ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 539.385

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, В. Б. РУДНИЦЬКИЙ

ДО ЗАДАЧІ ПРО КРУЧЕННЯ ПІВПРОСТОРУ КІЛЬЦЕВИМ ШТАМПОМ

Задача про кручення ізотропного півпростору кільцевим штампом розглянута в двох варіантах в роботі М. М. Бородачова і Ф. М. Бородачової [1], при цьому істотно використані перший та другий методи J. C. Cooke [2]. У даній роботі, користуючись ідеєю Z. Olesiak [3], ми наводимо інший, надзвичайно простий розв'язок цієї задачі.

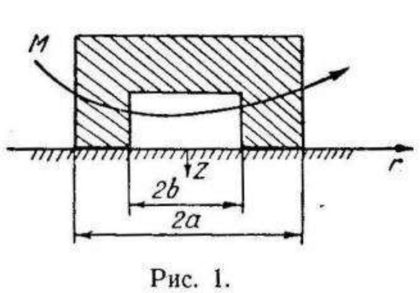

Рис. 1.

Отже, розглянемо осесиметричну задачу теорії пружності про визначення напружень і зміщень в ізотропному півпросторі, який скручується внаслідок повороту навколо осі симетрії кільцевого штампа з плоскою основою. Вважаємо, що жорсткий штамп своєю основою припаяний до пружного середовища, поверхня якого зовні і всередині штампа вільна від зовнішніх напружень.

Через M позначимо величину крутного моменту, прикладеного до кільцевого штампа, зовнішній і внутрішній радіуси якого позначимо через a та b. При розв'язуванні поставленої задачі будемо користуватися циліндричною системою координат (r, Θ, z) так, щоб площина $z=0$ співпала з поверхнею півпростору, початок системи координат — з центром штампа, а вісь z направимо всередину півпростору (рис. 1).

У даному випадку, внаслідок осьової симетрії задачі, відмінною від нуля буде лише компонента вектора переміщення $U_\Theta(r, z)$, яка в області пружного середовища задовольняє диференціальне рівняння [4]

$$\frac{\partial^2 U_\Theta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U_\Theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial U_\Theta}{\partial r}-\frac{U_\Theta}{r^2}=0 \tag{1}$$

і такі граничні умови при $z=0$:

$$\begin{aligned} \tau_{\Theta z}&=0; \qquad (0\leq r<b)\\ U_\Theta&=\varepsilon r; \qquad (b\leq r\leq a)\\ \tau_{\Theta z}&=0, \qquad (r>a) \end{aligned} \tag{2}$$

де ε — кут повороту штампа.

Відмінні від нуля компоненти тензора напружень визначаються за формулами

$$\tau_{\Theta z}=\mu\frac{\partial U_\Theta}{\partial z}; \qquad \tau_{r\Theta}=\mu\left(\frac{\partial U_\Theta}{\partial r}-\frac{U_\Theta}{r}\right), \tag{3}$$

де μ — модуль зсуву.

Розв'язок рівняння (1) при умовах (2) повинен бути таким, щоб переміщення U_θ та напруження $\tau_{\theta z}$ і $\tau_{r\theta}$ прямували до нуля, коли $z \to \infty$.

Для визначення кута повороту штампа ε в залежності від величини прикладеного моменту M існує співвідношення

$$M = 2\pi \int_b^a r^2 \tau_{\theta z}(r)\, dr. \tag{4}$$

Наслідуючи Z. Olesiak [3], наближений розв'язок поставленої задачі одержимо шляхом накладання розв'язків двох задач:

1. Кручення півпростору внаслідок повороту суцільного штампа радіусом a. При цьому маємо такі граничні умови:

$$\begin{aligned} U_\theta &= \varepsilon r; \qquad (r \leqslant a) \\ \tau_{\theta z} &= 0. \qquad (r > a) \end{aligned} \tag{5}$$

Ця задача вперше розв'язана E. Reissner і H. Sagoci [5] в 1944 році. Формули для напруження під штампом і зміщень граничних точок півпростору зовні штампа мають вигляд [6]

$$\tau_{\theta z}(r,\ 0) = -\mu \frac{4\varepsilon}{\pi} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}; \qquad (r \leqslant a) \tag{6}$$

$$U_\theta(r,\ 0) = \frac{2\varepsilon}{\pi}\left(r \cdot \arcsin\frac{a}{r} - \frac{a}{r}\sqrt{r^2 - a^2}\right). \qquad (r > a) \tag{7}$$

2. Кручення півпростору тангенціальними зусиллями при таких граничних умовах:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} &= \mu \frac{4\varepsilon}{\pi} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}; \qquad (0 \leqslant r < b) \\ U_\theta &= 0. \qquad (r > b) \end{aligned} \tag{8}$$

Як бачимо, величина і характер розподілу дотичних напружень у цій задачі на ділянці $0 \leqslant r < b$ взяті з першої задачі, але з оберненим знаком. Частина границі півпростору при $r > b$ нерухомо закріплена.

