ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 Серія механіко-математична Випуск 4

УДК 539.311

Є. І. ЛУНЬ

ДО ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КРУГОВОГО ОТВОРУ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ

Розглядається один із шляхів дослідження концентрації напружень біля кругового отвору в циліндричній оболонці на основі уточненої теорії оболонок типу Тимошенка [2, 7], яка враховує деформації поперечних зсувів і дає можливість задовольняти п'ять граничних умов на контурі отвору.

1. Як показано в роботі [5], додатковий напружений стан, викликаний наявністю отвору в оболонці, можна знаходити, використовуючи ключову систему однорідних рівнянь теорії пологих оболонок і певні граничні умови на контурі отвору і на «нескінченності». У випадку циліндричної оболонки відповідна ключова система рівнянь, що одержується з основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка, має вигляд [1]

$$\Delta\Delta w + \underline{\frac{1+\nu}{Ehr}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta\varphi} + \frac{1}{RD}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0;$$

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{2Eh}{R}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \qquad (1)$$

$$\Delta\psi - \frac{3}{h^2}\,\psi = 0,$$

де невідомими функціями є $w(x, y)$ — прогин в напрямі нормалі до середньої поверхні оболонки: $\varphi(x, y)$ — функція напружень; $\psi(x, y)$ — функція, через яку виражаються кути повороту нормалі до середньої поверхні оболонки.

В дальшому для знаходження додаткового напруженого стану використовуватимемо систему рівнянь, яка одержується із системи (1) нехтуванням підкресленого члена, що спрощує розв'язок задачі і практично не впливає на результати.

Як відомо [5], перші два рівняння системи (1) (без підкресленого члена) введенням комплексної функції

$$\sigma(x, y) = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\,w - i\varphi \qquad (2)$$

зводяться до рівняння

$$\Delta\Delta\sigma + \frac{2ik^2}{R^2}\,\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = 0, \qquad (3)$$

де

$$k^4 = 3(1-\nu^2)\,\frac{R^2}{4h^2}. \qquad (4)$$

Отже, задача зводиться до знаходження функцій ψ та σ із третього рівняння системи (1) та рівняння (3).

Зусилля і моменти, віднесені до півгеодезичної системи координат (ϱ, λ), пов'язані з функціями ψ і σ співвідношеннями

$$
\begin{gathered}
T_\rho = -\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\mathrm{Im}\,\sigma; \quad T_\lambda = -\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\mathrm{Im}\,\sigma; \\
S_{\rho\lambda} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\mathrm{Im}\,\sigma; \\
N_\rho = -\frac{Eh}{1+\nu}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\rho}(f-w)\right]; \\
N_\lambda = \frac{Eh}{1+\nu}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\lambda}(f-w)\right]; \\
G_\rho = -D\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right) + \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \nu\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\right]f\right\}; \\
G_\lambda = D\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right) - \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right) + \nu\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right]f\right\}; \\
H_{\rho\lambda} = D(1-\nu)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\psi - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)\right],
\end{gathered}
\tag{5}
$$

де

$$
\begin{gathered}
f = w + \frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta w - \frac{2h(1+\nu)}{3ER(1-\nu)}\left[\cos^2\lambda\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \right. \\
\left. + \sin^2\lambda\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right) - \sin 2\lambda\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\right]\varphi.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

2. У випадку, коли пружний стан оболонки без отвору задається зусиллями $T_x = p$, $T_y = q$, розв'язок рівняння (3) має вигляд [3, 4]

$$
\begin{gathered}
\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\alpha\rho) J_n(\alpha\rho) + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \cos 2m\lambda \times \\
\times \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\alpha\rho)\left[J_{n-2m}(\alpha\rho) + I_{n+2m}(\alpha\rho)\right],
\end{gathered}
\tag{7}
$$

де C_n — комплексні сталі; $J_n(\alpha\varrho)$ — функція Бесселя першого роду; $H_n^{(1)}(\alpha\varrho)$ — функція Ганкеля; $\alpha = \frac{k}{2R}(1+i)$. Розв'язок третього рівняння системи (1) в цьому випадку можна записати у вигляді

$$
\psi = \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} K_{2m}\left(\frac{\sqrt{3}}{h}\rho\right)\sin 2m\lambda,
\tag{8}
$$

де $K_{2m}\left(\frac{\sqrt{3}}{h}\rho\right)$ — модифікована функція Бесселя другого роду; D_{2m} — дійсні сталі.

