

ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ВІСНИК

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 4

1969

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. ІВАНА ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 4

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
Львів—1969

У збірнику вміщено статті з теорії функцій, диференціальних рівнянь, геометрії, алгебри, теорії пружності і аеродинаміки.
Розрахований на наукових працівників.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Гольдберг А. А., Гриліцький Д. В. (відповідальний секретар), Кованько О. С. (відповідальний редактор), Костенко В. Г., Ліхачов В. О., Соколов І. Г.

МАТЕМАТИКА

УДК 514.54

Т. В. СТРОЧИК

ПРО КОНФОРМНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ ПІВСМУГ

Метою цієї статті є виведення асимптотичної формули для функції, що здійснює конформне однолисте відображення півсмуг з деякого класу на прямолінійні півсмуги.

Будемо розглядати півсмуги S певного вигляду. Нехай l — деяка ламана в z -площині без самоперетинів з вершинами $P_0, P_1, P_2, \dots$, $(P_0 \neq \infty)$, кінцем в $z = \infty$, кутами при вершинах $\angle P_{n+1}P_nP_{n-1} = 2\pi\alpha_n$ ($\alpha^* < \alpha_n < 1 - \alpha^*, \alpha^* > 0$), $n = 0, 1, 2, \dots$, на віддалі $\frac{1}{2}$ від кожного відрізка

ламаной вліво і вправо від нього проведемо паралельні до нього прямі. Прямі, паралельні відрізкам $P_{n-1}P_n, P_nP_{n+1}$, перетинаються на бісектрисі $\angle P_{n+1}P_nP_{n-1}$ в точках A_n, B_n (A_n лежить вправо від P_n , B_n — вліво). Припустимо, що бісектриси кутів $\angle P_{n+1}P_nP_{n-1}$ і $\angle P_{n+2}, P_{n+1}, P_n$ перетинаються на віддалі, більшій, ніж $\frac{1}{2}$ від P_nP_{n+1} . Позначимо ламану з вер-

шинами в точках A_n через l^+ , ламану з вершинами B_n — через l^- . Будемо вважати, що ламані l^+, l^- і відрізок A_0B_0 обмежують деякий жорданів трикутник S , який називатимемо півсмугою з сталою шириною 1^* . Півсмугу S можна розглядати як множину, яка складається з об'єднання зчисленної множини трапецій $A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}$, які ми позначимо через T_n , з середньою лінією P_nP_{n+1} , висотою 1 і спільними бічними сторонами. Припустимо, що в кожному трапецію T_n можна вписати прямокутники з висотою 1 і основами, що лежать на основах T_n . Нехай d_n — довжина основи найбільшого такого прямокутника. Припустимо, що

$d_n \geq d, n = 0, 1, 2, \dots$. Нехай $b'_n = \frac{1}{3} \min \{d_{n-1}, d_n\}, b'_0 = \frac{1}{3} d_0, C''_n$ — прямо-

кутна трапеція, що лежить в T_n , має своїми вершинами точки A_n, B_n , висоту 1 і довжину меншої основи b'_n, b_n — довжина основи C''_n , що лежить на l^- ($b_n = b'_n$, якщо $\alpha_n \geq \frac{1}{2}$, $b_n = b'_n + \operatorname{tg} \pi \beta_n$, якщо $\alpha_n < \frac{1}{2}$, де $\beta_n = \frac{1}{2} - \alpha_n$), причому всі b_n обмежені знизу деяким числом $b, b \geq \frac{\alpha}{3} > 0$.

Позначимо, крім цього, через C'_n трапецію, суміжну з C''_n , що лежить в T_{n-1} , і має такі ж розміри, що й C''_n . Трапеція T_n складається з двох прямокутних трапецій C''_n, C'_{n+1} і прямокутника G_n , довжину основи якого

* Півсмугу S з сталою шириною можна було б визначити як деяку ріманову поверхню, не вимагаючи відсутності самоперетинів l^+ і l^- .

позначимо через a_n . З кожною точкою A_n зв'яжемо локальну декартову систему координат з початком в A_n і осями x_n, y_n такими, щоб додатний напрям осі x_n збігався з напрямом відрізка $A_n A_{n+1}$.

Теорема. Якщо β_n і b_n такі, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta_n|}{e^{\pi b_n (1-\epsilon)}} < \infty, \quad (1)$$

при деякому $\epsilon > 0$, то функція $w = w(z)$, що здійснює конформне і одностороннє відображення S на $S_0 = \{u > 0, 0 < v < 1\}$, $w = u + iv$, має вигляд

$$w(z_n) = \begin{cases} \lambda + D_{n-1} + M_n - b_n + z_n + 0(1), & \text{якщо } z_n \in G_n; \\ \lambda + D_{n-1} + f(z_n) + 0(1), & \text{якщо } z_n \in C_n; \\ \lambda + D_{n-1} + \overline{f(z_n l^{2ia_n})} + 0(1), & \text{якщо } z_n \in C'_n, \end{cases}$$

де λ — деяка дійсна стала, $0(1)$, рівномірно прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$,

$$f(z_n) = \frac{i \sqrt{1+q_n}}{2K(q_n^{\frac{1}{2}}(1+q_n)^{-\frac{1}{2}})} \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t+q_n)}},$$

z_n і s зв'язані між собою співвідношенням ($z_n \in C'_n + C_n$, $s \in \{\operatorname{Im} s \geq 0\}$):

$$z_n = \frac{i \sqrt{1+q_n}}{\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta_n, 1, \frac{q_n}{1+q_n}\right)} \int_0^s t^{-\frac{1}{2} - \beta_n} (t-1)^{-\frac{1}{2}} (t+q_n)^{-\frac{1}{2} + \beta_n} dt;$$

