ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

МЕХАНІКА

УДК 539.311

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, Р. М. ЛУЦИШИН

ПРУЖНА РІВНОВАГА АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ВПАЯНОЮ ІЗОТРОПНОЮ ШАЙБОЮ ПРИ НАЯВНОСТІ РОЗРІЗУ НА СПАЇ

В класі задач про пружну рівновагу кусочно-неоднорідних тіл значний технічний інтерес викликає задача про визначення напруженого стану анізотропної пластинки з пружним ядром. Задачі такого роду описані в працях С. Г. Лехніцького [1], Г. М. Савіна і Д. В. Грилїцького [2]. В даній роботі розглядається пружна рівновага безмежної анізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою під дією навантаження на безмежності, при умові, що лінія спаю ослаблена одним розрізом. Припускається, що краї розрізу не завантажені і в процесі деформації не контактують.

При розв'язуванні задачі початок координат помістимо в центрі шайби, радіус якої приймемо рівним одиниці. Лінію розрізу позначимо через a_1b_1, тоді лінією спаю буде дуга b_1a_1.

1. Відділивши умовно шайбу від пластинки, можемо розглянути її пружну рівновагу під дією невідомих контактних напружень $\sigma_r(t)$, $\tau_{r\varphi}(t)$ на b_1a_1. На основі відомих формул М. І. Мусхелішвілі [3] легко отримати таку граничну умову для функції напруження в шайбі $\Phi_1(z)$:

$$it\,[\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)]=\begin{cases}0 & \text{на } a_1\,b_1,\\ f(t) & \text{на } b_1\,a_1,\end{cases}\tag{1.1}$$

де

$$f(t)=it\,[\sigma_r(t)+i\tau_{r\varphi}(t)].\tag{1.2}$$

Розв'язок задачі (1.1) має вигляд

$$iz\,\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_1}^{a_1}\frac{f(t)\,dt}{t-z}-iz\,\overline{A}_0,\tag{1.3}$$

де

$$A_0=\Phi_1(0).\tag{1.4}$$

Аналогічно можна розглянути пружну рівновагу анізотропної пластинки, з якої виділена шайба. Граничні умови цього випадку, що даються в монографії Г. М. Савіна [4] для функцій напруження $\varphi(z_1)$ і $\psi(z_2)$, можна привести до такого вигляду:

$$\begin{gathered}it\,[(1+is_1)\,\Phi_2'(t)+(1+is_2)\,\Psi_2'(t)]+\\+\frac{1}{it}[(1+i\overline{s}_1)\,\overline{\Phi_2'(t)}+(1+i\overline{s}_2)\,\overline{\Psi_2'(t)}]=\begin{cases}0 & \text{на } a_1\,b_1,\\ f(t) & \text{на } b_1\,a_1,\end{cases}\\ it\,[(1-is_1)\,\Phi_2'(t)+(1-is_2)\,\Psi_2'(t)]+\\+\frac{1}{it}[(1-i\overline{s}_1)\,\overline{\Phi_2'(t)}+(1-i\overline{s}_2)\,\overline{\Psi_2'(t)}]=\begin{cases}0 & \text{на } a_1\,b_1,\\ f(t) & \text{на } b_1\,a_1,\end{cases}\end{gathered}\tag{1.5}$$

де

$$\Phi_2(\zeta)=\varphi[z_1(\zeta)];\quad \Psi_2(\zeta)=\psi[z_2(\zeta)],$$

причому мають місце розклади

$$\Phi_2'(\zeta)=a_0+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{\zeta^k};\quad \Psi_2'(\zeta)=b_0+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{b_k}{\zeta^k};\tag{1.6}$$

$$a_0=\frac{1}{2}(1-is_1)B^*;\quad b_0=\frac{1}{2}(1-is_2)(B'+iC').\tag{1.7}$$

B^*, B', C' — постійні, що залежать від напруженого стану на безмежності; s_1, s_2 — параметри, що характеризують анізотропію матеріалу пластинки.

