ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 539.311

Р. М. ЛУЦИШИН

ПРО ПРУЖНУ РІВНОВАГУ КУСОЧНО-НЕОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНКИ З АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОЮ ПРОКЛАДКОЮ

У статті [1] досліджено напружений стан анізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою. В даній роботі досліджується напружений стан ортотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою при наявності абсолютно жорсткої прокладки на деякій частині лінії спаю. Маємо безмежну ортотропну пластинку, в круговий отвір якої впаяна без попереднього натягу ізотропна шайба, причому вздовж деякої дуги lm між шайбою і пластинкою впаяна абсолютно жорстка «математична» прокладка. Тоді через — ml позначимо дугу спаю, на якій відсутня прокладка. Вважаємо, що прокладка розміщена симетрично відносно одного з головних напрямів пружності пластинки.

Виберемо початок координат в центрі шайби, радіус якої приймемо рівним одиниці, а вісь ox спрямуємо по осі симетрії прокладки. Напружений стан на безмежності вважається заданим симетрично відносно осі ox.

Потрібно визначити напружений стан в пластинці і в шайбі.

1. Внаслідок прийнятих умов задачі на лінії розділу матеріалів мають місце такі умови:

$$\left[\frac{du}{d\varphi}+i\frac{dv}{d\varphi}\right]^{+}=\left[\frac{du}{d\varphi}+i\frac{dv}{d\varphi}\right]^{-}=0 \text{ на } lm, \tag{1.1}$$

$$\left[\frac{du}{d\varphi}+i\frac{dv}{d\varphi}\right]^{+}=\left[\frac{du}{d\varphi}+i\frac{dv}{d\varphi}\right]^{-}=f(t)+ig(t) \text{ на } ml; \tag{1.2}$$

$$[\sigma_r(t)+i\tau_{r\varphi}(t)]^{+}=[\sigma_r(t)+i\tau_{r\varphi}(t)]^{-}=\sigma_r(t)+i\tau_{r\varphi}(t) \text{ на } ml. \tag{1.3}$$

Тут значок «+» вказує, що дана величина стосується шайби, а значок «—» — пластинки. $f(t)+ig(t)$; $\sigma_r(t)+i\tau_{r\varphi}(t)$ — невідомі функції.

2. Умовно виділимо шайбу із пластинки і розглянемо пружну рівновагу кожної з частин. Використовуючи відомі формули [2], граничні умови другої основної задачі для шайби запишемо так:

$$it\,[\varkappa\Phi_1^{+}(t)+\Phi_1^{-}(t)=\begin{cases}0 \text{ на } lm;\\ f(t)+ig(t) \text{ на } ml.\end{cases} \tag{2.1}$$

Розв'язок цієї задачі дається формулою

$$iz\Phi_1(z)=\begin{cases}\dfrac{\mu}{\pi i\varkappa}\displaystyle\int_m^l\frac{f(t)+ig(t)}{t-z}\,dt+i\frac{\bar{A}_0}{\varkappa}z, & z\in S^{+}\\ -\dfrac{\mu}{\pi i}\displaystyle\int_m^l\frac{f(t)+ig(t)}{t-z}\,dt-i\bar{A}_0. & z\in S^{-}\end{cases} \tag{2.2}$$

Тут $A_0=\Phi_1(0)$, S^+ і S^- — внутрішність і зовнішність одиничного кола.

Далі розглянемо другу основну задачу для пластинки. Граничні умови цього випадку запишемо, виходячи з відомих формул [3, 4]

$$\begin{aligned} &it\,[p_1\Phi_2'(t)+p_2\Psi_2'(t)]+\frac{1}{it}\,[\bar p_1\overline{\Phi_2'(t)}+\bar p_2\overline{\Psi_2'(t)}]=\begin{cases}0 & \text{на } lm,\\ f(t) & \text{на } ml;\end{cases}\\ &it\,[q_1\Phi_2'(t)+q_2\Psi_2'(t)]+\frac{1}{it}\,[\bar q_1\overline{\Phi_2'(t)}+\bar q_2\overline{\Psi_2'(t)}]=\begin{cases}0 & \text{на } lm,\\ g(t) & \text{на } ml;\end{cases}\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\Phi_2'(\zeta)=a_0+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{\zeta_k};\qquad \Psi_2'(\zeta)=b_0+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{b_k}{\zeta_k}; \tag{2.4}$$

