

УДК 539.311

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, І. О. НІЩЕНКО

ВПЛИВ НЕСИМЕТРИЧНОСТІ ТЕНЗОРА НАПРУЖЕНЬ НА КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ОТВОРІВ

1. Розв'язок плоскої задачі несиметричної теорії пружності $\left(\tau_{xy} \neq \tau_{yx}, \frac{\partial \mu_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu_y}{\partial x}\right)$ зводиться, згідно з роботою [1], до визначення аналітичних в області S , зайнятій пружним середовищем, функцій $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ і $\Omega_1(z)$, що задовольняють граничні умови

$$\alpha_g \varphi_1(t) + i \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = 2i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \text{const}; \quad (1.1)$$

$$\Omega_1(t) + \overline{\Omega_1(t)} e^{-2ia} = 2\mu_n e^{-ia} - M_0 e^{-2ia} - \overline{M_0}. \quad (1.2)$$

де

$$M_0 = \frac{i(\alpha_g - 1)}{4} [\varphi_1(z) - z \overline{\varphi_1'(z)}];$$

$$\alpha_g = \frac{g(2\lambda + 3\mu) + \mu(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + \mu - g)} = \frac{(3 - 2\nu)\eta + 1}{1 - \eta(1 - 2\nu)}; \quad (1.3)$$

λ, μ — пружні сталі Ламе; g — додаткова стала матеріалу; $\eta = \frac{g}{\mu}$;
 α — кут, що утворює нормаль n з віссю ox .

У випадку нескінченної області функції $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$ мають вигляд

$$\varphi_1(z) = -\frac{X + iY}{\pi(\alpha_g + \alpha_g)} \ln z + (B + iC)z + \varphi_0(z);$$

$$\psi_1(z) = \frac{\alpha_g(X - iY)}{\pi(\alpha_g + \alpha_g)} \ln z + (B' + iC')z + \psi_0(z),$$

де $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функції, голоморфні в області, зайнятій пружним середовищем, включаючи нескінченно далеку точку; $X = \sum_{k=1}^m X_k$; $Y =$

$= \sum_{k=1}^m Y_k$; X_k, Y_k — компоненти головного вектора зусиль, прикладених до контура L_k :

$$B = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{1 + \alpha_g}; \quad C = -\frac{2\tau_\infty^\infty}{1 - \alpha_g}; \quad B' = \sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty;$$

$$C' = 2\tau_\infty^\infty; \quad \alpha_g = \frac{\lambda + 3\mu + g}{\lambda + \mu - g} = \frac{3 - 4\nu + \eta(1 - 2\nu)}{1 - \eta(1 - 2\nu)}.$$

Якщо область S конформно відображається на область Σ за допомогою функції $z = \omega(\zeta)$, то граничні умови (1.1), (1.2) в перетвореній області матимуть вигляд

$$\alpha_g \varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 2i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \text{const}; \quad (1.4)$$

$$\Omega(\sigma) + \overline{\Omega(\sigma)} \frac{\sigma^2 \overline{\omega'(\sigma)}}{\rho^2 \omega'(\sigma)} = 2\mu_n \frac{\overline{\sigma \omega'(\sigma)}}{\rho |\omega'(\sigma)|} - M_0 \frac{\overline{\sigma^2 \omega'(\sigma)}}{\rho^2 \omega'(\sigma)} - \overline{M_0}; \quad (1.5)$$

$$\varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta); \quad \psi_1[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta); \quad \Omega_1[\omega(\zeta)] = \Omega(\zeta).$$

Компоненти напружень у криволінійній системі координат виражаються через комплексні потенціали таким чином:

$$\sigma_r + \sigma_\theta + 2i\tau_\infty = \overline{\Phi(\zeta)} + \alpha_g \Phi(\zeta);$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_r = -[\omega(\zeta) \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)} \overline{\Psi(\zeta)}] \frac{\overline{\zeta}^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)}; \quad (1.6)$$

$$\mu_r + i\mu_\theta = [M_0(\zeta) + \overline{\Omega(\zeta)}] \frac{\overline{\zeta \omega'(\zeta)}}{\rho |\omega'(\zeta)|};$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