Розв'язок граничної задачі (1.5) визначається формулами

$$\begin{aligned} i\zeta\Phi_2'(\zeta)&=\frac{1}{4\pi i}\int_{b_1}^{a_1}\frac{\nu_2(t)\,dt}{t-\zeta}+ia_0\zeta-\frac{h_2}{\zeta};\\ i\zeta\Psi_2'(\zeta)&=-\frac{1}{4\pi i}\int_{b_1}^{a_1}\frac{\nu_1(t)\,dt}{t-\zeta}+ib_0\zeta+\frac{h_1}{\zeta}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Тут позначено

$$\nu_1(t)=\frac{(s_1+i)f(t)+(s_1-i)\overline{f(t)}}{s_1-s_2};\quad \nu_2(t)=\frac{(s_2+i)f(t)+(s_2-i)\overline{f(t)}}{s_1-s_2};\tag{1.9}$$

$$h_1=\frac{i\left[(s_1-\bar s_1)\bar a_0+(s_1-\bar s_2)\bar b_0\right]}{s_1-s_2};\quad h_2=\frac{i\left[(s_2-\bar s_1)\bar a_0+(s_2-\bar s_2)\bar b_0\right]}{s_1-s_2}.$$

2. Якщо за відомими формулами виразити похідні по полярній координаті φ від компонент зміщення для шайби $\left(\frac{du_1}{d\varphi},\frac{dv_1}{d\varphi}\right)$ і пластинки $\left(\frac{du_2}{d\varphi},\frac{dv_2}{d\varphi}\right)$ через знайдені в (1.3) і (1.8) функції напружень, то умови рівності їх на лінії спаю приводять до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно $f(t)$ і $\overline{f(t)}$:

$$\begin{aligned}&\frac{b}{\pi i}\int_{b_1}^{a_1}\frac{f(t)\,dt}{t-\sigma}-\frac{\bar b}{\pi i}\int_{b_1}^{a_1}\frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-\sigma}-af(\sigma)-\bar a\overline{f(\sigma)}+G_1(\sigma)=0;\\ &\frac{d}{\pi i}\int_{b_1}^{a_1}\frac{f(t)\,dt}{t-\sigma}+\frac{\bar d}{\pi i}\int_{b_1}^{a_1}\frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-\sigma}-cf(\sigma)+\bar c\overline{f(\sigma)}+G_2(\sigma)=0.\quad \sigma\in b_1/a_1\end{aligned}\tag{2.1}$$

Тут використані такі позначення:

$$a=\alpha_2+\frac{\varkappa-1}{2\mu};\quad b=\alpha_1-\frac{\varkappa+1}{2\mu};\quad c=\delta_2+\frac{\varkappa-1}{2\mu};\quad d=\delta_1-\frac{\varkappa+1}{2\mu};\tag{2.2}$$

$$\alpha_1=k_1-k_2;\quad \alpha_2=k_1+k_2;\quad \delta_1=l_1-l_2;\quad \delta_2=l_1+l_2.$$

$$k_1=\frac{p_1(s_2+i)-p_2(s_1+i)}{s_1-s_2};\quad k_2=\frac{\bar p_1(\bar s_2+i)-\bar p_2(\bar s_1+i)}{\bar s_1-\bar s_2};\tag{2.3}$$

$$l_1 = i\frac{q_1(s_2+i) - q_2(s_1+i)}{s_1 - s_2}; \quad l_2 = i\frac{\bar{q}_1(\bar{s}_2+i) - \bar{q}_2(\bar{s}_1+i)}{\bar{s}_1 - \bar{s}_2};$$

$$G_1(\sigma) = 4\left[M_1\sigma + \bar{M}_1\sigma^{-1} - \frac{i(\varkappa+1)}{4\mu}(A_0\sigma^{-1} - \bar{A}_0\sigma)\right];$$

$$G_2(\sigma) = 4\left[-M_2\sigma + \bar{M}_2\sigma^{-1} + \frac{i(\varkappa+1)}{4\mu}(A_0\sigma^{-1} + \bar{A}_0\sigma)\right]; \qquad (2.4)$$

$$M_1 = i\left[p_1 a_0 + p_2 b_0 - \bar{p}_1\frac{(s_1-\bar{s}_2)a_0 + (s_2-\bar{s}_2)b_0}{(\bar{s}_1-\bar{s}_2)} + \right.$$

$$\left. + \bar{p}_2\frac{(s_1-\bar{s}_1)a_0 + (s_2-\bar{s}_1)b_0}{(\bar{s}_1-\bar{s}_2)}\right]; \qquad (2.5)$$

$$M_2 = \left[q_1 a_0 + q_2 b_0 - \bar{q}_1\frac{(s_1-\bar{s}_2)a_0 + (s_2-\bar{s}_2)b_0}{(\bar{s}_1-\bar{s}_2)} + \right.$$

$$\left. + \bar{q}_2\frac{(s_1-\bar{s}_1)a_0 + (s_2-\bar{s}_1)b_0}{(\bar{s}_1-\bar{s}_2)}\right];$$

p_1, p_2, q_1, q_2 — постійні, що характеризують анізотропію матеріалу пластинки.