$$a_0=\frac{1}{2}(1-is_1)B^*;\qquad b_0=\frac{1}{2}(1-is_2)B'. \tag{2.5}$$

Розв'язок задачі (2.3) має вигляд

$$\begin{aligned} i\zeta\Phi_2'(\zeta)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_m^l\frac{q_2f(t)-p_2g(t)}{t-\zeta}\,dt+ia_0\zeta+\frac{h_2}{\zeta};\\ i\zeta\Psi_2'(\zeta)&=\frac{1}{2\pi i}\int_m^l\frac{q_1f(t)-p_1g(t)}{t-\zeta}\,dt+ib_0\zeta-\frac{h_1}{\zeta};\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$h_1=i\,\frac{(p_1q_2+p_2q_1)\,a_0+2p_2q_2b_0}{p_1q_2-p_2q_1};\qquad h_2=i\,\frac{2p_1q_1a_0+(p_2q_1+p_1q_2)\,b_0}{p_1q_2-p_2q_1}. \tag{2.7}$$

3. На основі формул (2.2) і (2.6) умова (1.1) приводить до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно функцій $f(t)$ і $g(t)$

$$\begin{aligned} &\frac{b}{\pi i}\int_m^l\frac{g(t)\,dt}{t-\sigma}+af(\sigma)-G_1(\sigma)=0;\\ &\frac{d}{\pi i}\int_m^l\frac{f(t)\,dt}{t-\sigma}+cg(\sigma)+G_2(\sigma)=0.\qquad \sigma\in ml\end{aligned} \tag{3.1}$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned} a&=\frac{q_1-q_2}{p_1q_2-p_2q_1}+\frac{\mu(1-\varkappa)}{\varkappa};\qquad b=\frac{p_2-p_1}{p_1q_2-p_2q_1}+\frac{i\mu(\varkappa+1)}{\varkappa};\\ c&=\frac{s_2p_1-s_1p_2}{p_1q_2-p_2q_1}-\frac{\mu(1-\varkappa)}{\varkappa};\qquad d=\frac{s_2q_1-s_1q_2}{p_1q_2-p_2q_1}+\frac{i\mu(\varkappa+1)}{\varkappa};\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} G_1(\sigma)&=H_1\sigma+\overline{H}_1\sigma^{-1}-\frac{i(\varkappa+1)}{\varkappa}(\overline{A}_0\sigma-A_0\sigma^{-1});\\ G_2(\sigma)&=H_2\sigma+\overline{H}_2\sigma^{-1}-\frac{\varkappa+1}{\varkappa}(\overline{A}_0\sigma+A_0\sigma^{-1});\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$H_1=\frac{2i\,(p_1-p_2)}{p_1q_2-p_2q_1}(a_0q_1+b_0q_2);\quad H_2=\frac{2i\,(s_1q_2-s_2q_1)}{p_1q_2-p_2q_1}(a_0p_1+b_0p_2). \tag{3.4}$$

Неважко переконатись, що система (3.1) еквівалентна двом незалежним сингулярним інтегральним рівнянням

$$\frac{\lambda_k d}{\pi i}\int_m^l \frac{f(t)+\lambda_k g(t)}{t-\sigma}\,dt - a\,[f(\sigma)+\lambda_k g(\sigma)] + G_1(\sigma) + \lambda_k G_2(\sigma) = 0, \quad (3.5)$$

де $\sigma \in ml$, $k=1, 2$; $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{b}{d}}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{b}{d}}$.

Рівняння (3.5) можна вважати розв'язаним, коли визначити таку функцію:

$$L_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_m^l \frac{f(t)+\lambda_k g(t)}{t-z}\,dt. \quad (3.6)$$

Наслідуючи Д. В. Грилiцького [5], знаходимо

$$L_k(z) = X_k(z)\,[C_0^{(k)} z^2 + C_1^{(k)} z + C_2^{(k)} + C_3^{(k)} z^{-1}] - \frac{1}{2\lambda_k d}\,[G_1(z) + \lambda_k G_2(z)]. \qquad (k=1,\ 2) \quad (3.7)$$