спеціальні функції $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $F(k, \varphi)$, $K(k)$ мають той же зміст, що і в [3], M_n — модуль C_n , q_n — визначається з рівності

$$M_n = K\left((1+q_n)^{-\frac{1}{2}}\right) / K\left(q_n^{\frac{1}{2}}(1+q_n)^{-\frac{1}{2}}\right);$$

$$D_n = \sum_{k=0}^n (M_k + a_k + M_{k+1}), \quad D_{-1} = 0.$$

Варшавським [1] виведена асимптотична формула для функції, що здійснює конформне відображення, при умовах, які в нашому випадку

зводяться до вимоги, щоб $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n| < \infty$. Очевидно, умову (1) задовольняє

більш широкий клас півсмуг.

Відзначимо, що величини β_n, q_n, b_n зв'язані між собою співвідношенням

$$b_n = \frac{(1+q_n)^{\beta_n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta_n\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \beta_n, 1 - \beta_n, \frac{1}{1+q_n}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - \beta_n) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta_n, 1, \frac{q_n}{1+q_n}\right)} = \varphi(q_n, \beta_n).$$

Тому що b_n обмежені знизу додатною сталою b , то q_n , що є відрізками на дійсній осі площини s , в які переходять відрізки b_n при конформному відображенні за формулою Кристофеля—Шварца (модуль M_n обмежений знизу), обмежені зверху певним числом Q .

Д о в е д е н н я. На основі прямокутника G_n від її кінців відкладемо відрізки довжиною h , $h > 0$, $2h > a_n$. Таке h можна вибрати, тому що

довжини основ T_n обмежені знизу. Прямокутник з висотою l і основою h позначимо через H з тими самими індексами, що й суміжна з ним прямокутна трапеція. Нехай $G_n^* = G_n - H_n' - H_{n+1}'$. Відобразимо квазіконформно S на півсмуку S_1 в комплексній площині $\zeta = \xi + i\eta : \{0 < \xi < R \leq \infty, 0 < \eta < 1\}$ так, щоб кожний шестикутник $H_n' + C_n' + C_n'' + H_n'' + G_n^*$ перейшов в прямокутник $\{D_{n-1} - h - M_n < \xi < D_n - h - M_{n+1}, 0 < \eta < 1\}$ площини за допомогою функції $\zeta(z_n)$:

$$\zeta(z_n) = \begin{cases} D_{n-1} - \overline{\Phi(z_n e^{2ia_n})}, & \text{якщо } z_n \in H_n'; \\ D_{n-1} - \overline{f(z_n e^{2ia_n})}, & \text{якщо } z_n \in C_n'; \\ D_{n-1} - \overline{f(z_n)}, & \text{якщо } z_n \in C_n''; \\ D_{n-1} - \Phi(z_n), & \text{якщо } z_n \in H_n''; \\ D_{n-1} + M_n - b_n + z_n, & \text{якщо } z_n \in G_n^*. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2_1) \\ (2_2) \\ (2_3) \\ (2_4) \\ (2_5) \end{matrix}$$

Тут

$$\Phi(z_n) = x_n + i \left[y_n + \frac{b_n + h - x_n}{h} \left(\frac{F(q_n^{\frac{1}{2}}(1+q_n)^{-\frac{1}{2}}, \gamma(p_n))}{K(q_n^{\frac{1}{2}}(1+q_n)^{-\frac{1}{2}})} - y_n \right) \right],$$

а y_n зв'язане з p_n співвідношенням

$$y_n = \frac{2(1+q_n)^{\beta_n}}{\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta_n, 1, q_n/(1+q_n)\right)} \int_0^{\gamma(p_n)} \left(1 - \frac{q_n}{1+q_n} \sin^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2} + \beta_n} d\varphi.$$

де

$$\gamma(p_n) \arcsin \left((p_n - 1)^{\frac{1}{2}} p_n^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Кожна з функцій (2) відображає відповідний чотирикутник із S на прямокутник із S_1 , причому прямокутники, одержані внаслідок відображення суміжних чотирикутників, суміжні, і відповідні функції на суміжних сторонах чотирикутників співпадають. Функції (2₂), (2₃), (2₅) здійснюють конформне відображення, решта — квазіконформне. Півсмуку S_1 відобразимо квазіконформно на S_0 за допомогою функції $w(z_n(\zeta))$. Якщо при цьому характеристика $p(\zeta)$ така, що

$$\iint_{S_1} (p(\zeta) - 1) d\xi d\eta < \infty,$$

то, згідно з теоремою Тейхмюллера—Белінського ([2], див. також [4]) при $n \rightarrow \infty$, маємо $R = \infty$ і

$$w(z) = \lambda + \zeta(z) + o(1),$$

де λ — деяка дійсна стала.

