ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1969 *Серія механіко-математична* *Випуск 4*

УДК 539.311

І. О. ПРУСОВ, О. В. ХИЖНЯКОВ

ДО ПИТАННЯ ПРО ЗГИН АНІЗОТРОПНИХ ПЛИТ

1. Основні рівняння. Розглянемо пружну рівновагу плоскої плити постійної товщини $2h$ із анізотропного однорідного матеріалу під дією тиску $q(x, y)$, нормального до її середньої площини, і навантаження на контурі L (вважаємо, що середня площина є горизонтально розташована координатна площина xy, причому координатна вісь z направлена вертикально вниз).

Дотичні напруження τ_{xz} і τ_{yz} на площинах $z=\pm h$ приймаємо рівними нулеві; будемо вважати, що напруження σ_z малі порівняно з σ_x і σ_y. Будемо вважати також, що матеріал плити має в кожній точці хоча б одну площину пружної симетрії, а саме: площину, паралельну до серединної площини. Позначивши пружні переміщення точок плити через u, v, w_0, будемо шукати їх у вигляді

$$u=h\left(\lambda a-\frac{1}{3}\delta^3\frac{\partial w}{\partial x}\right)+h\lambda_0\frac{\partial\Omega}{\partial y}; \tag{1.1}$$

$$v=h\left(\lambda b-\frac{1}{3}\delta^3\frac{\partial w}{\partial y}\right)-h\lambda_0\frac{\partial\Omega}{\partial x}; \tag{1.2}$$

$$w_0=w+\lambda'\delta^2(c_1+c_2\delta^2), \tag{1.3}$$

де $\lambda=\delta-\frac{1}{3}\delta^3$; $\lambda'=1-\delta^2$; $\lambda_0=\frac{5}{2}\lambda$; $\delta=\frac{z}{h}$; a, b, C_k, Ω — довільні функції від координат x, y; $w(x, y)$ — прогини точок серединної площини плити.

Поклавши

$$a=-\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x};\quad b=-\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial y};\quad \sigma_z=0, \tag{1.4}$$

на основі добре відомих формул [6] і закону Гука, розв'язаного відносно напружень, маємо

$$\sigma=-B_{1j}h\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-2B_{j6}h\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-B_{2j}h\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+h\lambda_0 L_j\Omega; \tag{1.5}$$

$$\tau=B_{k4}\left(\frac{\partial E}{\partial y}+\lambda_0'\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)+B_{k5}\left(\frac{\partial E}{\partial x}-\lambda_0'\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right), \tag{1.6}$$

де модулі пружності B_{ij} визначаються через коефіцієнти деформації a_{ij} [5]. Крім того, тут введені позначення

$$R=\lambda F+\delta w;\quad \lambda_0'=\frac{5}{2}\lambda;\quad E=\lambda'(-F+c_1\delta^2+c_2\delta^4);$$

$$L_j=(B_{1j}-B_{2j})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-B_{j6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{1.7}$$

Зауважимо, що $j=1$ відповідає значення σ_x; $j=2$—σ_y і $j=6$—τ_{xy}; також $k=4$ відповідає значення τ_{yz}, а $k=5$—τ_{xz}.

Як наслідок закону Гука при $\sigma_z=0$ отримаємо

$$(2\delta-4\delta^3)c_1+(4\delta^3-6\delta^5)c_2=-h^2\left[c_1^0\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+2c_3^0\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}+c_2^0\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\right.$$
$$\left.+(c_2^0-c_1^0)\lambda_0\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}+\lambda_0 c_3^0\nabla_1\Omega\right], \tag{1.8}$$

де

$$\nabla_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2};\quad c_j^0=a_{13}B_{1j}+a_{23}B_{2j}+a_{36}B_{j6}.$$

Рівняння (1.8) служить для визначення функцій c_k $(k=1,2)$, котрі знаходяться, як в роботі [3]. Наведемо готовий результат:

$$c_1=\frac{h^2}{12}\left[c_1^0\frac{\partial^2 R'}{\partial x^2}+2c_3^0\frac{\partial^2 R'}{\partial x\partial y}+c_2^0\frac{\partial^2 R'}{\partial y^2}+\frac{195}{2}\left\{(c_2^0-c_1^0)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}+c_3^0\nabla_1\Omega\right\}\right];$$

$$c_2=-\frac{7h^2}{12}\left[c_1^0\frac{\partial^2 R_0}{\partial x^2}+2c_3^0\frac{\partial^2 R_0}{\partial x\partial y}+c_2^0\frac{\partial^2 R_0}{\partial y^2}+\frac{25}{2}\left\{(c_2^0-c_1^0)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}+c_3^0\nabla_1\Omega\right\}\right], \tag{1.9}$$

де

$$R'=48w+39F,\ R_0=6w+5F.$$

Враховуючи рівності (1.5)—(1.6) та (1.9), маємо

$$M=-D_{1j}\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}-D_{2j}\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2}-2D_{j6}\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x\partial y}+2L_j^*\Omega; \tag{1.10}$$

$$N=-K_{4k}\left(\frac{\partial E^*}{\partial y}+\frac{5}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)-K_{5k}\left(\frac{\partial E^*}{\partial x}-\frac{5}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right), \tag{1.11}$$