Виходячи з даної постановки задачі несиметричної теорії пружності, розглянемо задачі про концентрацію напружень біля криволінійного отвору в пружній площині, що розтягується на нескінченності зусиллями p , які утворюють кут β з віссю ox . У цьому випадку напруження на нескінченності дорівнюють

$$\sigma_x^\infty = p \cos^2 \beta; \quad \sigma_y^\infty = p \sin^2 \beta; \quad \tau_\infty^\infty = p \sin \beta \cos \beta;$$

$$\tau_\infty^\infty = 0; \quad \mu_x^\infty = \mu_y^\infty = 0. \quad (1.7)$$

Для спрощення викладок будемо вважати, що край отвору вільний від зовнішніх зусиль. Враховуючи (1.7), комплексні потенціали матимуть вигляд

$$\varphi_1(z) = \frac{p}{1 + \alpha_g} z + \varphi_0(z); \quad \psi_1(z) = -pe^{-2i\beta} z + \psi_0(z). \quad (1.8)$$

2. Еліптичний отвір. У цьому випадку скористуємось відображенням зовнішності одиничного кола на зовнішність еліптичного отвору за допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right); \quad R = \frac{a+b}{2}; \quad m = \frac{a-b}{a+b}. \quad (2.1)$$

Підставивши формули (1.8) і (2.1) в (1.4) і враховуючи, що функції $\varphi_0(\zeta)$ і $\psi_0(\zeta)$ голоморфні при $|\zeta| > 1$, за допомогою інтегралів типу Коші одержимо

$$\begin{aligned}\varphi_0(\zeta) &= -\frac{pR}{\alpha_g} (m - e^{2i\beta}) \frac{1}{\zeta}; \\ \psi_0(\zeta) &= \frac{pR(m - e^{2i\beta})}{\alpha_g} \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta(m - \zeta^2)} - pR(1 - me^{-2i\beta}) \frac{1}{\zeta}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Згідно з формулою (1.8), функції напружень дорівнюватимуть

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \frac{pR}{1 + \alpha_g} \left[\zeta + \frac{(1 + \alpha_g)e^{2i\beta} - m}{\alpha_g} \frac{1}{\zeta} \right]; \\ \psi(\zeta) &= \frac{pR(m - e^{2i\beta})}{\alpha_g} \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta(m - \zeta^2)} - pR \left(\frac{1}{\zeta} + e^{-2i\beta} \zeta \right).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Знаючи $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$, з граничної умови (1.5) за допомогою інтегралів типу Коші легко знайти

$$\Omega(\zeta) = \frac{pRm(\alpha_g - 1)}{2\alpha_g} \cdot \frac{\zeta \sin 2\beta}{m - \zeta^2}.\quad (2.4)$$

Компоненти напружень визначаються за формулами (1.6), і поблизу контурних точок отвору для них одержуються такі вирази:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= p \left[1 - \frac{1 + \alpha_g}{\alpha_g} \frac{m(\cos 2\beta - \cos 2\theta + m) + \cos 2(\theta - \beta)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \right]; \quad \sigma_r = 0 \\ \tau_{\theta r} &= \frac{p(\alpha_g - 1)}{\alpha_g} \frac{m(\sin 2\theta - \sin 2\beta) + \sin 2(\beta - \theta)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2}; \quad \tau_{r\theta} = 0. \\ \mu_\theta &= -\frac{pR(\alpha_g - 1)}{2\alpha_g} \frac{m \cos 2\theta - \cos 2(\beta - \theta)}{\sqrt{1 - 2m \cos 2\theta + m^2}}. \quad \mu_r = 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

Якщо $\beta = 0$, то σ_θ досягають максимального значення при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$:

$$\sigma_{\theta \max} = p \left(1 + \frac{1 + \alpha_g}{\alpha_g} \frac{b}{a} \right) = Kp.\quad (2.6)$$