Тому що відображення S на S_0 конформне, то $p_{w/\zeta} = p_{z/\zeta} = p'(\zeta)$ і

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (p(\zeta) - 1) d\xi d\eta &= \iint_S (p(z_n) - 1) \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} dx dy < \\ &< 2 \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{H_n} (p(z_n) - 1) \frac{D(\xi, \eta)}{D(x_n, y_n)} dx_n dy_n. \end{aligned}$$

Оцінімо кожен з інтегралів останньої суми. Для знаходження похідних $\xi_{x_n}, \xi_{y_n}, \eta_{x_n}, \eta_{y_n}$ будемо користуватися формулами (24) (де індекс n для зручності будемо пропускати). Одержуємо

$$\xi_x = 1; \xi_y = 0;$$

$$\eta_x = \frac{1}{h} \left\{ \frac{F\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}, \gamma(p)\right)}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)} - y \right\} = f_2^*(p);$$

$$\eta_y = 1 + \frac{x}{h} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta, 1, q/(1+q)\right)}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)} \left(\frac{p}{p+q}\right)^\beta - 1 \right\} = 1 + \frac{x}{h} f_1^*(p);$$

$$\xi_x - \eta_y = -\frac{x}{h} f_1^*(p); \quad \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y = 1 + \frac{x}{h} f_1^*(p).$$

Розглянемо функції $f_1^*(p)$ і $f_2^*(p)$ на $[1, \infty)$. Нехай $\lim_{p \rightarrow \infty} (p) = f_1^*(\infty)$. Функція $f_1^*(p)$ монотонно зростає на $[1, \infty)$, тому $\max_{p \in [1, \infty)} |f_1^*(p)|$ досягається на кінцях цього проміжка. Ми маємо

$$\begin{aligned} f_1^*(1) &= \frac{1}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)(1+q)^\beta} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(1+q)^\beta} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \right\} = \frac{1}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)(1+q)^\beta} \times \\ &\quad \times \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (1+q \cos^2 \varphi)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} d\varphi; \\ f_1^*(\infty) &= \frac{1}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} - 1 = \\ &= \frac{1}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} d\varphi. \end{aligned}$$

Якщо $\alpha \leq \frac{1}{2}, \beta \geq 0$, то $f_1^*(1) \leq 0, f_1^*(\infty) \geq 0$; якщо ж $\alpha > \frac{1}{2}, \beta < 0$, то $f_1^*(1) > 0, f_1^*(\infty) < 0$. Тому

$$|f_1^*(p)| \leq \max \left\{ \frac{1}{(1+q)^\beta} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (1+q \cos^2 \varphi)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} d\varphi \right|, \frac{1}{K\left(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}\right)} \right\},$$

$$\left| \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} d\varphi}{K(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}})} \right| \leq \frac{|(1+q)^{-\beta} - 1|}{K(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}})} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} \leq C_1 |1 - (1+q)^{-\beta}| \leq C_2 q |\beta|$$

(через C з індексами будемо позначати додатні сталі, які не залежать від n). Нехай $N(q, \beta) = \frac{\pi}{2} K(q^{\frac{1}{2}}(1+q)^{-\frac{1}{2}}) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta, 1, \frac{q}{1+q}\right)$, тоді

$$|f_2^*(p)| = \frac{1}{N(q, \beta)} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} \int_0^{\gamma(p)} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\gamma(p)} \frac{(1+q)^\beta d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} - \beta}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \right| =$$

$$= \frac{1}{N(q, \beta)} \left| F\left(\sqrt{\frac{q}{1+q}}, \gamma(p)\right) \left[\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} + \beta}} - \right. \right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \right] + K\left(\sqrt{\frac{q}{1+q}}\right) \times$$

$$\times \left[\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} - \int_0^{\gamma(p)} \frac{(1+q)^\beta d\varphi}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2} - \beta}} \right] \leq \frac{1}{N(q, \beta)} \times$$

$$\times \left\{ F\left(\sqrt{\frac{q}{1+q}}, \gamma(p)\right) \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{-\beta} - 1}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} d\varphi \right| + \right.$$

$$\left. + K\left(\sqrt{\frac{q}{1+q}}\right) \left| \int_0^{\gamma(p)} \frac{1 - (1+q \cos^2 \varphi)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} d\varphi \right| \right\} \leq \frac{K\left(\sqrt{\frac{q}{1+q}}\right)}{N(q, \beta)} \times$$

$$\times \left\{ \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{-\beta} - 1}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} d\varphi \right| + \left| \int_0^{\gamma(p)} \frac{1 - (1+q \cos^2 \varphi)^\beta}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} d\varphi \right| \right\}.$$

Якщо $\beta \geq 0$, то $\left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{-\beta} - 1 \geq 0$, $1 - (1 + \cos^2 \varphi)^\beta \leq 0$,
тому

$$|f_2^*(p)| \leq \frac{2[(1+q)^\beta - 1]}{\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2}-\beta} d\varphi} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{q}{1+q} \sin^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \leq \\ \leq 2[(1+q)^\beta - 1].$$

Аналогічним міркуванням при $\beta < 0$ одержуємо, що $|f_2^*(p)| \leq 2[(1+q)^{-\beta} - 1]$. Таким чином,

$$|f_2^*(p)| \leq 2[(1+q)^{|\beta|} - 1] \leq C_2 q |\beta|.$$

Тепер

$$\iint_{H_n^*} (p(z_n) - 1) \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} dx dy \leq \int_0^h \int_0^1 \left[\frac{x^2}{h^2} f_1^*(p) + f_2^*(p) \right] dx dy + \\ + \int_0^h \int_0^1 \left| \frac{x}{h} f_1^*(p) + f_2^*(p) \right| \left(1 + \frac{x}{h} f_1^*(p) \right) dx dy \leq C_3 q |\beta|.$$

Отже,

$$\iint_{S_1} (p(\zeta) - 1) d\xi d\eta \leq C \sum_{n=0}^{\infty} q_n |\beta_n|.$$

При $q_n \rightarrow 0$ $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta_n, 1, \frac{q_n}{1+q_n}\right) \rightarrow 1$ (див. [3]),

$$F\left(\frac{1}{2} - \beta_n, \frac{1}{2}, 1 - \beta_n, \frac{1}{1+q_n}\right) \sim \frac{\Gamma(1 - \beta_n)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta_n\right)} \ln\left(1 + \frac{1}{q_n}\right).$$