Шляхом накладання розв'язків вказаних двох задач перші дві умови (2) будуть виконуватися точно, третя умова (2) наближено і, отже, буде вказувати на похибку, яку при цьому ми допускаємо. Слід зазначити, що перша і друга задачі допускають точні розв'язки, накладаючи які, дістанемо наближений розв'язок вихідної задачі.

Розв'язок другої задачі являє самостійний інтерес. Однак через брак місця ми не будемо зупинятися на ході рішення її, а лише вкажемо, що, як і в першій задачі [6], за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля вона зводиться до дуальних інтегральних рівнянь, з яких знаходимо, застосувавши формулу обернення, шукану функцію, яка і дає можливість визначити всі основні характеристики задачі.

Пропускаючи проміжні обчислення, запишемо остаточний результат для вихідної задачі:

$$\tau_{\theta z} = -\frac{4\varepsilon\mu}{\pi} \begin{cases} 0 & (0 \leqslant r < b), \\ \dfrac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \dfrac{2r}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a^2 - r^2}{r^2 - b^2}}\right) - \dfrac{ab}{\pi r\sqrt{r^2 - b^2}} + \\ \qquad + \dfrac{a^2 - b^2 + 2r^2}{2\pi r\sqrt{r^2 - b^2}} \ln\dfrac{a + b}{a - b} & (b < r < a), \\ -\dfrac{2r}{\pi\sqrt{r^2 - a^2}} \operatorname{Arth}\left(\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{r^2 - a^2}{r^2 - b^2}}\right) - \dfrac{ab}{\pi r\sqrt{r^2 - b^2}} + \\ \qquad + \dfrac{a^2 - b^2 + 2r^2}{2\pi r\sqrt{r^2 - b^2}} \ln\dfrac{a + b}{a - b} & (r > a). \end{cases} \tag{9}$$

$$U_\theta=\frac{4\varepsilon}{\pi}\begin{cases}\dfrac{\pi r}{4}-\dfrac{a^2\sqrt{b^2-r^2}}{2\pi br}\ln\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a\sqrt{a^2-r^2}}{2\pi r}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2}}{\sqrt{a^2-r^2}-\sqrt{b^2-r^2}}\right|-\\ \qquad-\dfrac{r}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{r/b}^{1}\left(\eta^2-\frac{r^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{a+\eta b}{a-\eta b}\,d\eta \quad (0\leqslant r<b)\\ \dfrac{\pi r}{4} \qquad\qquad (b<r<a)\\ \dfrac{r}{2}\arcsin\dfrac{a}{r}-\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{r^2-a^2}}{r}. \qquad (r>a)\end{cases} \tag{10}$$

Інтеграл, що входить у формулу (10), не вдається точно обчислити, а тому замінимо його наближеним виразом

$$\int\limits_{r/b}^{1}\left(\eta^2-\frac{r^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{a+\eta b}{a-\eta b}\,d\eta\approx\frac{2}{a}\sqrt{b^2-r^2}\left\{\left(1+\frac{1}{3^2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{5^2}\frac{b^4}{a^4}+\dots\right)+\right.$$
$$+\frac{2r^2}{a^2}\left(\frac{1}{1\cdot 3^2}+\frac{2}{3\cdot 5^2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{3}{5\cdot 7^2}\frac{b^4}{a^4}+\dots\right)+$$
$$\left.+\frac{2^2r^4}{a^4}\left(\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5^2}+\frac{2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7^2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9^2}\frac{b^4}{a^4}+\dots\right)+\dots\right\}. \tag{11}$$

Наприклад, для випадку $a=2$, $b=1$ одержуємо

$$\int\limits_{r}^{1}(\eta^2-r^2)^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{2+\eta}{2-\eta}d\eta\approx\sqrt{1-r^2}\,(1{,}058+0{,}059r^2+$$
$$+0{,}007r^4+0{,}001r^6+\dots). \tag{12}$$