Наслідуючи Д. І. Шермана [5] і Л. А. Галіна [6], можемо замінити систему (2.1) такими двома рівняннями:

$$\frac{R_k}{\pi i}\int_{b_1}^{a_1}\frac{f(t)+\lambda_k\overline{f(t)}}{t-\sigma}dt - Q_k[f(\sigma)+\lambda_k\overline{f(\sigma)}] + G_1(\sigma) + \gamma_k G_2(\sigma) = 0, \quad (k=1,2) \qquad (2.6)$$

де

$$R_k = b + \gamma_k d; \quad Q_k = a + \gamma_k c.$$

Постійні λ_k і γ_k зв'язані умовою

$$-\frac{b+\gamma_k d}{\bar{b}-\gamma_k\bar{d}} = \frac{a+\gamma_k c}{\bar{a}-\gamma_k\bar{c}} = \frac{1}{\lambda_k}. \quad (k=1,2) \qquad (2.7)$$

Ввівши дві функції

$$W_k(z) = \frac{R_k}{2\pi i}\int_{b_1}^{a_1}\frac{f(t)+\lambda_k\overline{f(t)}}{t-z}dt + \frac{1}{2}[G_1(z)+\gamma_k G_2(z)], \quad (k=1,2) \qquad (2.8)$$

можемо звести рішення рівнянь (2.6) до таких двох задач лінійного спряження:

$$W_k^+(\sigma) + g_k W_k^-(\sigma) = 0; \quad \sigma \in b_1 a_1, \quad (k=1,2) \qquad (2.9)$$

де

$$g_k = \frac{R_k+Q_k}{R_k-Q_k}. \quad (k=1,2) \qquad (2.10)$$

Розв'язок задачі (2.9) має вигляд

$$W_k(z) = X_0^{(k)}(z)[C_0^{(k)}z^2 + C_1^{(k)}z + C_2^{(k)} + D_k z^{-1}]. \quad (k=1,2) \qquad (2.11)$$

Тут $C_0^{(k)}$, $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$, D_k — шукані коефіцієнти,

$$X_0^{(k)}(z) = (z-b_1)^{-\frac{1}{2}+i\beta_k}(z-a_1)^{-\frac{1}{2}-i\beta_k}; \tag{2.12}$$

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi}\ln|g_k|, \quad (k=1,2)$$

причому мають місце зображення

$$X_0^{(k)}(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \frac{1}{z} + \frac{\alpha_{-2}^{(k)}}{z^2} + \ldots;$$

$$X_0^{(k)}(z) \xrightarrow[|z|\to 0]{} X_0^{(k)}(0)\,(1+\alpha_1^{(k)}z+\ldots). \quad (k=1,2) \tag{2.13}$$

Порівнюючи (2.8) і (2.11), знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_1}^{a_1}\frac{f(t)+\lambda_k\overline{f(t)}}{t-z}\,dt = \Big\{X_0^{(k)}(z)\,[C_0^{(k)}z^2+C_1^{(k)}z+C_2^{(k)}+D_kz^{-1}] -$$

$$-\frac{1}{2}[G_1(z)+\gamma_kG_2(z)]\Big\}R_k^{-1}, \quad (k=1,2) \tag{2.14}$$

Із (2.14) випливає

$$f(\sigma) = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\sum_{k=1}^{2}\lambda_{k+1}\frac{g_k+1}{R_kg_k}X_0^{+(k)}(\sigma)\,[C_0^{(k)}\sigma^2+C_1^{(k)}\sigma+C_2^{(k)}+D_k\sigma^{-1}]. \quad \sigma\in b_1a_1. \tag{2.15}$$

Тут і надалі

$$\lambda_3=\lambda_1.$$

Формула (2.15) разом із (1.2) служить для визначення контактних напружень на лінії спаю.

3. На основі співвідношень (2.14) легко визначаються функції напружень у шайбі і в пластинці.