Отже, при $q_n \rightarrow 0$ маємо $\pi b_n \sim -\ln q_n$ рівномірно відносно β_n . В силу неперервності для довільного $\varepsilon > 0$ і достатньо малих q_n , $q_n \leq q_0$ має місце

$$q_n < C \exp[\pi b_n (1 - \varepsilon)]. \quad (3)$$

Покажемо, що існує така стала $C_0 \geq C$, що для всіх $q_n \in (0, Q)$ ($Q < \infty$) виконується $q_n < C_0 \exp[\pi b_n (1 - \varepsilon)]$. Нехай $L = \max \varphi(x, y)$ при $q_0 \leq x \leq Q$,

$|y| \leq \frac{1}{2} - \alpha^*$. Тоді в області $\left\{q_0 < q_n < Q, \left|\beta_n\right| < \frac{1}{2} - \alpha^*\right\}$ виконується нерівність $q_n < Q \leq Q \exp[\pi(L - b_n)(1 - \varepsilon)]$. За C_0 можна взяти величину $Q \exp[\pi L(1 - \varepsilon)]$. Враховуючи це, одержуємо

$$\iint_{S_1} (p - 1) d\xi d\eta < C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta_n|}{e^{\pi b_n (1 - \varepsilon)}}.$$

Останній ряд збігається внаслідок (1).

На закінчення висловлюю подяку А. А. Гольдбергу за допомогу і керівництво цією роботою.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Е. Варшавский. Конформное отображение бесконечных полос. Сб. переводов «Математика», 2, № 4 (1958).
 2. П. П. Белинский. Поведение квазиконформного отображения в изолированной особой точке. Уч. зап. Львов. ун-та, 29, сер. мех.-матем., вып. 6 (1954).
 3. Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. I. Пер. с англ. М.—Л., Гостехиздат, 1934.
 4. А. А. Гольдберг, Т. В. Строчик. Конформное отображение симметричных полуполос и угловых областей. Лит. мат. сб., 6, № 2 (1966).
-

УДК 517.512

У. А. МИШКОВЕЦЬ

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ СПЕКТРАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ

Розглядається простір комплекснозначних функцій на дійсній прямій, які задовольняють таким умовам:

$$I. \quad \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = \|f\| < \infty.$$

II. Спектральна функція

$$A_f(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

визначена для всіх дійсних чисел $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Звичайним шляхом доводиться, використовуючи нерівність Бесселя, що спектральна функція $A_f(\lambda)$ відмінна від нуля не більше як на зчисленій множини значень аргументу λ .

Множина комплекснозначних чисел $A_f(\lambda_n) \neq 0$ називається коефіцієнтами Фур'є—Бора, а дійсні числа λ_n — показниками Фур'є—Бора.

Функціям, які задовольняють умовам I, II, ставиться у відповідність ряд Фур'є—Бора

$$f(x) \sim \sum_{(n)} A_f(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}.$$

Теорема. Спектральна функція $A_f(\lambda)$ задовольняє нерівність

$$|A_f(\lambda) - A_f(\lambda_0)| \leq \sqrt{2} \|f\|, \quad (1)$$

де λ_0 — довільно фіксоване.

Д о в е д е н н я. З нерівності Буняковського—Шварца

$$\begin{aligned} |A_f(\lambda) - A_f(\lambda_0)| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda_0 x}) f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda_0 x}|^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

та рівності $|e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda_0 x}|^2 = 2[1 - \cos(\lambda - \lambda_0)x]$ одержуємо нерівність (1).

Н а с л і д о к 1. Якщо $\|f\|=0$, то $A_f(\lambda) \equiv 0$. Справді, при цій умові маємо $A_f(\lambda) \equiv A_f(\lambda_0)$. Якщо $\lambda_0=0$, то

$$|A_f(0)| = \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) dx \right| \leq \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = \|f\| = 0.$$

Тому $A_f(\lambda) \equiv A_f(0)$.

Н а с л і д о к 2. Якщо $A_f(\lambda) \not\equiv 0$, то $\|f\| > 0$.

Цей факт очевидний і очевидно, що наслідки 1 і 2 є еквівалентні.

Н а с л і д о к 3. Якщо $\|f-g\|=0$, то $A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \equiv 0$.

Позначимо через $A_h(\lambda)$ спектральну функцію різниці $h(x) = f(x) - g(x)$. З нерівності (1) будемо мати

$$|A_h(\lambda) - A_h(\lambda_0)| \leq \sqrt{2} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |h(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = \sqrt{2} \|f-g\|.$$

Якщо $\|f-g\|=0$, то дійсно $A_h(\lambda) = A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \equiv 0$.

Н а с л і д о к 4. Для того, щоб ряди Фур'є—Бора функцій $f(x)$ і $g(x)$ не співпадали, необхідною умовою є виконання нерівності $\|f-g\| > 0$.

УДК 513.015.2

Г. Л. БУЙМОЛА

ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРАЦЯХ РАДЯНСЬКИХ ВЧЕНИХ

Одну з яскравих сторінок в історії вітчизняної проективної геометрії вписали видатні російські геометри К. О. Андреев (1848—1921) і О. К. Власов (1868—1922). Відомий радянський вчений і педагог Д. Ф. Єгоров вважав, що К. О. Андреев як проективіст не мав собі рівних серед російських математиків, а його докторська дисертація повинна бути «настольною книгою для всякого російського геометра» [1].