Напруження $\tau_{r\theta}\,(r,0)$ обчислюються на основі формул (3) і (10):

$$\tau_{r\theta}=\frac{4\varepsilon\mu}{\pi}\begin{cases}\dfrac{a^2(2b^2-r^2)}{\pi r^2\sqrt{b^2-r^2}}\ln\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a(2a^2-r^2)}{2\pi r^2\sqrt{a^2-r^2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2}}{\sqrt{a^2-r^2}-\sqrt{b^2-r^2}}\right|-\\ \qquad-\dfrac{a}{\pi\sqrt{b^2-r^2}}-\dfrac{br^2}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{r/b}^{1}(\eta^2b^2-r^2)^{-\frac{3}{2}}\ln\frac{a+\eta b}{a-\eta b}d\eta, \quad (r<b)\\ 0, \qquad (b<r<a)\\ -\dfrac{a^3}{r^2\sqrt{r^2-a^3}}, \qquad (r>a).\end{cases} \tag{13}$$

Підставляючи значення напруження $\tau_{\theta z}$ із формули (9) в (4), одержимо

$$M=-\frac{16}{3}\mu\varepsilon a^3\cdot f, \tag{14}$$

де

$$f=\frac{2}{\pi}\arccos\delta-\frac{\delta}{2\pi}\sqrt{1-\delta^2}+\frac{(5+\delta^2)\sqrt{1-\delta^2}}{4\pi}\ln\frac{1+\delta}{1-\delta}. \tag{15}$$

У співвідношенні (15) введено позначення $\frac{b}{a} = \delta$. Отже, формули (9), (10), (13), (14) і (15) повністю розв'язують поставлену задачу, послідовно визначаючи напруження під штампом, зміщення граничних точок півпростору і кут повороту штампа в залежності від величини прикладеного крутного моменту.

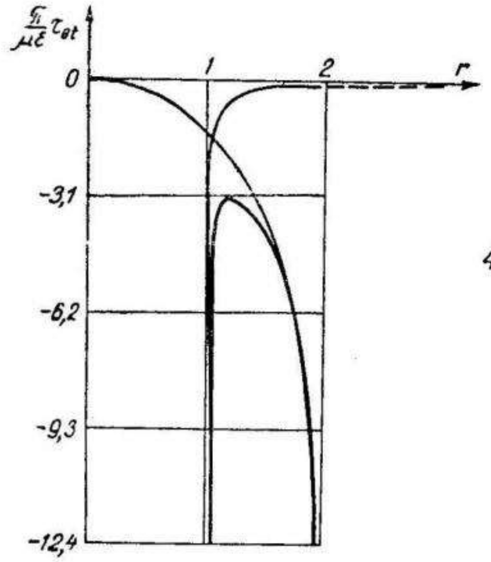

Рис. 2.

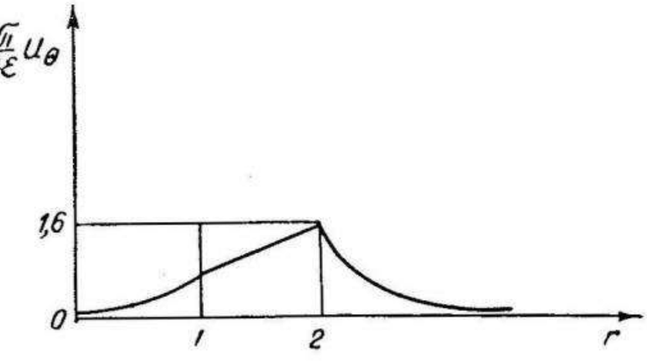

Рис. 3.

Слід зазначити, що наведені вище формули дають прекрасні результати для параметра $\delta \leqslant 0{,}7$. Покладаючи в попередніх формулах $b = 0$, одержимо випадок суцільного штампа.

Числові розрахунки показали, що для значень параметра $\delta \div 0{,}5$; $0{,}6$; $0{,}7$ величина моменту M, обчисленого за формулами (14) і (15), з точністю до 0,1% збігається з результатами роботи [1].

Графіки розподілу напружень $\tau_{\theta z}$ і переміщень U_θ на границі півпростору для значень $a = 2$ і $b = 1$ показані на рис. 2 і 3. Жирна лінія на рис. 2 характеризує величину і характер розподілу напруження під кільцевим штампом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. М. Бородачев, Ф. Н. Бородачева. Кручение упругого полупространства, вызванное поворотом кольцевого штампа. Инж. журн., Механика твердого тела, № 1, 1966.

2. J. C. Cooke. Some further triple integral equation solution. Proc. of the Edinburgh. Math. Soc., vol. 13, № 4, 1963.

3. Z. Olesiak. Annular punch on elastic semi-space. Archiwum Mechaniki Stosowanej, t. 17, № 4, 1965.

4. Н. Х. Арутюнян, Б. А. Абрамян. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.

5. E. Reissner, H. Sagoci. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. Journal of Applied Physics, vol. 15, № 9, 1944.

6. И. Снеддон. Преобразования Фурье. Изд-во иностр. л-ры, 1955.