а) Шайба

$$\Phi_1(z) = \frac{i}{(\lambda_1-\lambda_2)z}\sum_{k=1}^{2}\lambda_{k+1}R_k^{-1}\Big[X_0^{(k)}(z)\,(C_0^{(k)}z^2+C_1^{(k)}z+C_2^{(k)}+D_kz^{-1}) -$$

$$-\frac{1}{2}(G_1(z)+\gamma_kG_2(z))\Big]-\overline{A}_0. \tag{3.1}$$

б) Пластинка

$$\varphi'(z_1) = \Big\{\sum_{k=1}^{2}a_{k,2}R_{k+1}^{-1}\Big[X_0^{(k+1)}(\zeta)\,(C_0^{(k)}\zeta^2+C_1^{(k)}\zeta+C_2^{(k)}+D_k\zeta^{-1}) -$$

$$-\frac{1}{2}(G_1(\zeta)+\gamma_{k+1}G_2(\zeta))\Big]+2(ia_0-h_2\zeta^{-1})\Big\}\frac{1}{(s_1+i)\zeta+(s_1-i)\zeta^{-1}}. \tag{3.2}$$

Тут

$$\zeta = (z_1+\sqrt{z_1^2-1-s_1^2})\,(1-is_1)^{-1}; \tag{3.3}$$

$$a_{k,l} = (-1)^{k-1}\frac{\lambda_k(s_l+i)-(s_l-i)}{(\lambda_1-\lambda_2)(s_1-s_2)}; \quad a_{3,1}=-a_{1,1}, \quad (k;\ l=1,2) \tag{3.4}$$

$$X_0^{(3)}(\zeta)=X_0^{(1)}(\zeta); \quad \gamma_3=\gamma_1. \tag{3.5}$$

$$\psi'(z_2) = \left\{ \sum_{k=1}^{2} a_{(k+1),1} R_k^{-1} \left[X_0^{(k)}(\zeta) \left(C_0^{(k)}\zeta^2 + C_1^{(k)}\zeta + C_2^{(k)} + D_k\zeta^{-1} \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\left(G_1(\zeta) + \gamma_k G_2(\zeta)\right) \right] + 2\left(ib_0 + h_1\zeta^{-1}\right) \right\} \frac{1}{(s_2+i)\zeta + (s_2-i)\zeta^{-1}}. \qquad (3.6)$$

Тут

$$\zeta = \left(z_2 + \sqrt{z_2^2 - 1 - s_2^2}\right)(1 - is_2)^{-1}. \qquad (3.7)$$

4. Отриманий розв'язок містить дев'ять невідомих констант A_0, $C_0^{(k)}$, $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$, D_k $(k=1,2)$, для визначення яких маємо і дев'ять умов. На основі формул (1.3) і (1.4) отримуємо умову для знаходження

$$A_0 + \bar{A}_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{b_1}^{a_1} \frac{f(t)\,dt}{t^2}. \qquad (4.1)$$

Прирівнюючи головні частини полюсів функцій (2.8) і (2.11), приходимо до співвідношень

$$C_0^{(k)} = 2\left[M_1 - \gamma_k M_2 + (1+\gamma_k)\frac{i(\varkappa+1)}{4\mu}\bar{A}_0 \right];$$

$$C_0^{(k)}\alpha_{-2}^{(k)} + C_1^{(k)} = 0; \qquad (4.2)$$

$$D_k = \frac{2}{X_0^{(k)}(0)}\left[\bar{M}_1 + \gamma_k \bar{M}_2 - (1+\gamma_k)\frac{i(\varkappa+1)}{4\mu}A_0 \right]. \qquad (k=1,2)$$

Умова однозначності зміщень приводить до таких рівнянь:

$$\int_{a_1}^{b_1} X_0^{(k)}(t)\left[C_0^{(k)}t + C_1^{(k)} + C_2^{(k)}t^{-1} + D_k t^{-2}\right]dt = 0. \qquad (k=1,2) \qquad (4.3)$$