О. К. Власов перший очолив радянську школу синтетичної і в першу чергу проективної геометрії і керував нею до 1922 року.

Найвидатнішим радянським геометром синтетичного напрямку був Н. О. Глаголев (1888—1945). Протягом багатьох років він керував науковим семінаром з синтетичної геометрії при інституті математики Московського державного університету. У своїх роботах Н. О. Глаголев опрацював теорію проективного числення (числення вурфів) і розв'язав задачу побудови всіх алгебраїчних комутативних тіл, елементами яких є точки або групи точок простору, причому арифметичні дії виконуються за допомогою проективних перетворень.

Н. О. Глаголев визначає проективну дію над вурфами як колінеарне перетворення з деякої групи перетворень. Ставлячи вимогу, щоб кожна проективна дія підлягала комутативному і асоціативному законам, Глаголев показує, що всі колінеації цієї групи мають спільні подвійні точки. Якщо ж одна проективна дія π підлягає розподільному закону відносно другої σ , то всі колінеації групи σ є гомології з спільною площиною, яка проходить через всі подвійні точки колінеації π , крім одної, яка є модулем проективної дії. Н. О. Глаголев називає дію σ проективним додаванням, а дію π — проективним множенням і показує, що проективному додаванню відповідає лише один тип колінеацій і проективному множенню — чотири типи. Він побудував різні системи проективних гіперкомплексних чисел, що відповідають різним типам множення. Ним розглянуте також питання проективного числення для випадку n -вимірного простору.

Декілька робіт Н. О. Глаголева присвячено питанням аксіоматики геометрії, в яких він показує, що симетрична система аксіом сполучення Енріквеса, яку здебільшого кладуть в основу проективної геометрії, недостатня для побудови на ній проективної геометрії і дає приклад такої геометричної системи, в якій всі аксіоми Енріквеса мають місце, але не мають місця даліші геометричні твердження. Так, пряма, що має дві спільні точки з площиною, може і не належати цій площині. Н. О. Глаголев запропонував нову уточнену систему аксіом. Перша група цих аксіом увійшла в його підручник «Проективна геометрія», в якому запропоновані ним аксіоми подано в пунктах а, в і 5. В роботах

1936 р. Н. О. Глаголев показав, що аналогічно теоремі Гільберта про властивості проєктивної площини (недоведеність теореми Дезарга без просторових аксіом) лінійна конгруенція, взята окремо від лінійного комплексу, втрачає свої проєктивні властивості, а саме: можна побудувати конгруенцію, що має властивості лінійної конгруенції [2].

Розвиток аналітичних методів проєктивної геометрії і побудова на базі їх комплексної проєктивної геометрії поставили перед наукою задачу про залежність тих чи інших проєктивних властивостей від того поля, над яким побудована геометрія. Великих успіхів у розв'язанні цього питання досягли радянські математики А. Н. Колмогоров і Л. С. Понтрягін. В їх працях висвітлюється питання аксіоматичної побудови проєктивної геометрії. А. Н. Колмогоров (1936), користуючись результатами Л. С. Понтрягіна, побудував аксіоматику проєктивної геометрії, чітко виділяючи її топологічну сторону. При цьому аксіоми порядку і неперервності в проєктивній геометрії просто і безпосередньо зводяться до звичайних аксіом топологічного простору. Вказані аксіоми визначають один з двох проєктивних просторів: дійсний або комплексний. Доведення ґрунтується на даній Л. С. Понтрягіним тополого-алгебраїчній характеристиці полів дійсних і комплексних чисел.

Велике значення мають також роботи П. К. Рашевського з аксіоматики двовимірної проєктивної геометрії [3, 4]. Він доводить твердження, назване ним теоремою про єдність проєктивної геометрії на площині.

Аксіом належності, аксіом порядку і неперервності недостатньо, щоб побудувати звичайну проєктивну геометрію на площині, бо вони не визначають ще поведінки прямих, і будь-яка сім'я V^2 замкнутих (що самі себе не перетинають) ліній на площині, які попарно перетинаються в одній точці і що сполучають будь-які дві точки площини, задовольняють такій аксіоматиці. Щоб відокремити випадок «справжніх» проєктивних прямих, треба приєднати ще аксіому Дезарга, яка стверджує, що коли конфігурація Дезарга 10_3 здійснена з всіма, що вимагаються нею, інцидентностями, крім, може, однієї, то ця остання інцидентність автоматично має місце. Автор доводить, що всяка спроба організувати сукупність прямих на площині за принципом обов'язкового замикання деякої конфігурації автоматично обов'язково дає нам геометрію з аксіомою Дезарга або Паппа. Формульований результат вірний не лише при наявності звичайних аксіом порядку і неперервності, але й далеко більш загальних твердженнях. П. К. Рашевський розглянув плоскі проєктивні геометрії, побудовані за допомогою аксіом зв'язку і одної з конфігураційних аксіом, відмінних від аксіом Дезарга і Паппа.

До цього напрямку досліджень радянських геометрів в галузі проєктивної геометрії належать роботи Д. З. Гордевського (1953). Він розглядає інтерпретації геометрії тривимірного проєктивного простору за допомогою кіл у конформній площині на базі інверсій відносно кола дійсного, уявного, нульового або нескінченно великого радіуса. Проєктивні аксіоми зв'язку, порядку і неперервності здійснюються в запропонованій інтерпретації. Введення абсолюта дозволяє також інтерпретувати геометрію Лобачевського і Рімана. Тут будується інтерпретація чотиривимірного проєктивного простору за допомогою куль у тривимірному конформному просторі. Д. З. Гордевський запропонував в 1957 р. нову систему аксіом інцидентності багатовимірного проєктивного простору, без обмеження числа вимірів простору, а також систему аксіом інцидентності n -вимірного проєктивного простору.

