ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 Серія механіко-математична Випуск 4

УДК 539.377

І. М. ОСІВ

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В БЕЗМЕЖНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ

Розглядається безмежна ізотропна пластинка з еліптичним отвором. На краю пластинки задана температура

$$T(t)=\begin{cases}T_0 & \text{для } t\in[t_1,\ t_2],\\ 0 & \text{для } t\overline{\in}[t_1,\ t_2],\end{cases}\qquad t\in L. \tag{1}$$

Зовнішнє навантаження на краю і на безмежності пластинки відсутнє. Пластинка вважається теплоізольованою, віддача тепла відбувається лише на безмежності «ребрами» пластинки. Джерела тепла відсутні. Потрібно визначити температурне поле і температурні напруження в пластинці.

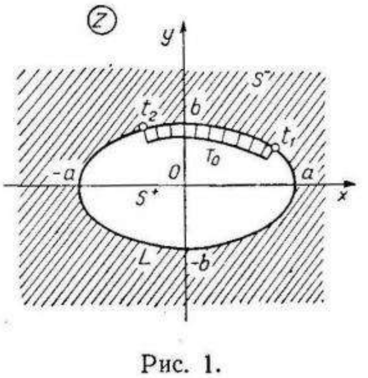

Рис. 1.

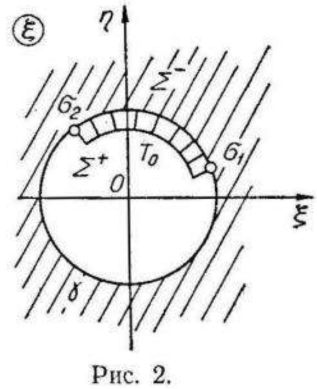

Рис. 2.

Відображаємо площину S^- (рис. 1) на зовнішність Σ^- одиничного кола γ (рис. 2) в площині $\zeta=\xi+i\eta$ за допомогою функції $z=\omega(\zeta)=$ $=R\left(\zeta+\dfrac{m}{\zeta}\right)$. Нехай σ_1 і σ_2 — точки на контурі γ, які відповідають точкам t_1 і t_2 на контурі L. Тоді гранична умова (1) перепишеться так:

$$T(\sigma)=\begin{cases}T_0 & \text{для } \sigma\in[\sigma_1,\ \sigma_2],\\ 0 & \text{для } \sigma\overline{\in}[\sigma_1,\ \sigma_2],\end{cases}\qquad \sigma\in\gamma. \tag{2}$$

Як показав Н. Н. Лебедєв [1], напружений стан площини S^- визначається в полярних координатах за формулами

$$\widehat{rr}+\widehat{\theta\theta}=4\operatorname{Re}\Phi(\zeta)-AT(\zeta); \tag{3}$$

$$\widehat{rr}+i\widehat{r\theta}=\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}-\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\omega(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)}+\overline{\omega'(\zeta)}\,\overline{\Psi(\zeta)}\right]+f(\zeta),$$

де $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ — голоморфні в Σ^- функції;

$$f(\zeta)=-\frac{A}{2}T(\zeta)+\frac{A}{2}\cdot\frac{\overline{\zeta^2}}{r^2}\cdot\frac{1}{\omega'(\zeta)}\int\frac{\partial T(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\omega'(\zeta)\,d\zeta; \tag{4}$$

$A=\dfrac{\alpha E}{1-\nu}$ — для плоскої деформації; $A=\alpha E$ — для узагальненого плоского напруженого стану; α — коефіцієнт температурного лінійного розширення матеріалу; E, ν — модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона; $T(\zeta)$ — температурне поле, яке знаходиться із рівняння Лапласа

$$\Delta_{\xi,\eta}T(\zeta)=0 \tag{5}$$

при граничних умовах (2).

Розв'язком рівняння (5) з граничними умовами (2) є гармонічна функція

$$T(\zeta)=\frac{T_0\theta_1}{2\pi}-\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{T(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{T_0}{2\pi}\left[\theta_1-i\left(\ln\frac{\overline{\zeta}-\overline{\sigma}_2}{\overline{\zeta}-\overline{\sigma}_1}+\ln\frac{\zeta-\sigma_1}{\zeta-\sigma_2}\right)\right]; \tag{6}$$

$$\theta_1=\arg\sigma_2-\arg\sigma_1.$$

Так знайдене температурне поле на безмежності набуває сталого значення $\dfrac{T_0\theta_1}{2\pi}$.