Найбільші за абсолютною величиною дотичні напруження будуть при $\theta = \frac{1}{2} \arccos \frac{2m}{1 + m^2}$:

$$\tau_{\theta r} = p \frac{1 - \alpha_g}{\alpha_g(1 + m)} = K_1 p.\quad (2.7)$$

Коефіцієнти концентрації K і K_1 залежать від пружних сталих матеріалу, і при зміні $0 \leq \eta < \infty$ вони лежать в межах *

$$1 + \frac{2}{3 - 2\nu} \frac{b}{a} \leq K \leq 1 + 2 \frac{b}{a}; \quad 0 \leq K_1 \leq \frac{4(1 - \nu)}{(3 - 2\nu)(1 + m)}.\quad (2.8)$$

* Тут і далі наведені результати для плоскої деформації, а у випадку узагальненого плоского напруженого стану треба скрізь замінити коефіцієнт Пуассона ν на $\frac{\nu}{1 + \nu}$.

Зокрема, при $\frac{b}{a} = 1$ одержимо випадок кругового отвору ($\nu=0$)

$$\frac{5}{3} \leq K \leq 3.$$

Дане співвідношення, яке встановлює межі можливої зміни коефіцієнта концентрації напружень біля кругового отвору в задачі Кірша, збігається з співвідношенням, одержаним В. А. Пальмовим на базі моментної теорії типу Косера. Значення K і K_1 для деяких значень η при $\nu=0,3$, $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ такі:

η	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	∞
K	2,333	2,168	2,087	1,914	1,788	1,689	1,618	1,558
K_1	0	0,188	0,315	0,530	0,686	0,803	0,897	0,972

На рис. 1 зображено розподіл величини $\frac{\sigma_\theta}{p}$ вздовж четверті контура еліптичного отвору. Пунктирна лінія відповідає класичній, а суцільна — несиметричній теоріям пружності при $\eta=0,15$; $\nu=0,3$, $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

3. Квадратний отвір. Функцію, яка конформно відображає зовнішність квадратного отвору з заокругленими кутами, візьмемо у вигляді

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta - \frac{1}{6\zeta^3} \right). \quad (3.1)$$

Опускаючи проміжні викладки, аналогічні викладкам п. 2, випишемо вирази для комплексних потенціалів:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= pR \left[6 \left(\frac{\cos 2\beta}{6\alpha_g + 1} + i \frac{\sin 2\beta}{6\alpha_g - 1} \right) \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{1 + \alpha_g} + \frac{1}{6\alpha_g(1 + \alpha_g)} \frac{1}{\zeta^3} \right]; \\ \psi(\zeta) &= pR \left[-e^{-2i\beta} \zeta + \frac{1 - \alpha_g}{\alpha_g} \frac{1}{\zeta} + \frac{78\alpha_g \left(\frac{\cos 2\beta}{6\alpha_g + 1} + i \frac{\sin 2\beta}{6\alpha_g - 1} \right) \zeta - 13\zeta^3}{6\alpha_g(2\zeta^4 + 1)} \right]; \\ \Omega(\zeta) &= \frac{ipR(\alpha_g - 1)}{2} \frac{4 \left(\frac{\cos 2\beta}{6\alpha_g + 1} + i \frac{\sin 2\beta}{6\alpha_g - 1} \right) \zeta^2 + \frac{1}{3\alpha_g}}{\zeta(2\zeta^4 + 1)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поблизу контурних точок отвору напруження виражаються формулами ($\beta=0$)

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= p \left[1 - \frac{1 + \alpha_g}{\alpha_g(6\alpha_g + 1)} \frac{18 \cos 2\theta + (6\alpha_g + 1)(2 \cos 4\theta + 1)}{5 + 4 \cos 4\theta} \right]; \quad \sigma_p = 0 \\ \tau_{\theta p} &= \frac{2p(1 - \alpha_g)}{\alpha_g(6\alpha_g + 1)} \frac{6\alpha_g \sin 2\theta + (6\alpha_g + 1) \sin 4\theta}{5 + 4 \cos 4\theta}; \quad \tau_{p\theta} = 0 \\ \mu_\theta &= \frac{pR(\alpha_g - 1)}{6\alpha_g(6\alpha_g + 1)} \frac{30\alpha_g \cos 2\theta + (6\alpha_g + 1) \cos 4\theta}{\sqrt{5 + 4 \cos 4\theta}}. \quad \mu_p = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Напруження σ_θ досягають максимальних значень поблизу заокруглених кутів квадрата

$$\sigma_{\theta \max} = \left(1 + \frac{1 + \alpha_g}{\alpha_g} \right) p = Kp. \quad (3.4)$$

