

УДК 539.311

В. О. ЛІХАЧОВ

ЗГИН БАЛКИ, ПІДКРІПЛЕНОЇ КОЛОВИМ ЦИЛІНДРОМ

Розглянемо чистий згин ізотропної балки з круговим отвором, який підкріплено коловим циліндром. Припустимо, що балка прямокутного поперечного розрізу має товщину $2h$ і що центр отвору лежить на її осі. При рішенні задачі вважаємо, що діаметр отвору в балці достатньо малий щодо її поперечних розмірів, тобто в достатньо віддалених точках балки напружений стан майже не відрізняється від напруженого стану в балці без отвору.

Будемо надалі користуватися циліндричною системою координат з початком в центрі отвору балки. Вісь oz направимо по осі циліндра. Очевидно, що в даному випадку площина $z=0$ співпадає з серединною площиною балки.

В області контакту пластинки з циліндром приймаються умови рівності відповідних компонент напружень σ_r , $\tau_{r\theta}$ та компонент зміщення u_r , u_θ , а саме:

$$\sigma_r = \sigma_{r_0}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta_0} \quad \text{при} \quad -h \leq Z \leq h; \quad (1)$$

$$u_r = u_{r_0}, \quad u_\theta = u_{\theta_0} \quad \text{при} \quad Z = 0, \quad (2)$$

де за допомогою індекса 0 позначені компоненти зміщення і напруги, що стосуються пластинки.

Введемо позначення: R — радіус циліндра; $b = \frac{h}{R}$; μ_0 і μ — модулі зсуву для матеріалу пластинки і циліндра відповідно, $l = \frac{\mu_0}{\mu}$; $x = \frac{r}{R}$; $z = \frac{Z}{R}$; $\kappa = \frac{3m-1}{m+1}$; m — число Пуассона.

На підставі робіт [1, 2] функції напружень для балки при чистому згині мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= -i \frac{MR}{8I} \left[\zeta^2 + b_0 + b_2 \frac{1}{\zeta^2} + b_4 \frac{1}{\zeta^4} \right]; \\ \varphi(\zeta) &= i \frac{MR}{8I} \left[\zeta^2 + a_2 \frac{1}{\zeta^2} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

де $|\zeta| \geq 1$; M — момент згину; a_2 , b_2 , b_4 — дійсні постійні, які треба визначити.

Розв'язок системи рівнянь Ляме для визначення напруженого стану суцільного циліндра візьмемо у вигляді [3]

$$\begin{aligned}
 xu_{\theta} = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[I_1(\lambda x) a'_6 - \frac{m}{2(m-2)} \cdot \frac{x}{\lambda} I_2(\lambda x) a'_5 - \right. \\
 & \left. - \frac{x}{\lambda} I_2(\lambda x) a'_4 \right] \cos \lambda z d\lambda \cos \Theta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[I_3(\lambda x) a_6^3 - \frac{3m}{2(m-2)} \times \right. \\
 & \left. \times \frac{x}{\lambda} I_4(\lambda x) a_5^3 - \frac{x}{\lambda} I_4(\lambda x) a_4^3 \right] \cos \lambda z d\lambda \cos 3\Theta; \quad (4) \\
 u_r = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\lambda I_0(\lambda x) - \frac{1}{x} I_1(\lambda x) \right] a'_6 - \frac{m}{m-2} \left[\frac{2 + \lambda^2 x^2}{2\lambda^2 x} I_1(\lambda x) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2\lambda} I_0(\lambda x) \right] a'_5 + \left[\frac{1}{\lambda} I_0(\lambda x) - \frac{2}{\lambda^2 x} I_1(\lambda x) \right] a'_4 \right\} \cos \lambda z d\lambda \sin \Theta + \\
 & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\frac{\lambda}{3} I_2(\lambda x) - \frac{1}{x} I_3(\lambda x) \right] a_6^3 - \frac{m}{m-2} \left[\frac{18 + \lambda^2 x^2}{2\lambda^2 x} I_3(\lambda x) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3}{2\lambda} I_2(\lambda x) \right] a_5^3 + \left[\frac{1}{\lambda} I_2(\lambda x) - \frac{6}{\lambda^2 x} I_3(\lambda x) \right] a_4^3 \right\} \cos \lambda z d\lambda \sin 3\Theta; \\
 u_z = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ -\lambda I_1(\lambda x) a'_6 + \left[\frac{2(m-1)}{m-2} \cdot \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda x) + \frac{m}{2(m-2)} I_2(\lambda x) \right] a'_5 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda x) a'_4 \right\} \sin \lambda z d\lambda \sin \Theta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{\lambda}{3} I_3(\lambda x) a_6^3 + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{2(m-1)}{m-2} \cdot \frac{1}{\lambda} I_3(\lambda x) + \frac{m}{2(m-2)} I_4(\lambda x) \right] a_5^3 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\lambda} I_3(\lambda x) a_4^3 \right\} \sin \lambda z d\lambda \sin 3\Theta.
 \end{aligned}$$

