ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 Серія механіко-математична Випуск 4

УДК 539.311

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ НЕСИМЕТРИЧНОЇ ПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

Рівняння рівноваги при несиметричному тензорі напружень ($\tau_{xy} \neq \tau_{yx}$) в комплексних змінних $z=x+iy$ і $\bar{z}=x-iy$ мають вигляд [1, 3]

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial T}{\partial z} + (X + iY) = 0; \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{M} + \operatorname{Re}\frac{\partial M}{\partial z} + \tau_\omega = 0. \tag{2}$$

Рівновага елементарної трикутної призми з врахуванням моментних напружень зводиться до справдження таких співвідношень:

$$S dz - T d\bar{z} = 2i(X_n + iY_n)\, ds; \tag{3}$$

$$\bar{M} dz - M d\bar{z} = 2i\mu_n ds. \tag{4}$$

Тут введені позначення

$$\begin{gathered} S=\sigma_x+\sigma_y+2i\tau_\omega; \quad T=\sigma_x-\sigma_y+2i\tau_\gamma; \\ \tau_\gamma=\frac{1}{2}(\tau_{xy}+\tau_{yx}); \quad \tau_\omega=\frac{1}{2}(\tau_{xy}-\tau_{yx}); \\ M=\mu_x+i\mu_y; \end{gathered} \tag{5}$$

X, Y — компоненти об'ємних сил; $\mathfrak{M}$ — об'ємний момент; X_n, Y_n — компоненти вектора зовнішніх зусиль; μ_n — моментне напруження на похилій грані призми з нормаллю n. При малій деформації пружного середовища кінематичні співвідношення Коші в комплексній формі набудуть вигляду

$$\begin{aligned} U&=2\frac{\partial}{\partial z}(u+iv)=\varepsilon_x+\varepsilon_y+2i\omega_z; \\ V&=2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u+iv)=\varepsilon_x-\varepsilon_y+2i\gamma_{xy}. \end{aligned} \tag{6}$$

В позначеннях (6) рівняння сумісності деформації теорії несиметричної пружності в комплексній формі зводиться до співвідношення

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

З рівностей (6) одержимо

$$Udz + Vd\bar{z} = 2\mathrm{d}(u + iv). \tag{8}$$

Залежність між статичними і кінематичними характеристиками деформованого середовища приймемо лінійною, поклавши

$$\begin{aligned} S &= a_1 U + a_2 \bar{U} + a_3 V + a_4 \bar{V}; \\ T &= b_1 U + b_2 \bar{U} + b_3 V + b_4 \bar{V}. \end{aligned} \tag{9}$$

Очевидно, фізичні співвідношення (9) повинні бути розв'язні відносно функцій U і V

$$\begin{aligned} U &= A_1 S + A_2 \bar{S} + A_3 T + A_4 \bar{T}; \\ V &= B_1 S + B_2 \bar{S} + B_3 T + B_4 \bar{T}. \end{aligned} \tag{10}$$

Причому, згідно з першим законом термодинаміки,

$$\begin{aligned} &a_1 = \bar{a}_1, \quad a_3 = \bar{b}_1, \quad a_4 = b_2, \quad b_3 = \bar{b}_3; \\ &A_1 = \bar{A}_1, \quad A_3 = \bar{B}_1, \quad A_4 = B_2, \quad B_3 = \bar{B}_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Величини a_j, b_j, або A_j, B_j (взагалі комплексні) характеризують пружні властивості середовища. Для ортотропного тіла, якщо напрями осей x і y збігаються з головними напрямами пружності, всі сталі a_j, b_j, A_j і B_j — величини дійсні.

Зокрема, для ізотропного середовища

$$\begin{aligned} &a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_4 = 0; \\ &A_3 = 0, \quad A_4 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_4 = 0. \end{aligned}$$

Далі переходимо до побудови загального розв'язку задачі при відсутності масових сил ($X = 0$, $Y = 0$).