5. Розглянемо розтяг на безмежності ортотропної пластинки, спай якої з ізотропною шайбою ослаблений одним розрізом, симетрично розміщеним відносно одного з головних напрямів пружності пластинки. Для цього випадку $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$, а система рівнянь (4.1)—(4.3) спрощується і набуває вигляду

$$C_0^{(1)} = 2\left[E_1 + I_1 A_0\right]; \qquad C_0^{(2)} = 2\left[E_2 + I_2 A_0\right],$$

$$C_1^{(1)} = -\alpha_{-2}^{(1)} C_0^{(1)}; \qquad C_1^{(2)} = -\alpha_{-2}^{(2)} C_0^{(2)}; \qquad (5.1)$$

$$C_2^{(1)} = \frac{\alpha_1^{(1)}}{X_0^{(1)}(0)} C_0^{(2)}; \qquad C_2^{(2)} = \frac{\alpha_1^{(2)}}{X_0^{(2)}(0)} C_0^{(1)};$$

$$D_1 = -\frac{1}{X_0^{(1)}(0)} C_0^{(2)}; \qquad D_2 = -\frac{1}{X_0^{(2)}(0)} C_0^{(1)},$$

де позначено

$$E_1 = M_1 + \gamma M_2; \qquad E_2 = M_1 - \gamma M_2;$$

$$I_1 = \frac{i(\varkappa+1)}{4\mu}(1+\gamma); \qquad I_2 = \frac{i(\varkappa+1)}{4\mu}(1-\gamma); \qquad (5.2)$$

$$A_0 = \frac{\Omega_1}{1 - \Omega_2}; \qquad (5.3)$$

де

$$E_3=E_1,\ I_3=I_1;$$

$$\Omega_1=\frac{i}{\lambda_2-\lambda_1}\sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda_{k+1}}{R_k}\{E_k[1+X_0^{(k)}(0)\,\alpha_{-2}^{(k)}]+E_{k+1}[\alpha_2^{(k)}-(\alpha_1^{(k)})^2]\};$$

$$\Omega_2=\frac{i}{\lambda_2-\lambda_1}\sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda_{k+1}}{R_k}\{I_k[1+X_0^{(k)}(0)\,\alpha_{-2}^{(k)}]+I_{k+1}[\alpha_2^{(k)}-(\alpha_1^{(k)})^2]\}. \tag{5.4}$$

Постійні, що визначаються системою (5.1), набувають уявних значень, A_0 — дійсне число.

6. Компоненти контактного напруження визначаємо з умови (2.15)

$$\sigma_r(\varphi)=\sum_{k=1}^{2}(1+g_{k+1})L_k(\varphi);$$

$$\tau_{r\varphi}(\varphi)=\sum_{k=1}^{2}(1+g_{k+1})N_k(\varphi), \qquad g_3=g_1 \quad (\Theta<\varphi<2\pi-\Theta) \tag{6.1}$$

а 2Θ — центральний кут, що відповідає дузі розрізу. У формулах (6.1) введені позначення

$$L_k(\varphi)=\frac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_1-\lambda_2)R_k}\cdot\frac{e^{\beta_k(2\pi-\Theta)}}{2i\sqrt{\left|\sin\frac{\varphi-\Theta}{2}\right|\left|\sin\frac{\varphi+\Theta}{2}\right|}}\times$$

$$\times\left\{C_0^{(k)}\sin\left[\varepsilon_k(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right]+C_1^{(k)}\sin\left[\varepsilon_k(\varphi)-\frac{\varphi}{2}\right]+C_2^{(k)}\sin\left[\varepsilon_k(\varphi)-\frac{3\varphi}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+D_k\sin\left[\varepsilon_k(\varphi)-\frac{5\varphi}{2}\right]\right\}; \tag{6.2}$$

$$N_k(\varphi)=\frac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_2-\lambda_1)R_k}\cdot\frac{e^{\beta_k(2\pi-\Theta)}}{2i\sqrt{\left|\sin\frac{\varphi-\Theta}{2}\right|\left|\sin\frac{\varphi+\Theta}{2}\right|}}\times$$

$$\times\left\{C_0^{(k)}\cos\left[\varepsilon_k(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right]+C_1^{(k)}\cos\left[\varepsilon_k(\varphi)-\frac{\varphi}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+C_2^{(k)}\cos\left[\varepsilon_k(\varphi)-\frac{3\varphi}{2}\right]+D_k\cos\left[\varepsilon_k(\varphi)-\frac{5\varphi}{2}\right]\right\};$$

$$\varepsilon_k(\varphi)=\beta_k\ln\frac{\left|\sin\frac{\varphi-\Theta}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\varphi+\Theta}{2}\right|}.$$

Використовуючи вирази для функцій напруження (3.1), (3.2) і (3.6), легко отримати формули для кільцевих напружень у шайбі та пластинці як на лінії спаю, так і на розрізі.