Тут $I_k(r)$ — функції Бесселя першого роду уявного аргументу; $a'_4, a'_5, a'_6, a_4^3, a_5^3, a_6^3$ — постійні інтегрування.

Виконання умов (1) в області контакту та умов відсутності зовнішніх напружень на поверхні циліндра

$$\begin{aligned}
 \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } x=1, |z| > b, \\
 \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } x=1, z > 0
 \end{aligned}$$

приводить до наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 E_{1,2k-1} a_4^{2k-1} - E_{2,2k-1} a_5^{2k-1} + E_{3,2k-1} a_6^{2k-1} &= f_{2k-1}; \\
 E'_{1,2k-1} a_4^{2k-1} - E'_{2,2k-1} a_5^{2k-1} + E'_{3,2k-1,2k-1} a_6^{2k-1} &= f'_{2k-1}, \\
 E''_{1,2k-1} a_4^{2k-1} - E''_{2,2k-1} a_5^{2k-1} + E''_{3,2k-1} a_6^{2k-1} &= 0, \quad (k=1, 2)
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
E_{1,2k-1} &= \frac{2k}{\lambda} I_{2k-1}(\lambda) - \frac{4k(k-1) + \lambda^2}{\lambda^2} I_{2k-1}(\lambda); \\
E_{2,2k-1} &= \frac{m}{m-2} \left[\frac{4k(2k-1)^2 m + 2(k-1)m\lambda^2 + 2\lambda^2}{2m\lambda^2} I_{2k-1}(\lambda) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2k(2k-1) + \lambda^2}{2\lambda} I_{2k-2}(\lambda) \right]; \\
E_{3,2k-1} &= \frac{\lambda}{2k-1} I_{2k-2}(\lambda) - \frac{2k(2k-1) + \lambda^2}{2k-1} I_{2k-1}(\lambda); \\
E'_{1,2k-1} &= \frac{4k}{\lambda} I_{2k-2}(\lambda) - \frac{8k(2k-1) + \lambda^2}{\lambda^2} I_{2k-1}(\lambda); \\
E'_{2,2k-1} &= \frac{(2k-1)m}{m-2} \left[\frac{4k(2k-1) + \lambda^2}{\lambda^2} I_{2k-1}(\lambda) - \frac{2k}{\lambda} I_{2k-2}(\lambda) \right]; \\
E'_{3,2k-1} &= 2\lambda \left[I_{2k-2}(\lambda) - \frac{2k}{\lambda} I_{2k-1}(\lambda) \right]; \\
E''_{1,2k-1} &= 2I_{2k-2}(\lambda) - \frac{3(2k-1)}{\lambda} I_{2k-1}(\lambda); \\
E''_{2,2k-1} &= \frac{m}{m-2} \left[\frac{2(2k-1)^2 m + m\lambda^2 - 2(m-1)(2k-1)}{m\lambda} I_{2k-1}(\lambda) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(m-1) - m(2k-1)}{m} I_{2k-2}(\lambda) \right]; \\
E''_{3,2k-1} &= \frac{2\lambda^2}{2k-1} I_{2k-2}(\lambda) - 2\lambda I_{2k-1}(\lambda); \\
f_1 &= -\frac{M}{8I_{\mu}} (1 + b_2) \frac{\sin \lambda b}{\lambda}, \quad f'_1 = \frac{M}{4I_{\mu}} (1 + b_2) \frac{\sin \lambda b}{\lambda}; \\
f_3 &= -\frac{M}{8I_{\mu}} (1 + 5a_2 + 2b_4) \frac{\sin \lambda b}{\lambda}; \\
f'_3 &= \frac{M}{4I_{\mu}} (-1 + 3a_2 + 2b_4) \frac{\sin \lambda b}{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{6}$$