Тут

$$X_k(z) = (z-m)^{-\frac{1}{2}+i\varepsilon_k}(z-l)^{-\frac{1}{2}-i\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_k = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\lambda_k d + a}{\lambda_k d - a}\right|, \quad (3.8)$$

причому

$$\begin{aligned} &X_k(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \frac{1}{z} + \frac{\alpha_{-1}^{(k)}}{z^2} + \ldots; \\ &X_k(z) \xrightarrow[|z|\to 0]{} X_k(0)\,(1 + \alpha_1^{(k)} z + \ldots). \end{aligned} \qquad (k=1,\ 2) \quad (3.9)$$

Постійні визначаються з умов

$$\begin{aligned} &C_0^{(k)} = \frac{1}{2}\left[H_1 + \lambda_k H_2 - \frac{\varkappa+1}{\varkappa} A_0 (i+\lambda_k)\right]; \quad C_1^{(k)} = -C_0^{(k)}\alpha_{-1}^{(k)}; \\ &C_3^{(k)} = \frac{1}{2X_k(0)}\left[H_1 - \lambda_k H_2 + \frac{\varkappa+1}{\varkappa} A_0 (i-\lambda_k)\right]; \quad C_2^{(k)} = -C_3^{(k)}\alpha_1^{(k)}; \end{aligned} \quad (k=1,\ 2) \quad (3.10)$$

$$A_0 = \frac{\Omega}{1-\chi}, \quad (3.11)$$

де

$$\Omega = \frac{\mu i}{2b\varkappa}\Big\{(H_1+\lambda_1 H_2)(\lambda_1+i)\,[X_1(0)\,\alpha_{-1}^{(1)} + 1] + (H_1-\lambda_1 H_2)(\lambda_1 - i)\times \times [X_2(0)\,\alpha_{-1}^{(2)} + 1] - 2\,[\alpha_2^{(1)} - (\alpha_1^{(1)})^2]\left(\frac{H_1}{i} + \lambda_1^2 H_2\right)\Big\}; \quad (3.12)$$

$$\chi = \frac{1}{\varkappa} - \frac{\mu(\varkappa+1)}{2b\varkappa^2 i}\Big\{2\,[\alpha_2^{(1)} - (\alpha_1^{(1)})^2](\lambda_1^2+1) - [X_1(0)\,\alpha_{-1}^{(1)} + 1](i+\lambda_1)^2 - [X_2(0)\,\alpha_{-1}^{(2)} + 1](\lambda_1 - i)^2\Big\}.$$

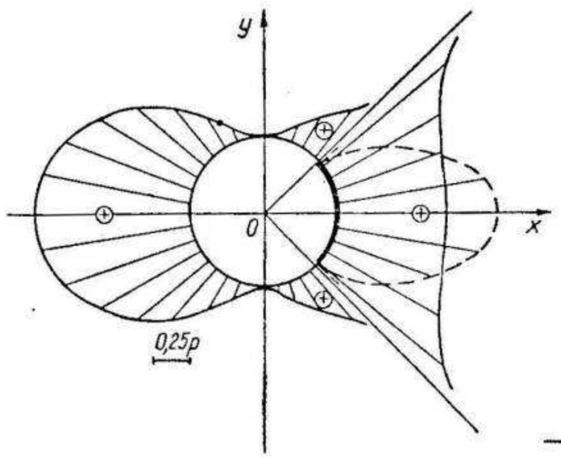
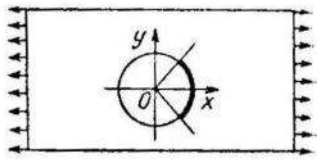


Рис. 1.



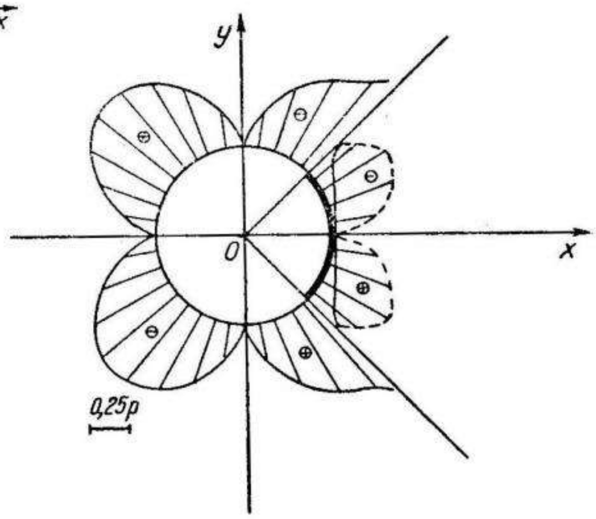


Рис. 2.