I. Для шайби:

а) на лінії спаю

$$\sigma_\varphi^{(1)}=\sum_{k=1}^{2}\{(3-g_{k+1})L_k(\varphi)+4\Delta_k(\varphi)\}-4A_0;\quad (\Theta<\varphi<2\pi-\Theta), \tag{6.3}$$

б) на розрізі

$$\sigma_{\varphi}^{(1)}=4\left\{\sum_{k=1}^{2}\left[e^{-\pi\beta_k}N_k(\varphi)+\Delta_k(\varphi)\right]-A_0\right\}. \quad (-\Theta<\varphi<\Theta) \tag{6.4}$$

II. Для пластинки:
а) на лінії спаю

$$\sigma_{\varphi}^{(2)}=\sum_{m=1}^{2}\Gamma_m\left\{(\sin^2\varphi+\rho_m\cos^2\varphi)\left[F_m(\varphi)+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{2}T_{k+1,m}\left(\frac{L_k(\varphi)}{g_k}-\Delta_{k+1}(\varphi)\right)\right]-\frac{1-\rho_m}{2}\sin 2\varphi\times$$

$$\left.\times\left[H_m(\varphi)+\sum_{k=1}^{2}T_{k+1,m}\left(\frac{N_k(\varphi)}{g_k}-\omega_{k+1}(\varphi)\right)\right]\right\}-\sigma_r(\varphi); \tag{6.5}$$

$$(\Theta<\varphi<2\pi-\Theta)$$

б) на розрізі

$$\sigma_{\varphi}^{(2)}=\sum_{m=1}^{2}\Gamma_m\left\{(\sin^2\varphi+\rho_m\cos^2\varphi)\left[F_m(\varphi)+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{2}T_{k+1,m}\left(N_k(\varphi)e^{-\pi\beta_k}-\Delta_{k+1}(\varphi)\right)\right]-\frac{1-\rho_m}{2}\sin 2\varphi\times$$

$$\left.\times\left[H_m(\varphi)-\sum_{k=1}^{2}T_{k+1,m}\left(L_k(\varphi)e^{-\pi\beta_k}+\omega_{k+1}(\varphi)\right)\right]\right\}. \quad (-\Theta<\varphi<\Theta). \tag{6.6}$$

Тут введено позначення

$$\rho_m=-is_m; \tag{6.7}$$

$$\Gamma_m=\frac{1-\rho_m^2}{(\rho_2-\rho_1)\left[\sin^4\varphi+\rho_m^2\cos^4\varphi+(1+\rho_m^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right]};\ (m=1,2) \tag{6.8}$$

$$F_1(\varphi)=2\left\{a_0(\rho_2-\rho_1)+\left[(\rho_1+\rho_2)a_0+2\rho_2b_0\right]\cos 2\varphi\right\};$$

$$F_2(\varphi)=2\left\{b_0(\rho_1-\rho_2)+\left[2\rho_1a_0+(\rho_1+\rho_2)b_0\right]\cos 2\varphi\right\}; \tag{6.9}$$

$$H_1(\varphi)=2\left[(\rho_1+\rho_2)a_0+2\rho_2b_0\right]\sin 2\varphi;$$

$$H_2(\varphi)=2\left[2\rho_1a_0+(\rho_1+\rho_2)b_0\right]\sin 2\varphi;$$

$$T_{k,m}=1+\rho_k+\frac{1-\rho_k}{\lambda_m};$$

$$\Delta_k(\varphi)=\frac{\lambda_{k+1}R_k^{-1}}{i(\lambda_1-\lambda_2)}\left[C_0^{(k)}-C_0^{(k+1)}\cos 2\varphi\right]; \tag{6.10}$$

$$\omega_k(\varphi)=\frac{\lambda_{k+1}R_k^{-1}}{i(\lambda_2-\lambda_1)}C_0^{(k+1)}\sin 2\varphi,$$

причому

$$T_3=T_1;\quad \Delta_3(\varphi)=\Delta_1(\varphi);\quad C_0^{(3)}=C_0^{(1)};\quad \omega_3(\varphi)=\omega_1(\varphi).$$