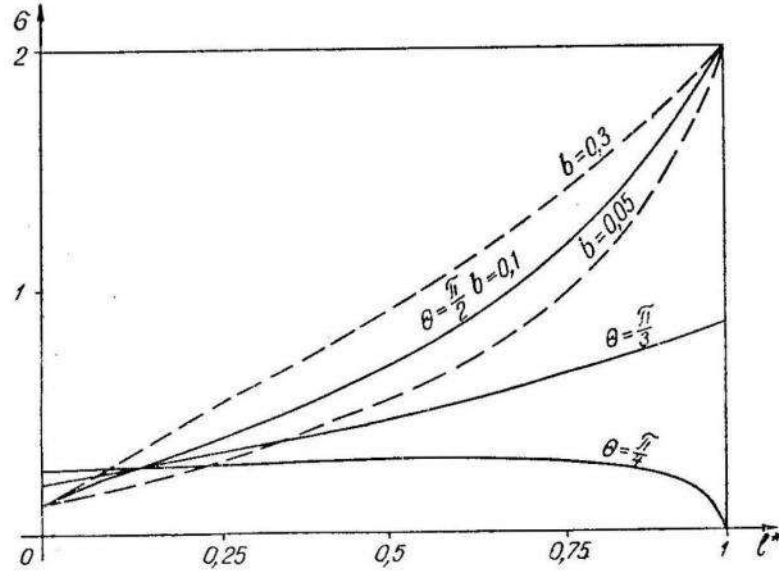
Розв'язавши системи (5), визначимо величини $a'_4, a'_5, a'_6, a_4^3, a_5^3, a_6^3$ через невідомі коефіцієнти a_2, b_2, b_4 функцій напружень. Після цього з умов (2) одержуємо рівняння для визначення згаданих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned}
a_2 [\pi(x+2) + 20lF_1 - 24lF_2] + b_4 [\pi + 8lF_1 - 16lF_2] &= \pi - 4lF_1 - 8lF_2; \\
a_2 [\pi(x-2) + 20lF_3 - 24lF_4] + b_4 [-\pi + 8lF_3 - 16lF_4] &= \\
&= \pi - 4lF_3 - 8lF_4; \\
b_2 [\pi - 4lF_5] &= \pi x + 4lF_5.
\end{aligned}
\tag{7}$$

Тут позначено

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_0^{\infty} \left[\frac{6-9m}{\lambda} I_3^3(\lambda) + \frac{6m-24+4(m-1)\lambda^2}{\lambda^2} I_3^2(\lambda) I_2(\lambda) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{36-27m+2(1-m)\lambda^2}{3\lambda} I_3(\lambda) I_2^2(\lambda) + \frac{4(m-1)}{m} I_2^3(\lambda) \right] \frac{\sin \lambda b}{\lambda \Phi_3(\lambda)} d\lambda;
\end{aligned}$$

$$F_2 = \int_0^\infty \left[-\frac{3m+6+m\lambda^2}{2\lambda} I_3^3(\lambda) - \frac{36-9m+(4m-1)\lambda^2}{\lambda^2} I_3^2(\lambda) I_2(\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{36-27m+m\lambda^2}{2\lambda} I_3(\lambda) I_2^2(\lambda) + 2(m-1) I_2^3(\lambda) \right] \frac{\sin \lambda b}{\lambda \psi_3(\lambda)} d\lambda; \quad (8)$$