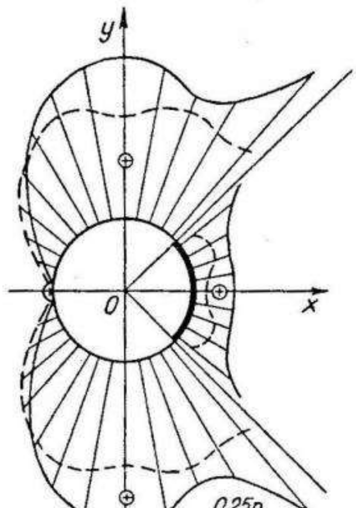


Рис. 3.

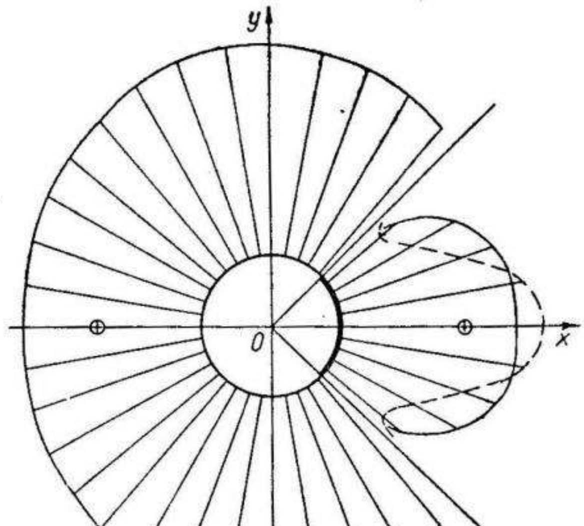


Рис. 4.

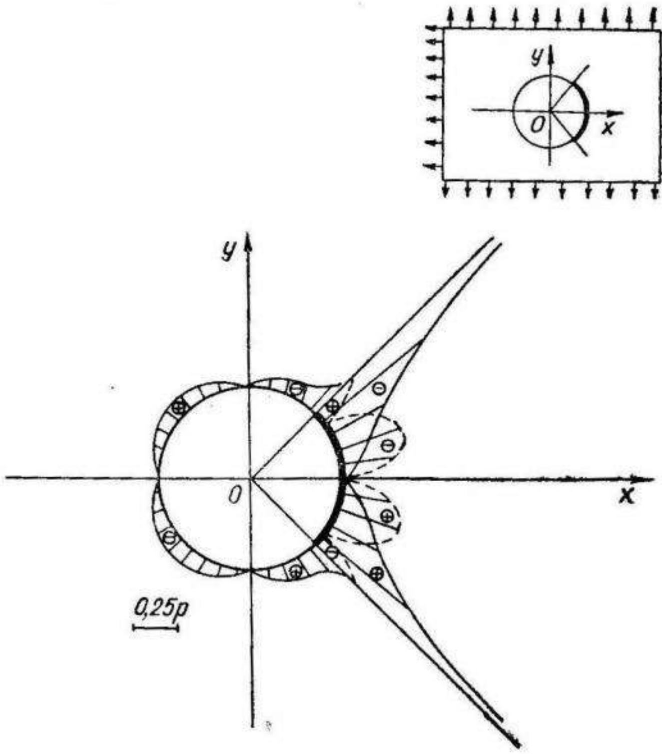


Рис. 5.