Підставляючи вирази (7) та (8) в формули (5), одержимо вирази для зусиль та моментів у вигляді рядів

$$
\begin{aligned}
T_\rho^* &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\rho)\cos 2m\lambda;\\
S_{\rho\lambda}^* &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\rho)\sin 2m\lambda;\\
T_\lambda^* &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\rho)\cos 2m\lambda;\\
N_\rho^* &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m(\rho)\cos 2m\lambda;\\
N_\lambda^* &= \sum_{m=1}^{\infty} e_m(\rho)\sin 2m\lambda;\\
G_\rho^* &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\rho)\cos 2m\lambda;\\
H_{\rho\lambda}^* &= \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\rho)\sin 2m\lambda;\\
G_\lambda^* &= \sum_{m=0}^{\infty} k_m(\rho)\cos 2m\lambda,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

де $a_m(\varrho),\ldots,\ k_m(\varrho)$ — ряди, які містять сталі $C_k=A_k+iB_k$ та D_{2m}. Загальні члени цих рядів не наводимо через їх громіздкість.

Граничні умови, які повинні задовольнятися на контурі отвору, мають вигляд:
у випадку вільного контуру

$$
T_\rho^*=0;\quad S_{\rho\lambda}^*=0;\quad N_\rho^*=0;\quad G_\rho^*=0;\quad H_{\rho\lambda}^*=0 \text{ при } \rho=\rho_0; \tag{10}
$$

у випадку, коли отвір закритий кришкою, яка передає лише перерізуючі зусилля, у виразі (10) потрібно лише замість умови $N_\rho^*=0$ взяти умову [6]

$$
w=w_0\cos\left(\frac{\rho_0}{R}\sin\lambda\right), \tag{11}
$$

де w_0 — нормальне переміщення центра кришки.
Із умов (10) одержуємо таку нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих A_k, B_k, D_{2m}:

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{mk}^{(t)}A_k+b_{mk}^{(t)}B_k\right)+\eta_m^0\left(\delta_t^3+\delta_t^4+\delta_t^5\right)d_m^{(t)}D_{2m}=
$$
$$
=-hp\left(\delta_m^0+\delta_m^1\right)\left(\delta_t^1+\delta_t^2\right), \tag{12}
$$

де $t=1, 2, 3, 4, 5$; $m=0, 1, 2, \ldots, \infty$ для $t=1, 3, 4$; $m=1, 2, \ldots, \infty$ для $t=2, 5$;

$$\delta_m^p = \begin{cases} 1 \text{ при } m = p; \\ 0 \text{ при } m \neq p; \end{cases} \qquad \eta_m^p = \begin{cases} 0 \text{ при } m = p; \\ 1 \text{ при } m \neq p; \end{cases}$$

$a_{mk}^{(t)}$, $b_{mk}^{(t)}$, $d_m^{(t)}$ — сталі, одержувані з формули (10) при врахуванні (9). Із системи рівнянь (12) знаходяться всі сталі, які входять у розв'язок поставленої задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Е. І. Лунь. Спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 3, 1967.
2. Б. Л. Пелех. Кандидатская диссертация. Львов. гос. ун-т, 1965.
3. К. А. Приварников, В. М. Чехов. Концентрація напружень навколо кругового отвору в циліндричній оболонці. ДАН УРСР, № 12, 1965.
4. Г. М. Савін, О. М. Гузь. До питання про концентрацію напружень навколо отворів у циліндричній оболонці. ДАН УРСР, № 1, 1964.
5. Г. М. Савін. Про концентрацію напружень навколо отворів у тонких пружних оболонках. Прикладна механіка, т. VII, вип. 1, 1961.
6. К. Ф. Черных. К проблеме определения концентраций напряжений возле отверстия в оболочке. Сб. «Концентрация напряжений», вып. 1, 1965.
7. М. П. Шереметьев, Е. И. Лунь. Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, 1964.