де позначено

$$\overline{w}=w+\frac{4}{5}F;\quad D_{ij}=\frac{2}{3}h^3B_{ij};\quad K_{ij}=\frac{4}{3}hB_{ij};$$

$$M_x=h^2\int_{-1}^{1}\sigma_x\delta d\delta;\quad H_{xy}=h^2\int_{-1}^{1}\tau_{xy}\delta d\delta;\quad N_x=h\int_{-1}^{1}\tau_{xz}d\delta;$$

$$E^*=F-\frac{h^2}{2}\left[c_1^0\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}+2c_3^0\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x\partial y}+c_2^0\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2}+\right.$$
$$\left.+2\left\{(c_2^0-c_1^0)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}+c_3^0\nabla_1\Omega\right\}\right]; \tag{1.12}$$

$$L_j^*=(D_{1j}-D_{2j})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-D_{j6}\nabla_1.$$

При $j=1$, 2, 6 знаходимо відповідно M_x, M_y, H_{xy}; при $k=4$, 5 знаходимо N_y, N_x.

Задовольняючи рівняння рівноваги, які повинні задовольнятися в кожній точці пластинки, отримуємо на основі виразів (1.10)—(1.11), що функції $\overline{w}$, F і Ω задовольняють умови:

$$D_{11}\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^3\partial y}+2D_3\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial y^4}=q_1; \quad (1.13)$$

$$K_{55}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-K_{44}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x, y); \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\varepsilon_2\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}=\frac{5}{2}\eta\Omega, \quad (1.15)$$

причому

$$q_1=q+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[(D_{11}-D_3)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+(D_3-D_{22})\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}\right]-$$

$$-2\left[D_{16}\frac{\partial^4\Omega}{\partial x^4}+3(D_{26}-D_{16})\frac{\partial^4\Omega}{\partial x^2\partial y^2}-D_{26}\frac{\partial^4\Omega}{\partial y^4}\right];$$

$$D_3=D_{12}+2D_{66};\quad 2\eta=K_{44}+K_{55};\quad \nabla_2=\nabla_1+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y};$$

$$\varepsilon_1=D_{11}-D_{12}-D_{55}(c_2^0-c_1^0);\quad \varepsilon_2=D_{22}-D_{12}+D_{44}(c_2^0-c_1^0); \quad (1.16)$$

$$f(x, y)=(D_{11}+D_{55}c_1^0)\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^4}-(D_{22}+D_{44}c_2^0)\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial y^4}+(D_{55}c_2^0-D_{44}c_1^0)\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^2\partial y^2}-$$

$$-\frac{5}{2}K_{45}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Omega+2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla_2\Omega(D_{16}+c_3^0D_{55})-2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla_2\Omega(D_{26}+c_3^0D_{44}).$$

Знайдемо явний вираз функцій $\Omega(x, y)$ та $\overline{w}(x, y)$, задовольняючи три граничні умови на контурі плити, тобто умови, коли задані моменти та перерізуючі сили M_n, H_{nt}, N_n або прогини точок середньої площини $w(x, y)$ та похідна по нормалі від w, або похідна по параметру δ від переміщень u, v при $\delta=0$.

Відзначимо, що N_x та N_y можна знаходити, користуючись рівняннями

$$\begin{aligned} N_x&=-D_{11}\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial x^3}-D_3\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial x\partial y^2}-3D_{16}\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial x^2\partial y}-D_{26}\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial y^3}+2\left(\frac{\partial L_1^*}{\partial x}+\frac{\partial L_6^*}{\partial y}\right)\Omega;\\ N_y&=-D_{16}\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial x^3}-D_3\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial x^2\partial y}-3D_{26}\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial x\partial y^2}-D_{22}\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial y^3}+2\left(\frac{\partial L_6^*}{\partial x}+\frac{\partial L_2^*}{\partial y}\right)\Omega. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Рівняння (1.11) використовуються при практичному розв'язку задач для знаходження граничної умови для функції $F(x, y)$.

2. Зв'язок теорії з комплексним змінним. Наслідуючи С. Г. Лехницького [2], запишемо загальний вигляд прогинів:

а) у випадку різних комплексних параметрів ($\mu_1\neq\mu_2$)

$$\overline{w}=w^*+2\mathrm{Re}\,[w_1(z_1)+w_2(z_2)]; \quad (2.1)$$

б) у випадку однакових комплексних параметрів ($\mu_1=\mu_2$)

$$\overline{w}=w^*+2\,\mathrm{Re}\,[w_1(z_1)+\overline{z}_1 w_2(z_1)]. \quad (2.2)$$

Тут $w_1(z_1)$, $w_2(z_2)$ — довільні аналітичні функції комплексних змінних $z_1=x+\mu_1 y$, $z_2=x+\mu_2 y$; w^* — будь-який частковий розв'язок рівняння (1.13), а μ_1, μ_2 — корені рівняння

$$D_{22}\mu^4+4D_{26}\mu^3+2D_3\mu^2+4D_{16}\mu+D_{11}=0, \tag{2.3}$$

дослідженням якого займався С. Г. Лехницький [1, 2].