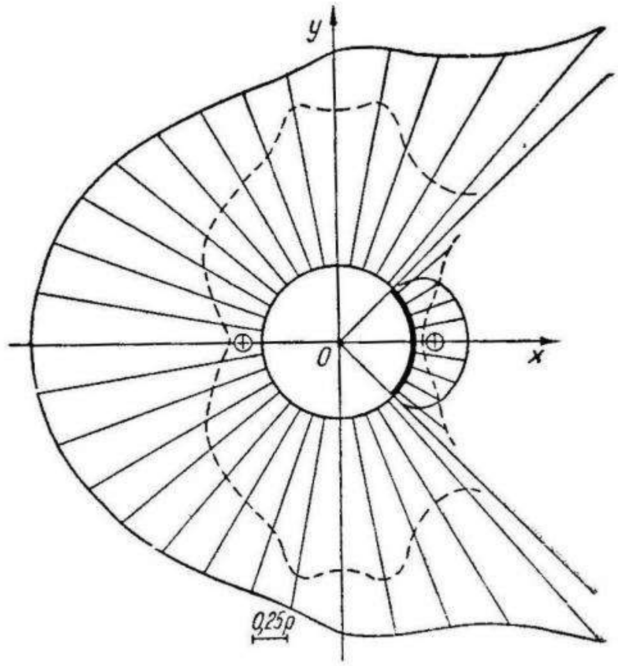


Рис. 6.

4. Маючи співвідношення (2.2), (2.6) і (3.7), легко визначити функції напруження в шайбі і в пластинці:

а) шайба

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \dfrac{\mu i}{2\lambda_1 \varkappa z} \sum\limits_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} (\lambda_{k+1} - i) L_k(z) + \dfrac{\bar{A}_0}{\varkappa}, & z \in S^+ \\ -\dfrac{\mu i}{2\lambda_1 z} \sum\limits_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} (\lambda_{k+1} - i) L_k(z) - \bar{A}_0, & z \in S^- \end{cases} \tag{4.1}$$

б) пластинка $[\lambda_3 = \lambda_1]$

$$\varphi'(z_1) = \left\{ \sum_{k=1}^{2} [a_{k+1,2} L_k(\zeta)] + i a_0 \zeta + \frac{h_2}{\zeta} \right\} \frac{1}{(s_1 + i)\zeta + (s_1 - i)\zeta^{-1}}, \tag{4.2}$$

де

$$\zeta = \left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1 - s_1^2}\right)(1 - i s_1)^{-1}; \quad \varphi(z_1) = \Phi_2[\zeta(z_1)].$$

$$a_{k,j} = (-1)^k \frac{\lambda_k q_j + p_j}{2(p_1 q_2 - p_2 q_1)\lambda_1}; \quad a_{3,j} = a_{1,j}.$$

$$\psi'(z_2) = \left\{ \sum_{k=1}^{2} [-a_{k+1,1} L_k(\zeta)] + i b_0 \zeta - \frac{h_1}{\zeta} \right\} \frac{1}{(s_2 + i)\zeta + (s_2 - i)\zeta^{-1}}. \tag{4.3}$$

Тут

$$\zeta = \left(z_2 + \sqrt{z_2^2 - 1 - s_2^2}\right)(1 - i s_2)^{-1}; \quad \psi(z_2) = \Psi[\zeta(z_2)].$$

5. Виходячи з відомих формул плоскої задачі теорії пружності [2, 3, 4], на основі отриманих виразів для функцій напруження (4.1)—(4.2)—(4.3) легко визначити компоненти тензора напружень у довільній точці досліджуваної пластинки.

Для прикладу проведено підрахунок напружень вздовж лінії розділу матеріалів для текстолітової пластинки з впаяною алюмінієвою шайбою і прокладкою розміром в чверть кола для випадків одноосьового і двоосьового розтягу на безмежності зусиллями інтенсивності p (текстоліт СВАМ із зв'язуючим БФ-4 [6]).

Результати підрахунку наведені на графіках. Для одноосьового розтягу: нормальні напруження σ_r — рис. 1, дотичні напруження $\tau_{r\varphi}$ — рис. 2, кільцеві напруження σ_φ — рис. 3. Для двоосьового розтягу: нормальні напруження σ_r — рис. 4, дотичні $\tau_{r\varphi}$ — рис. 5, σ_φ — рис. 6. Суцільна лінія відповідає напруженням у шайбі, а штрихова — напруженням у пластинці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Н. Савин, Д. В. Грилицкий. Об определении напряженного состояния в анизотропной пластинке с упругим ядром. «Прикладная механика», т. 1, вып. 1, 1965.
2. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
3. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
4. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
5. Д. В. Грилицький. Основні граничні задачі теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою і з розрізами на лінії спаю. Питання механіки і математики, вип. 9. Вид-во ЛДУ, 1962.
6. А. Л. Рабинович, И. А. Верховский. Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков, Инж. журн., т. IV, вып. 1, 1964.