Продовжуємо $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$ з Σ^- в Σ^+ через незавантажені ділянки границі γ:

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)=-\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\cdot\omega'(\zeta)+\frac{\omega(\zeta)}{\zeta^2}\cdot\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)+$$

$$+\frac{1}{\zeta^2}\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\cdot\overline{\Psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\frac{\omega(\zeta)}{2\zeta^2}\cdot\frac{AT_0}{2\pi i}\left(\frac{\sigma_2\zeta}{\sigma_2-\zeta}-\frac{\sigma_1\zeta}{\sigma_1-\zeta}\right).\quad \zeta\in\Sigma^+ \tag{7}$$

Визначивши з виразу (7) комбінацію $\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)$ і підставивши в друге співвідношення (3), одержуємо вираз для напружень через одну функцію $\Phi(\zeta)$

$$\widehat{rr}+i\widehat{r\theta}=\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\omega'\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)}{\omega'(\zeta)}\left[\overline{\Phi(\zeta)}+\Phi\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\right]-$$

$$-\frac{AT(\zeta)}{2}-\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}\cdot\frac{\omega(\zeta)-\omega\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)}{\omega'(\zeta)}\left[\overline{\Phi'(\zeta)}-\frac{AT_0}{4\pi i}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}-\overline{\sigma}_2}-\frac{1}{\overline{\zeta}-\overline{\sigma}_1}\right)\right], \tag{8}$$

який на γ набуде вигляду

$$[\omega'(\sigma)\Phi(\sigma)]^+-[\omega'(\sigma)\Phi(\sigma)]^-=-\frac{\omega'(\sigma)AT(\sigma)}{2}.\quad \sigma\in\gamma \tag{9}$$

Методика рішення задачі (9) подана М. І. Мусхелішвілі. Використовуючи її, знаходимо комплексний потенціал $\Phi(\zeta)$.

$$\Phi(\zeta)=-\frac{AT_0}{4\pi i}\ln\frac{\zeta-\sigma_2}{\zeta-\sigma_1}+\frac{\overline{\gamma'}\zeta}{\zeta^2-m}+\Gamma.\quad \zeta\in\Sigma^+,\ \Sigma^- \tag{10}$$

Тут

$$\Gamma=\frac{AT_0\theta_1}{8\pi};\quad m=\frac{a-b}{a+b};\quad \gamma'=\frac{\varkappa AT_0(\overline{\sigma}_2-\overline{\sigma}_1)}{4\pi i(1+\varkappa)}; \tag{11}$$

$\varkappa$ — константа Колосова—Мусхелішвілі.

На основі першої залежності (3) і співвідношення (8) знаходимо напруження

$$\widehat{rr} = -CP \sin\frac{\theta_1}{2}\left[r^2\cos(\theta-\theta_2) - m\cos(\theta+\theta_2)\right];$$

$$\widehat{r\theta} = -CP \sin\frac{\theta_1}{2}\left[r^2\sin(\theta-\theta_2) + m\sin(\theta+\theta_2)\right]; \qquad (12)$$

$$\widehat{\theta\theta} = -CP_1 \sin\frac{\theta_1}{2}\left[r^2\cos(\theta-\theta_2) - m\cos(\theta+\theta_2)\right],$$

де позначено

$$P = \frac{r(r^2-1)(r^2-m^2)}{(r^4-2mr^2\cos 2\theta+m^2)^2};$$

$$P_1 = \frac{r\left[(r^2+1)(r^2+m^2)-4mr^2\cos 2\theta\right]}{(r^4-2mr^2\cos 2\theta+m^2)^2}; \qquad (13)$$

$$C = \frac{\varkappa A T_0}{\pi(1+\varkappa)}, \quad \theta_2 = \frac{\arg\sigma_2 + \arg\sigma_1}{2}.$$

На контурі γ напруження $\widehat{\theta\theta}$ мають вигляд:

$$\widehat{\theta\theta}\Big|_\gamma = -2C\sin\frac{\theta_1}{2}\cdot\frac{\cos(\theta-\theta_2) - m\cos(\theta+\theta_2)}{1+m^2-2m\cos 2\theta}. \qquad (14)$$

Розглянемо частинні випадки.

1. Нескінченна пластинка з круговим отвором ($m=0$)

$$\widehat{\theta\theta}\Big|_\gamma = -2C\sin\frac{\theta_1}{2}\cos(\theta-\theta_2). \qquad (15)$$

2. Безмежна пластинка з горизонтальною прямолінійною тріщиною довжиною $2a$ ($m=1$)

$$\widehat{\theta\theta}\Big|_\gamma = \sigma_x\Big|_L = -C\sin\frac{\theta_1}{2}\cdot\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta} = \mp\frac{aC\sin\frac{\theta_1}{2}\cdot\sin\theta_2}{\sqrt{a^2-x^2}}. \qquad (16)$$

3. Безмежна пластинка з вертикальною прямолінійною тріщиною висотою $2b$ ($m=-1$)

$$\widehat{\theta\theta}\Big|_\gamma = \sigma_y\Big|_L = -C\sin\frac{\theta_1}{2}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta} = \mp\frac{bC\sin\frac{\theta_1}{2}\cdot\cos\theta_2}{\sqrt{b^2-y^2}}.$$

Співвідношення (14), (15), (16) і (17) відображають розподіл температурних напружень $\widehat{\theta\theta}$ на контурі пластинки.

Висловлюю подяку І. О. Прусову за постановку цієї задачі та за цінні вказівки при її розв'язанні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лебедев. Температурные напряжения в теории упругости. М., 1937.
2. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.