Одним з видатних геометрів синтетичного напрямку нашого часу є О. О. Глаголев. Його роботи присвячені теорії інволюцій вищих порядків (1936—1946), дослідженню кривих третього і четвертого порядку, питанням, зв'язаним з геометричними роботами Бурместра, та іншим

проблемам [5]. Робота [6] О. О. Глаголева є продовженням і дальшим розвиненням досліджень О. К. Власова, що стосуються многозначних відповідностей. Теорія кубічної полярної системи, запропонована О. К. Власовим, дуже складна. На шляху відшукування більш простої виникла потреба знайти нове синтетичне визначення спряженості двох трійок точок незалежно від поняття кубічної інволюції I_3^2 .

Глаголев дав нове синтетичне означення спряженості двох трійок точок, незалежне від поняття кубічної полярної системи. Грунтуючись на цьому означенні, О. О. Глаголев не лише побудував досить просту синтетичну теорію інволюції I_3^2 , але й поширив саме поняття спряженості двох трійок точок. А саме, він ввів нове поняття про спряженість двох трійок точок відносно конічного перерізу M^2 . Це дало можливість О. О. Глаголеву узагальнити ряд класичних теорем відносно кубічної полярної системи, що в свою чергу дозволило істотно поширити сферу застосування теорії кубічних інволюцій до розв'язання задач лінійної геометрії тривимірного простору. Основні результати, одержані ним в цьому напрямі, такі.

Дається проста побудова, що встановлює взаємно однозначну відповідність поміж точками простору і трійками точок конічного перерізу C^2 . Полярна відповідність має такі особливості: точкам прямої простору відповідають трикутники, описані навколо C^2 і вписані в один і той самий конічний переріз, який можна вважати відповідним прямій простору; усім же прямим простору буде відповідати ∞^4 конічних перерізів, що утворюють деяку нелінійну квадратичну систему, яку О. О. Глаголев позначає буквою T . Оскільки конічні перерізи системи T відображаються в прямій простору, то взаємно однозначна відповідність між конічними перерізами системи T відображається у взаємно однозначну відповідність між прямими простору. Якщо між кривими системи T за допомогою деякого конічного перерізу M^2 установлена взаємно однозначна відповідність, то виявляється, що в цій відповідності існує ∞^3 кривих, які самі собі відповідають. Ці самі собі відповідні криві системи T відображаються в просторі в ∞^3 прямих, що утворюють лінійний комплекс. Це дозволило О. О. Глаголеву звести задачі, що стосуються теорії лінійних систем лінійних комплексів, до задач, що стосуються теорії тангенціальних лінійних систем конічних перерізів, розроблених О. К. Власовим. Тим самим О. О. Глаголев одержав просту синтетичну теорію лінійних систем лінійних комплексів. Спираючись на узагальнені ним теореми Шаля і Кремона про два і три проєктивні пучки алгебраїчних кривих, що лежать в одній площині, на випадок, коли ці пучки зведені до алгебраїчної многозначної відповідності, він дав загальний метод побудови кремонової відповідності на площині і в просторі. Крім того, О. О. Глаголев довів деякі узагальнені ним теореми Бурместра і дав простий спосіб побудови точок Бурместра.

Питання про многозначні відповідності в проєктивній геометрії розглядала А. І. Мандзюк. Вона дала (1938) критичний огляд робіт К. О. Андреева, О. К. Власова і О. О. Глаголева, що стосуються многозначних відповідностей, і одночасно виклала нові доповнення до цих робіт.

Ще в 1910 р. Д. Д. Мордухай-Болтовської довів, що коли перетнути алгебраїчну криву k -го порядку кривими m -го порядку, що належать пучку з m нескінченно віддаленими центрами, то геометричне місце середин арифметичних центрів точок перетину є пряма l . В 1926 р. він розглянув цю ж теорему більш детально для випадку $k=3$; $m=2$ і дав для цього окремого випадку ряд нових теорем відносно l , яку він назвав квадратичним діаметром кривої 3-го порядку. Всі ці теореми

Д. Д. Мордухай-Болтовського з більш загальної точки зору були розглянуті А. І. Мандзюк у 1936—1938 роках.

За останнє десятиріччя з'явилося багато робіт радянських геометрів, присвячених розробці ідей К. О. Андреева, О. К. Власова, Н. О. Глаголева, О. О. Глаголева, Д. Д. Мордухай-Болтовського. Це, зокрема, роботи А. І. Мандзюк, С. С. Бюшгенса, Л. А. Спіциної, Е. С. Столової, Р. С. Лаврової, М. П. Лашенова, П. К. Бельтюкова, В. А. Маневича. Роботи Маневича (1956—1958) являють собою розвиток досліджень А. К. Власова. Вивчаючи довільну колінеарну відповідність, задану трьома головними точками U_1, U_2, U_3 і парою відповідних прямих (або точок), В. А. Маневич показав, що будь-яку систему колінеацій можна розглядати як полярну систему деякого пучка конічних перерізів, причому цей пучок не є єдиним, і що всяку коррелятивну відповідність можна розглядати як добуток трьох полярних відповідностей. Він розв'язав задачу про зображення колінеацій у просторі у вигляді добутку двох полярних відповідностей. Тут він дає визначення пучка поверхонь 2-го порядку як сукупності таких поверхонь 2-го порядку, які проходять через просторову криву γ^4 четвертого порядку, і доводить еквівалентність цього означення з означенням пучка поверхонь 2-го порядку А. К. Власова.

