. М. Костовському за постановку задачі та керівництво.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. І. Кардаш, О. М. Костовський, І. І. Чулик. Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. вип. 3, 1967.

2. А. Костовский. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во Львов. ун-та, 1967.

3. A. Ostrowski. Recherches sur la Méthode dé Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent. Acta Math., 72 (1940).

4. Л. А. Айзенберг и Б. С. Митягин. Пространства функций, аналитических в кратно-круговых областях. Сиб. мат. ж. 1 № 2 (1960).