Коефіцієнт K при $0 \leq \eta < \infty$ може змінюватися в межах

$$\frac{5-2\nu}{3-2\nu} \leq K \leq 3.$$

Величини коефіцієнтів K для деяких значень η і $\nu=0,3$ будуть такими:

η	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	∞
K	3	2,774	2,621	2,363	2,147	2,034	1,923	1,833

На рис. 2 наведений графік розподілу величини $\frac{\sigma_\theta}{p}$ вздовж чвергі квадратного отвору при $\eta=0,15$, $\nu=0,3$.

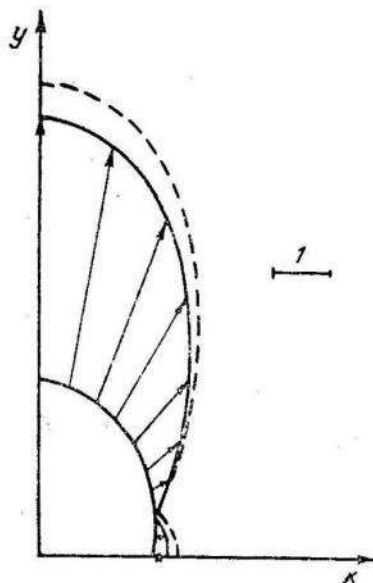


Рис. 1.

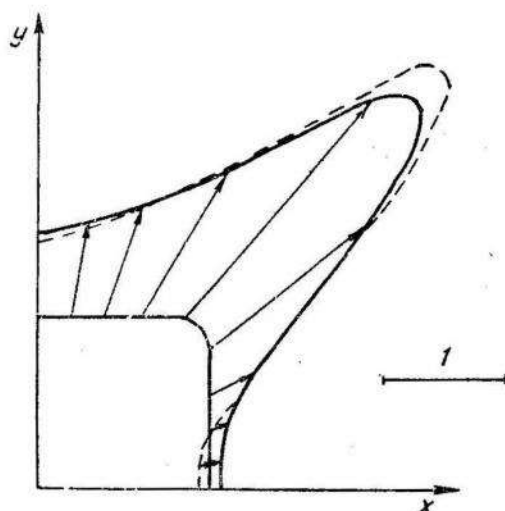


Рис. 2.

4. Трикутний отвір. Для трикутного отвору з заокругленими кутами візьмемо відображаючу функцію у вигляді

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{1}{3\zeta^3} \right). \quad (4.1)$$

Не зупиняючись на ході розв'язування задачі, наведемо готові вирази для комплексних потенціалів:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= pR \left[-\frac{1}{3\alpha_g(1+\alpha_g)} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{e^{2i\beta}}{\alpha_g} \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{1+\alpha_g} \right]; \\ \Psi(\zeta) &= \frac{pR}{\alpha_g} \left[\frac{11\zeta^2 - 3e^{2i\beta}\zeta^3 - 9e^{2i\beta}}{3(2-3\zeta^3)} - \alpha_g e^{-2i\beta} \zeta + \frac{1-\alpha_g}{\zeta} \right]; \\ \Omega(\zeta) &= \frac{ipR(\alpha_g-1)}{4\alpha_g} \frac{3e^{-2i\beta}\zeta^2 + 1}{\zeta(2-3\zeta^3)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для напружень на контурних точках отвору при $\beta = \frac{\pi}{2}$ одержуємо формули

$$\sigma_\theta = p \left[1 - \frac{1+\alpha_g}{\alpha_g} \frac{6(\cos \theta - \cos 3\theta) - 9 \cos 2\theta + 4}{13 - 12 \cos 3\theta} \right]; \quad \sigma_r = 0.$$