Скориставшись законом Гука (10), умову сумісності деформації (7) запишемо в функціях напружень S і T

$$(A_1 + B_3)\frac{\partial S}{\partial \bar{z}} - (A_4 + B_2)\frac{\partial \bar{S}}{\partial z} + A_3 \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} - B_1 \frac{\partial S}{\partial z} - B_4 \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + A_2 \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{z}} = 0; \tag{12}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Система (12) в нових незалежних змінних

$$z_1 = z + \lambda_1 \bar{z}, \quad z_2 = z + \lambda_2 \bar{z}, \tag{13}$$

де λ_1, λ_2 — сталі, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$, набуде вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2} \Big\{ &[(A_1 + B_3)\lambda_j - B_1]\frac{\partial S}{\partial z_j} - [(A_4 + B_2) - A_2\lambda_j]\frac{\partial \bar{S}}{\partial z_j} + \\ &+ A_3\lambda_j \frac{\partial T}{\partial z_j} - B_4 \frac{\partial \bar{T}}{\partial z_j} + [(A_1 + B_3) - B_1\bar{\lambda}_j]\frac{\partial S}{\partial \bar{z}_j} - \\ &- [(A_4 + B_2)\bar{\lambda}_j - A_2]\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{z}_j} + A_3 \frac{\partial T}{\partial \bar{z}_i} - B_4\bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}_j} \Big\} = 0; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \left\{ \lambda_j \frac{\partial S}{\partial z_j} + \frac{\partial S}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial T}{\partial z_j} + \bar{\lambda}_j \frac{\partial T}{\partial \bar{z}_i} \right\} = 0.$$

Загальний розв'язок диференціальних рівнянь (14) має вигляд

$$S = \sum_{j=1}^{2} [\Phi_j(z_j) + \bar{\lambda}_j \overline{f(\lambda_j)}\, \overline{\Phi_j(z_j)}];$$
$$T = -\sum_{j=1}^{2} [\lambda_j \Phi_j(z_j) + \overline{f(\lambda_j)}\, \overline{\Phi_j(z_j)}], \tag{15}$$

де $\Phi_j(z_j)$ $(j=1, 2)$ — довільні аналітичні функції своїх аргументів. Тут

$$f(\lambda_j) = \frac{A_3\lambda_j^2 - (A_1+B_3)\lambda_j + B_1}{A_2\lambda_j^2 - (A_4+B_2)\lambda_j + B_4};$$

λ_1, λ_2 — корні характеристичного рівняння

$$[A_3\lambda^2 - (A_1+B_3)\lambda + B_1][\bar{B}_1\lambda^2 - (\bar{A}_1+\bar{B}_3)\lambda + \bar{A}_3] -$$
$$- [A_2\lambda^2 - (A_4+B_2)\lambda + B_4][\bar{B}_4\lambda^2 - (\bar{A}_4+\bar{B}_2)\lambda + \bar{A}_2] = 0. \tag{16}$$

У випадку ортотропного тіла, якщо головні напрями пружності прийняті за напрями осей x і y, величини A_j і B_j дійсні і рівняння (16) шляхом заміни [2]

$$\lambda = \frac{1+i\mu}{1-i\mu}, \quad \mu = i\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \tag{17}$$

зведеться до вигляду

$$(2a-2b+c)\mu^4 + 2(c-6a)\mu^2 + (2a+2b+c) = 0, \tag{18}$$

де

$$a = A_3B_1 - A_2B_4;$$
$$b = (A_2+B_4)(A_4+B_2) - (A_3+B_1)(A_1+B_3);$$
$$c = A_3^2 + (A_1+B_3)^2 + B_1^2 - A_2^2 - (A_4+B_2)^2 - B_4^2.$$

Крайова умова (3) з врахуванням (15) набуде такого вигляду:

$$\sum_{j=1}^{2} [\varphi_j(z_j) + \overline{f(\lambda_j)}\, \overline{\varphi_j(z_j)}] = 2i\int_0^s (X_n + iY_n)\,ds + \text{const}, \tag{19}$$