7. За отриманими формулами було проведено підрахунок контактних і кільцевих напружень для випадку одноосного та двоосного розтягу зусиллями інтенсивності p текстолітової пластинки [7] (текстоліт СВАМ зі зв'язуючим БФ-4, $E_{11}=4{,}33 \cdot 10^5 \frac{кг}{см^2}$; $\nu_{11}=0{,}261$; $E_{22}=0{,}904 \times \times 10^5 \frac{кг}{см^2}$; $\nu_{22}=0{,}051$; $G=0{,}344 \cdot 10^5 \frac{кг}{см^2}$; $\rho_1=3{,}4433$; $\rho_2=0{,}6356$) з абсолют-

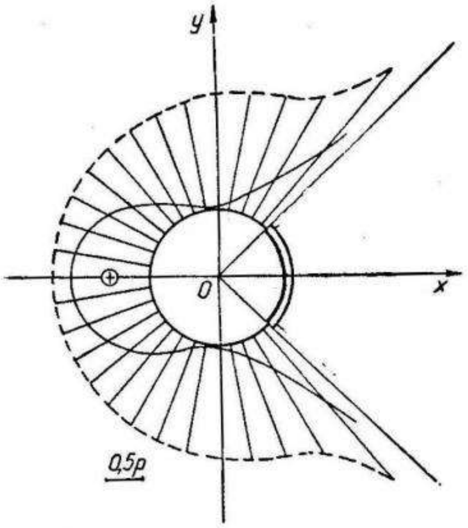

Рис. 1.

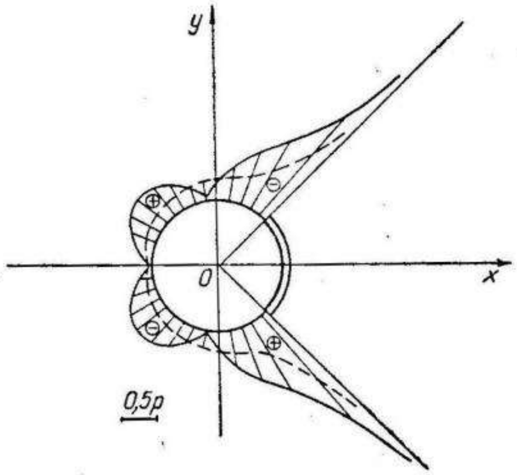

Рис. 2.

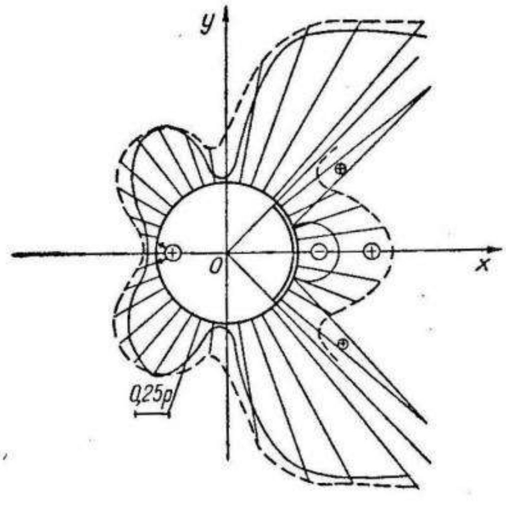

Рис. 3.

но жорсткою шайбою. Осі координат направлені по головних осях пружності матеріалу пластинки. Розріз розміром в чверть кола розміщений симетрично відносно осі OX ($\Theta=45°$).

Одержані результати підрахунку приводяться на графіках. На рис. 1 зображено нормальні контактні напруження σ_r, на рис. 2 — дотичні контактні напруження $\tau_{r\varphi}$, на рис. 3 — кільцеві напруження для пластинки $\sigma_\varphi^{(2)}$.

Суцільна лінія відповідає одноосному розтягу, штрихова — двоосному.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
2. Г. Н. Савин, Д. В. Грилицкий. Об определении напряженного состояния в анизотропной пластинке с упругим ядром. Прикладная механика, т. 1, вып. 1, 1965.
3. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
4. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
5. Д. И. Шерман. О приемах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений, ПММ, т. XII, вып. 4, 1948.
6. Л. А. Галин. Контактные задачи теории упругости. Изд-во АН СССР, 1953.
7. А. Л. Рабинович, И. А. Верховский. Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков. Инж. журн., т. IV, вып. 1, 1964.