На основі виразів (1.10), (1.17) із врахуванням (2.1), (2.3) (випадок попарно рівних коренів не розглядаємо) отримуємо

$$\begin{aligned} M_x&=M''_x-2\,\mathrm{Re}\,[p_1\Phi(z_1)+p_2\Psi(z_2)];\\ M_y&=M''_y-2\,\mathrm{Re}\,[q_1\Phi(z_1)+q_2\Psi(z_2)];\\ H_{xy}&=H''_{xy}-2\,\mathrm{Re}\,[r_1\Phi(z_1)+r_2\Psi(z_2)]; \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} N_x&=N''_x-2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1 s_1\Phi'(z_1)+\mu_2 s_2\Psi'(z_2)];\\ N_y&=N''_y+2\,\mathrm{Re}\,[s_1\Phi'(z_1)+s_2\Psi'(z_2)], \end{aligned} \tag{2.5}$$

де

$$\begin{gathered} p_k=D_{11}+D_{12}\mu_k^2+2D_{16}\mu_k;\quad M''_x=M'_x+2L_1^*\Omega;\\ q_k=D_{12}+D_{22}\mu_k^2+2D_{26}\mu_k;\quad M''_y=M'_y+2L_2^*\Omega;\\ r_k=D_{16}+D_{26}\mu_k^2+2D_{66}\mu_k;\quad H''_{xy}=H'_{xy}+2L_6^*\Omega;\\ s_k=D_{11}\mu_k^{-1}+3D_{16}+D_3\mu_k+D_{26}\mu_k^2;\quad N''_x=N'_x+2\left(\frac{\partial L_1^*}{\partial x}+\frac{\partial L_6^*}{\partial y}\right)\Omega;\\ \Phi(z_1)=\frac{d^2}{dz_1^2}w_1(z_1);\ \Psi(z_2)=\frac{d^2}{dz_2^2}w_2(z_2);\quad N''_y=N'_y+2\left(\frac{\partial L_6^*}{\partial x}+\frac{\partial L_2^*}{\partial y}\right)\Omega, \end{gathered} \tag{2.6}$$

причому M_x', ..., N_y' обчислюються за формулами (1.10), (1.17), де потрібно замінити $\overline{w}$ на w^*, а Ω (1.15) знаходиться незалежно від $\overline{w}$ (1.13).

Як бачимо, формули (2.4)—(2.5) збігаються з аналогічними формулами С. Г. Лехницького з точністю до перших доданків, які і містять уточнення; тому всі дослідження, що стосуються даного питання, можна знайти в роботах [1, 2, 4].

Необхідно зауважити, що в майбутньому будемо вважати, що для будь-якої багатозв'язної області S, яку займає плита, функція $\Omega(x, y)$ однозначна і прямує до нуля на безмежності.

3. Приклад. Розглядаючи шарнірно оперту по всьому контуру ортотропну прямокутну пластинку, яка згинається нормально прикладеним навантаженням, розподіленим за законом $q\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$ (q — інтенсивність навантаження в центрі пластинки), аналогічно роботі [5] отримуємо

$$w=\left(1+\frac{4Q_1}{5Q_2}\right)\frac{q}{Q}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \tag{3.1}$$

де

$$Q=D_{11}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4+2D_3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+D_{22}\left(\frac{\pi}{b}\right)^4;\quad Q_2=K_{55}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2-K_{44}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2;$$

$$Q_1=(D_{11}-D_{55}c_1^0)\left(\frac{\pi}{a}\right)^4+(D_{44}c_1^0-D_{55}c_2^0)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+$$
$$+(D_{44}c_2^0-D_{22})\left(\frac{\pi}{b}\right)^4.$$

Цікаво відзначити, що у випадку трансверсально ізотропної пластинки маємо рівняння

$$w = w_0 \left[1 + \frac{2}{5} \frac{\pi^2 h^2}{1-\nu} \left(2 \frac{G}{G'} - \nu' \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{E}{E'} \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right], \tag{3.2}$$

де w_0 [7] має вигляд

$$w_0 = \frac{3a^4 b^4 (1-\nu^2)}{2\pi^4 E h^3 (a^2+b^2)^2} q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

При $\nu=0$ рівняння (3.2) збігається з аналогічним рівнянням [5], для якого наведені розрахунки ($\nu=0$) для двох співвідношень $2ha^{-1}$ в центрі пластинки. З таблиць видно, що найбільше уточнення дає врахування поперечних зсувів (для ізотропії при $2ha^{-1}=1/5$ і при $\nu=0{,}3$ це уточнення становить 22%).

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
2. С. Г. Лехницкий. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ, новая серия, т. II, вып. 2, 1938.
3. И. А. Прусов. Об одном представлении изгиба пластин. В сб. «Концентрация напряжений», вып. 2. К., «Наукова думка», 1968.
4. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., 1951.
5. С. С. Амбарцумян. Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.
6. А. Ляв. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
7. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. М., 1948.