причому

$$\varphi_j'(z_j) = \Phi_j(z_j).$$

Для визначення функцій U і V скористаємося законом Гука (10) з врахуванням формул (15). Будемо мати

$$U = \sum_{j=1}^{2} [F(\lambda_j)\Phi_j(z_j) + \bar{\lambda}_j \overline{H(\lambda_j)}\, \overline{\Phi_j(z_j)}];$$
$$V = \sum_{j=1}^{2} [\lambda_j F(\lambda_j)\Phi_j(z_j) + \overline{H(\lambda_j)}\, \overline{\Phi_j(z_j)}], \tag{20}$$

де

$$F(\lambda) = A_1 + \lambda f(\lambda) A_2 - \lambda A_3 - f(\lambda) A_4;$$
$$H(\lambda) = \bar{B}_2 + \lambda f(\lambda)\bar{B}_1 - \lambda\bar{B}_4 - f(\lambda)\bar{B}_3.$$

Підставимо вирази (20) у формулу (8) і проведемо інтегрування, дістанемо

$$2(u+iv)=\sum_{j=1}^{2}[F(\lambda_j)\varphi_j(z_j)+\overline{H(\lambda_j)}\overline{\varphi_j(z_j)}]+\text{const}. \tag{21}$$

Неважко переконатися в тому, що вирази (20) задовольняють рівняння рівноваги (1) ($X=0$, $Y=0$), записане у функціях U і V, при умові

$$[a_3\lambda^2+(a_1+b_3)\lambda+b_1][\bar{b}_1\lambda^2+(\bar{a}_1+\bar{b}_3)\lambda+\bar{a}_3]-$$
$$-[a_2\lambda^2+(a_4+b_2)\lambda+b_4][\bar{b}_4\lambda^2+(\bar{a}_4+\bar{b}_2)\lambda+\bar{a}_2]=0. \tag{22}$$

Рівність (22) являє другий вигляд характеристичного рівняння (16), записаного через коефіцієнти a_j, b_j формули (9). Для дійсних a_j і b_j рівняння (22) шляхом заміни (17) зводиться до вигляду (18), причому в даному випадку коефіцієнти a, b і c дорівнюють

$$a=a_3b_1-a_2b_4;$$
$$b=(a_3+b_1)(a_1+b_3)-(a_2+b_4)(a_4+b_2);$$
$$c=a_3^2+(a_1+b_3)^2+b_1^2-a_2^2-(a_4+b_2)^2-b_4^2.$$

Моментні напруження $M=\mu_x+i\mu_y$ визначаються після того, коли розв'язана основна крайова задача (19) або (21) і знайдена величина τ_ω.

Загальний розв'язок рівняння (2) можна, очевидно, подати у вигляді

$$M=\overline{\Omega(z)}+\chi(z)-z\overline{\chi'(z)}+M_0, \tag{23}$$

де $\Omega(z)$, $\chi(z)$ — довільні аналітичні функції в області D; M_0 — частковий розв'язок рівняння (2). Функції $\Omega(z)$ і $\chi(z)$ задовольняють крайову умову (4), яка з врахуванням (23) набуде вигляду

$$\Omega(t)+\overline{\chi(t)}-\bar{t}\chi'(t)+[\overline{\Omega(t)}+\chi(t)-t\overline{\chi'(t)}]e^{-2i\alpha}=$$
$$=2\mu_n e^{-i\alpha}-M_0e^{-2i\alpha}-\bar{M}_0, \tag{24}$$

де α — кут, який утворює нормаль n з віссю x; t — афікс точки границі L.

Якщо об'ємні сили і об'ємний момент відсутні, то частковий розв'язок M_0 можна, зокрема, взяти таким:

$$M_0=\frac{i}{4}\sum_{j=1}^{2}\left\{[1-\lambda_j f(\lambda_j)]\varphi_j(z_j)-\frac{1}{\bar{\lambda}_j}[1-\bar{\lambda}_j\overline{f(\lambda_j)}]\overline{\varphi_j(z_j)}\right\}. \tag{25}$$

Для визначеності розв'язку рівняння (24) потрібна додаткова умова. В моментній теорії Коссера [3] такою умовою служить рівність

$$\frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial\mu_x}{\partial y}=\frac{\partial\mu_y}{\partial x}\right),$$

яку вважатимемо справедливою і в нашому випадку.