$$\begin{aligned}\tau_{\theta\rho} &= \frac{3p(\alpha_g - 1)}{\alpha_g} \frac{2(\sin \theta + \sin 3\theta) + 3 \sin 2\theta}{13 - 12 \cos 3\theta}; \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \\ \mu_\theta &= - \frac{pR(\alpha_g - 1)}{2\alpha_g} \frac{\cos 3\theta + \sin \theta - 3 \sin 2\theta}{\sqrt{13 - 12 \cos 3\theta}}. \quad \mu_\rho = 0.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Напруження σ_θ і $\tau_{\theta\rho}$, обчислені за формулами (4.3), досягають максимальних значень біля вершин трикутного отвору: перші при $\theta = 0$, а другі при $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \left[1 + \frac{5(1 + \alpha_g)}{\alpha_g} \right] p = Kp; \\ \tau_{\theta\rho} &= \frac{3\sqrt{3}(\alpha_g - 1)}{2\alpha_g} p = K_1 p.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Коефіцієнти концентрації напружень K , K_1 в залежності від значень η ($0 \leq \eta \leq \infty$) можуть змінюватися в межах

$$\frac{13 - 2\nu}{3 - 2\nu} \leq K \leq 11; \quad 0 \leq K_1 \leq \frac{6\sqrt{3}(1 - \nu)}{3 - 2\nu}. \quad (4.5)$$

Значення цих коефіцієнтів для деяких η і $\nu = 0,3$ наступні:

η	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	∞
K	11	9,870	9,108	7,818	6,882	6,472	5,615	5,166
K_1	0	0,586	0,980	2,051	2,136	2,505	2,793	3,025

На рис. 3 показано розподіл вздовж половини контура трикутного отвору величини $\frac{\sigma_\theta}{p}$, обчисленої за формулою (4.3) при $\eta = 0,15$, $\nu = 0,3$ (суцільна лінія) і за даними роботи [5] (пунктирна лінія).

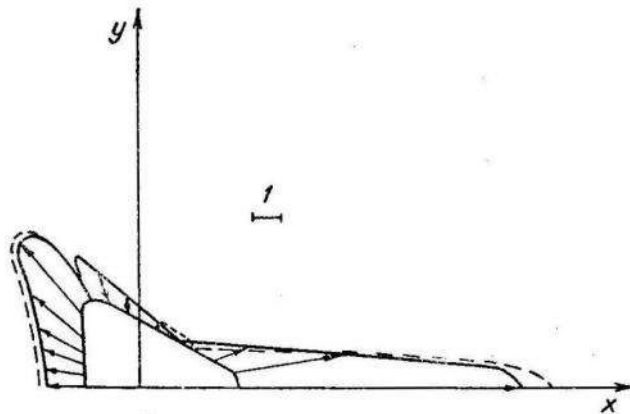


Рис. 3.

Розв'язки розглянутих задач при двоосьовому розтягу пластинки одержимо шляхом накладання розв'язків при $\beta = 0$ і $\beta = \frac{\pi}{2}$.

У постановці моментної теорії несиметричної пружності типу Косера розв'язані задачі про всесторонній розтяг пружної площини з криволінійним отвором у роботі [4] за допомогою наближеного метода збурення

форми границі з врахуванням другого наближення. Характер розподілу величини $\frac{\sigma_\theta}{p}$, порахованої на основі одержаних тут результатів, якісно близький до аналогічних графіків роботи [4].

На закінчення слід відзначити, що при $\alpha_g = 1$ ($g = 0$) наведені вище розв'язки задач переходять у відомі розв'язки класичної теорії [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. Т. Л. Мартинович. Основні рівняння плоскої задачі несиметричної пружності. Вісник Львів. ун-ту, сер. фіз.-хім.-мат., 1968.
 2. Р. Д. Миндлин. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений. Сб. переводов «Механика», № 4 (86), 1964.
 3. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
 4. Н. Ю. Немиш. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости. «Прикладная механика», т. 2, в. 4, 1966.
 5. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехиздат, 1951.
 6. В. А. Пальмов. Плоская задача теории несимметричной упругости. ПММ, т. 28, в. 6, 1964.
-