$$F_3 = \int_0^\infty \left[-\frac{3m+6+m\lambda^2}{\lambda} I_3^3(\lambda) + \frac{18m-72+(1-4m)2\lambda^2}{\lambda^2} I_3^2(\lambda) I_2(\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{36-27m+m\lambda^2}{\lambda} I_3(\lambda) I_2^2(\lambda) + 4(m-1) I_2^3(\lambda) \right] \frac{\sin \lambda b}{\lambda \psi_3(\lambda)} d\lambda;$$

$$F_4 = \int_0^\infty \left[\frac{2m\lambda^2+6-9m}{2\lambda} I_3^3(\lambda) + \frac{9m-36+(18-\lambda^2)m\lambda^2}{3\lambda^2} I_3^3(\lambda) I_2(\lambda) - \right. \\ \left. - \frac{9m-12+6m\lambda^2}{2\lambda} I_2^2(\lambda) I_3(\lambda) + \frac{m\lambda^3+2(m-1)}{3} I_2^3(\lambda) \right] \frac{\sin \lambda b}{\lambda \psi_3(\lambda)} d\lambda;$$

$$\Psi_3 = -\frac{m\lambda^6+24m\lambda^4+144\lambda^2-72m\lambda^2}{3\lambda^3} I_3^3(\lambda) + \\ + \frac{m\lambda^4+38m\lambda^2-2\lambda^2+288-216m}{3\lambda} I_3(\lambda) I_2^2(\lambda) - \\ - \frac{4m\lambda^4+192m\lambda^2-48\lambda^2+576-144m}{3\lambda^2} I_2^2(\lambda) I_2(\lambda) - \\ - \frac{2m\lambda^2-32(m-1)}{3} I_2^3(\lambda);$$

$$F_5 = \int_0^\infty \left[\frac{4(2m-2-m\lambda^2)}{\lambda} I_1^3(\lambda) + 2(5m-1) I_1(\lambda) I_0^2(\lambda) + \right. \\ \left. + 2(4-8m+m\lambda^2) I_1^2(\lambda) I_0(\lambda) - 2m\lambda^2 I_0^3(\lambda) \right] \frac{\sin \lambda b}{\lambda \psi_1(\lambda)} d\lambda;$$

Таблица значений $\sigma = -\frac{l}{MR} \sigma_{\theta_0}$

$l = 0$

$b \backslash m$		0,05						0,1						0,2						0,3					
		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
2	3	0,37	0,38	0,29	0,13	0,29	0,38	0,37	0,13	0,29	0,38	0,37	0,13	0,29	0,38	0,37	0,13	0,29	0,38	0,37	0,13	0,29	0,38	0,37	0,13
3	4	0,25	0,26	0,22	0,13	0,22	0,26	0,25	0,13	0,22	0,26	0,25	0,13	0,22	0,26	0,25	0,13	0,22	0,26	0,25	0,13	0,22	0,26	0,25	0,13
4	5	0,19	0,26	0,17	0,11	0,17	0,26	0,19	0,11	0,17	0,26	0,19	0,11	0,17	0,26	0,19	0,11	0,17	0,26	0,19	0,11	0,17	0,26	0,19	0,11
5		0,16	0,17	0,14	0,095	0,14	0,17	0,16	0,095	0,14	0,17	0,16	0,095	0,14	0,17	0,16	0,095	0,14	0,17	0,16	0,095	0,14	0,17	0,16	0,095

$l = \frac{1}{3}$

2	3	0,31	0,36	0,35	0,30	0,29	0,36	0,29	0,30	0,38	0,36	0,27	0,37	0,42	0,36	0,27	0,46	0,37	0,45	0,26	0,46	0,37	0,45	0,26	0,51
3	4	0,23	0,28	0,30	0,29	0,28	0,29	0,22	0,29	0,34	0,29	0,21	0,37	0,39	0,31	0,21	0,46	0,32	0,42	0,21	0,46	0,32	0,42	0,21	0,51
4	5	0,18	0,24	0,26	0,28	0,26	0,25	0,18	0,28	0,31	0,25	0,18	0,36	0,37	0,31	0,18	0,45	0,29	0,40	0,18	0,45	0,29	0,40	0,18	0,51
5		0,15	0,21	0,24	0,27	0,24	0,23	0,16	0,27	0,29	0,23	0,16	0,35	0,35	0,26	0,16	0,45	0,28	0,39	0,17	0,45	0,28	0,39	0,17	0,50