Деякі дослідження радянських вчених присвячені уточненню і узагальненню класичних теорем проєктивної геометрії і конфігурацій. С. С. Бюшгенс (1955) дає нове доведення теореми О. К. Власова про асоційовані п'ятірки площин у чотиривимірному просторі і узагальнення на n -вимірний простір.

Узагальненням теореми Паскаля займався ряд авторів: М. П. Черняєв (1951), Д. Д. Мордухай-Болтовської (1953), Т. Г. Івніцький (1956—1957) та ін. Т. Г. Івніцький узагальнює на n -вимірний простір теорему Паскаля про шестикутник, вписаний у криву 2-го порядку. Б. Н. Саморуков у 1953 р. дає нове синтетичне доведення теореми Шалля, аналога теореми Паскаля для тривимірного простору. М. П. Черняєв у статті [7] дає узагальнення теореми Андреева—Шретера. Якщо у дев'ятикутникові, описаному навколо конічного перерізу, сполучити прямими лініями по порядку кожену вершину з наступною після двох пропущених, то точки перетину кожної з цих прямих з наступною в тому ж круговому порядку лежать на деякій кривій 3-го порядку. Має місце дуальна теорема. Узагальненням теорем Чеві і Менелая займалися М. П. Черняєв (1939), Н. М. Бескін (1956) та ін. Н. В. Наумович (1956) дає узагальнення теореми Штаудта, одержане за допомогою багатовимірної рисної геометрії.

З. А. Скопец у 1951 р. зробив узагальнення теореми Дезарга про інволюції, а М. Ф. Четверухін у 1962 р. розглядає питання про пари трикутників і теорему Дезарга. Прямі, що проходять через відповідні вершини двох негомологічних трикутників, визначають лінійну поверхню другого порядку. Відповідні сторони трикутників визначають на прямій перетину їх площин два проєктивні ряди. Доводиться, що подвійні елементи цих рядів є точки перетину їх носія з вказаною вище поверхнею.

Д. З. Гордевський (1957) розглянув узагальнення конфігурації 4_{-1}^{4-1} чотиривимірного простору на шестивимірний і восьмивимірний простори, а потім і на довільний паристовимірний проєктивний простір. Вивчається структура одержаної конфігурації $4_{-1}^{2k}k-1$, утвореної $(k-1)$ -вимірними просторами загального положення, розміщеними в $2k$ -вимірному проєктивному просторі.

З. А. Скопец (1963) дослідив задачу про відображення чотиривимірного простору на тривимірний за допомогою норм кривої C_4 . Резуль-

тат використовується при доведенні теореми про те, що коли точки перетину прямої з сторонами трикутника, вписаного в криву 2-го порядку, спроектувати на криву із точки, що належить кривій, то трикутник, утворений дотичними до кривої в одержаних точках, і даний трикутник перспективні.

ЛІТЕРАТУРА

1. К. А. Андреев. О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий. Мат. сб., 9, 1879.
 2. Н. А. Глаголев. О проективных свойствах линейных конгруэнций. Труды Всесоюзн. съезда мат., т. II, 1936.
 3. П. К. Рашевский. О единственности проективной геометрии плоскости. Мат. сб., 8 (50), 1940.
 4. П. К. Рашевский. О проективной геометрии с новыми конфигурационными аксиомами. Мат. сб., 8 (50), 1940.
 5. А. А. Глаголев. Чисто геометрическое определение инволюции третьего порядка, Труды II мат. съезда, т. 1, 1936.
 6. А. А. Глаголев. Новое определение кривой 3-го порядка ДАН СССР, 53, 1946.
 7. М. П. Черняев. Обобщение теоремы Андреева—Шретера. Тр. секции теор. и инж. графики. Ростов, 1961.
-

УДК 517.512

Г. П. ГУБАНОВ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

**ПРО ЛІНІЙНІ ПРОЦЕСИ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ
ФУНКЦІЙ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ,
НАЙКРАЩИМИ В ЗАДАНИЙ СИСТЕМІ ТОЧОК**

§ 1. Нехай H_ω є клас неперервних 2π -періодичних функцій $f(x)$, які задовольняють умову

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|),$$

де $\omega(t)$ — заданий модуль неперервності.

У випадку $\omega(t) = Kt^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) відповідний клас функцій позначаємо через KH^α . Нехай

$$T_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— тригонометричний поліном $(n-1)$ -го порядку, найкращий в системі рівновіддалених точок $x_k = \frac{k\pi}{n}$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Розглянемо лінійний процес наближення

$$U_n(f; x, \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n-1)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

побудований на основі полінома $T_n(f; x)$ за допомогою трикутної матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n-1)}\}$ ($k=0, 1, \dots, n$; $\lambda_0^{(n-1)} = 1$, $\lambda_n^{(n-1)} = 0$; $n=1, 2, \dots$).