Якщо вважати, що моментні напруження мають природу масових моментів $\mathfrak{M}$ (обертання), то для їх визначення достатньо одного рівняння статики (2) ($\mu_x\equiv 0$, $\mu_y\equiv 0$)

$$\mathfrak{M}=-2\tau_\omega.$$

З умови розв'язності задачі [1] випливає, що

$$a_2=\bar{a}_2,\ a_3=\bar{a}_4;\ A_2=\bar{A}_2,\ A_3=\bar{A}_4.$$

Випадок класичної теорії анізотропного середовища дістанемо шляхом граничного переходу, прямуючи жорсткості, що стосуються локального обертання елемента ω_z, до нуля. Тоді в границі дістанемо $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Якщо пластинка ортотропна і головні напрями пружності збігаються з напрямами осей x, y, то закон Гука у звичайній формі у технічних сталих набуде вигляду

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_x + \nu_2\varepsilon_y);$$

$$\sigma_y = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_y + \nu_1\varepsilon_x); \tag{26}$$

$$\tau_\gamma = 2G\gamma_{xy}; \quad \tau_\omega = 2g\omega_z,$$

де g — додаткова стала матеріалу.

У цьому випадку коефіцієнти A_j, B_j, a_j й b_j, що входять у фізичні співвідношення (9) і (10), дорівнюють

$$A_1 = k\beta + \frac{1}{4g}, \quad A_2 = k\beta - \frac{1}{4g}, \quad B_3 = k\alpha + \frac{1}{4G};$$

$$B_4 = k\alpha - \frac{1}{4G}, \quad A_3 = A_4 = B_1 = B_2 = -k\gamma;$$

$$a_1 = \alpha + g, \quad a_2 = \alpha - g, \quad b_3 = \beta + G, \quad b_4 = \beta - G; \tag{27}$$

$$a_3 = a_4 = b_1 = b_2 = \gamma,$$

де

$$\alpha = \frac{E_1 + 2\nu_1 E_2 + E_2}{4(1-\nu_1\nu_2)}, \quad \beta = \frac{E_1 - 2\nu_1 E_2 + E_2}{4(1-\nu_1\nu_2)}, \quad \gamma = \frac{E_1 - E_2}{4(1-\nu_1\nu_2)};$$

$$k = \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1E_2}, \quad \nu_1 E_2 = \nu_2 E_1, \quad k(\alpha+\beta) = \frac{E_1+E_2}{2E_1E_2}.$$

Характеристичне рівняння (18) з врахуванням (27) зведеться до такого:

$$\mu^4 + \frac{E_1}{g+G}\left[1 + \frac{2\nu_1}{E_1}(g-G) + \frac{4gG(1-\nu_1\nu_2)}{E_1E_2}\right]\mu^2 + \frac{E_1}{E_2} = 0. \tag{28}$$

При $g=0$ характеристичне рівняння (28) переходить в рівняння класичної теорії пружності [2].

На закінчення відзначимо, що методи, які застосовуються до розв'язування задач класичної теорії анізотропного середовища, переносяться на даний варіант теорії несиметричної пружності, оскільки ці задачі математично аналогічні.

Узагальнення теорії на випадок тривимірного пружного середовища буде викладено окремо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Т. Л. Мартинович. Основні рівняння плоскої задачі несиметричної пружності. Вісник Львів. ун-ту, сер. фіз., хім. і мех-матем., 1968.

2. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.

3. Р. Д. Миндлин. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений. Сб. переводов, Механика, № 4, 1964.

4. В. А. Пальмов. Плоская задача теории несимметричной упругости. ПММ, т. XXVIII, в. 6, 1964.

5. Г. Н. Савин. Основы плоской задачи моментной теории упругости (конспект лекций). Изд-во Киев. гос. ун-та, 1965

6. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.