$l = 1$

2	3	0,23	0,34	0,44	0,54	0,54	0,33	0,18	0,54	0,50	0,33	0,13	0,69	0,56	0,32	0,13	0,85	0,32	0,59	0,10	0,85	0,32	0,59	0,10	0,92
3	4	0,18	0,29	0,41	0,53	0,53	0,30	0,15	0,53	0,48	0,30	0,12	0,68	0,54	0,31	0,12	0,84	0,31	0,59	0,10	0,84	0,31	0,59	0,10	0,91
4	5	0,15	0,27	0,39	0,52	0,52	0,29	0,14	0,52	0,47	0,29	0,11	0,68	0,54	0,30	0,11	0,83	0,31	0,58	0,10	0,83	0,31	0,58	0,10	0,91
5		0,14	0,25	0,38	0,51	0,51	0,28	0,13	0,51	0,46	0,28	0,11	0,67	0,54	0,30	0,11	0,83	0,31	0,58	0,10	0,83	0,31	0,58	0,10	0,91

$l = 3$

2	3	0,063	0,29	0,59	0,96	0,96	0,25	0,020	0,96	0,66	0,25	-0,096	1,16	0,71	0,22	-0,096	1,33	0,21	0,73	-0,129	1,33	0,21	0,73	-0,129	1,40
3	4	0,060	0,28	0,58	0,94	0,94	0,26	-0,0088	0,94	0,65	0,26	-0,073	1,14	0,71	0,24	-0,073	1,32	0,23	0,74	-0,102	1,32	0,23	0,74	-0,102	1,38
4	5	0,058	0,27	0,57	0,93	0,93	0,26	-0,0027	0,93	0,65	0,26	-0,062	1,13	0,71	0,25	-0,062	1,30	0,24	0,74	-0,089	1,30	0,24	0,74	-0,089	1,36
5		0,056	0,27	0,57	0,93	0,93	0,26	0,0006	0,93	0,65	0,26	-0,055	1,13	0,71	0,25	-0,055	1,29	0,24	0,74	-0,080	1,29	0,24	0,74	-0,080	1,36

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{16(m-1) - 2m\lambda^2(4+\lambda^2)}{\lambda} I_1^3(\lambda) + 16(1-2m) I_1^2(\lambda) I_0(\lambda) + \\ + [4(5m-1)\lambda + 2m\lambda^3] I_1(\lambda) I_0^2(\lambda) - 4m\lambda^3 I_0^3(\lambda).$$

Нами за допомогою чисельного інтегрування в формулах (8) одержані значення σ_{θ_0} на контурі спаю в залежності від значень m , b , l і кута Θ . Ці значення наведені в таблиці і проілюстровані на графіках у системі (σ, l^*) , де $\sigma = -\frac{I}{MR} \sigma_{\theta_0}$, $l^* = \frac{l}{1+l}$. При цьому суцільні криві проведені для значень $b=0.1$, $m=3$ при $\Theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, а пунктирні — для значень $m=3$, $\Theta = \frac{\pi}{2}$ при $b=0.05; 0.1; 0.3$, $\alpha=1, 0, 3$.

Примітка. Для значень $l=\infty$ ($\mu \gg \mu$) $\sigma=0.5, 0, 0.87, 2.0$ при Θ відповідно рівних $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М., Гостехиздат, 1951.
2. Г. М. Савін, Н. П. Флейшман. Вплив пружних кілець, впаяних у круговий отвір неоднорідно напруженого плоского поля. Доповіді АН УРСР, № 5, 1948.
3. В. О. Ліхачов. Деформація пружної безмежної пластинки з впаяним циліндром. Вид-во Львів. ун-ту, 1959.