Позначимо

$$E_n(KH^{(\alpha)}; x, \Lambda) = \sup_{f \in KH^{(\alpha)}} |f(x) - U_n(f; x, \Lambda)|;$$

$$E_n(H_\omega; x, \Lambda) = \sup_{f \in H_\omega} |f(x) - U_n(f; x, \Lambda)|.$$

Теорема 1. Якщо матриця $\{\lambda_k^{(n-1)}\}$ ($k=0, 1, \dots, n$; $\lambda_0^{(n-1)} = 1$, $\lambda_n^{(n-1)} = 0$) при всіх n опукла відносно k , тобто $\Delta^2 \lambda_k^{(n-1)} \leq 0$, а $1 - \lambda_1^{(n-1)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то при $0 < \alpha < 1$ рівномірно відносно x і n справедлива асимптотична рівність

$$E_n(KH^{(\alpha)}; x, \Lambda) = \frac{K|\sin nx|}{\pi^{1-\alpha} n^\alpha} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k^{(n-1)}}{n-k} \right| + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

причому

$$E_n\left(KH^{(\alpha)}; \frac{k\pi}{n}, \Lambda\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Теорема 2. Якщо матриця $\{\lambda_k^{(n-1)}\}$ ($k=0, 1, \dots, n$; $\lambda_0^{(n-1)}=1, \lambda_n^{(n-1)}=0$) така, що при всіх n система чисел $v_k^{(n-1)} = \frac{1 - \lambda_k^{(n-1)}}{k}$ ($k=1, 2, \dots, n$; $v_0^{(n-1)}=0$) не спадає і вгнута відносно k , тобто $\Delta v_k^{(n-1)} \leq 0, \Delta^2 v_k^{(n-1)} \geq 0$, то для заданої мажоранти ω рівномірно відносно x і n має місце асимптотична рівність

$$E_n(H_\omega; x, \Lambda) = \frac{1}{\pi} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) |\sin nx| \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k^{(n-1)}}{n-k} \right| + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

причому

$$E_n\left(H_\omega; \frac{k\pi}{n}, \Lambda\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Зауваження 1. При $\lambda_k^{(n-1)}=1$ теореми 1 і 2 доведені В. М. Олов'янішніковим у роботі [1].

Зауваження 2. Для інтерполяційних поліномів аналогічні результати були одержані в роботі [2].

§ 2. Позначимо через H_{ω_1, ω_2} клас неперервних 2π -періодичних відносно x та y функцій $f(x, y)$, які задовольняють умови

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| &\leq \omega_1(|x_1 - x_2|) + \omega_2(|y_1 - y_2|); \\ |f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)| &\leq \\ &\leq C\omega_1(|x_1 - x_2|)\omega_2(|y_1 - y_2|), \end{aligned}$$

де $\omega_1(t), \omega_2(z)$ — задані модулі неперервності.

У випадку $\omega_1(t) = K_1 t^\alpha, \omega_2(z) = K_2 z^\beta$ ($0 < \alpha, \beta < 1$) клас таких функцій позначатимемо через $K_1 K_2 H^{(\alpha, \beta)}$. Нехай тепер

$$\begin{aligned} T_{mn}(f; x, y) &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \mu_{kl} (a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \cos kx \sin ly + \\ &+ c_{kl} \sin kx \cos ly + d_{kl} \sin kx \sin ly), \end{aligned}$$

де

$$\mu_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{при } k=l=0, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } k=0, l>0; k>0, l=0, \\ 1, & \text{при } k>0, l>0 \end{cases}$$

є тригонометричний поліном степеня $(m-1)$ по x і $(n-1)$ по y , найкращий у системі рівновіддалених точок (x_k, y_l) , де

$$x_k = \frac{k\pi}{m} \quad (k=1, 2, \dots, m); \quad y_l = \frac{l\pi}{n} \quad (l=1, 2, \dots, n)$$

За допомогою матриці $\Lambda = \{\lambda_{kl}^{(m-1, n-1)}\}$ ($k=0, 1, \dots, m; l=0, 1, \dots, n$; $\lambda_{00}^{(m-1, n-1)}=1, \lambda_{kn}^{(m-1, n-1)}=\lambda_{ml}^{(m-1, n-1)}=0; m, n=1, 2, \dots$) на основі полінома $T_{mn}(f; x, y)$ побудуємо лінійний процес наближення

$$U_{mn}(f; x, y, \Lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \lambda_{kl}^{(m-1, n-1)} (a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \cos kx \sin ly + c_{kl} \sin kx \cos ly + d_{kl} \sin kx \sin ly).$$

Знаходимо асимптотичні оцінки величин:

$$E_{mn}[K_1 K_2 H^{(\alpha, \beta)}; x, y, \Lambda] = \sup_{f \in K_1 K_2 H^{(\alpha, \beta)}} |f(x, y) - U_{mn}(f; x, y, \Lambda)|;$$

$$E_{mn}(H_{\omega_1, \omega_2}; x, y, \Lambda) = \sup_{f \in H_{\omega_1, \omega_2}} |f(x, y) - U_{mn}(f; x, y, \Lambda)|.$$

Теорема 3. Якщо матриця $\Lambda = \{\lambda_{kl}^{(m-1, n-1)}\}$ ($k=0, 1, \dots, m; l=0, 1, \dots, n$; $\lambda_{00}^{(m-1, n-1)}=1, \lambda_{kn}^{(m-1, n-1)}=\lambda_{ml}^{(m-1, n-1)}=0$) опукла відносно k і l при всіх m і n відповідно, тобто $\Delta^2 \lambda_{k0}^{(m-1, n-1)} \leq 0, \Delta^2 \lambda_{0l}^{(m-1, n-1)} \leq 0$, а $1 - \lambda_{00}^{(m-1, n-1)} = O\left(\frac{1}{m}\right), 1 - \lambda_{01}^{(m-1, n-1)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то при $0 < \alpha, \beta < 1$ справедлива рівність

$$\begin{aligned} E_{mn}[K_1 K_2 H^{(\alpha, \beta)}; x, y, \Lambda] &= \frac{K_1 |\sin mx|}{\pi^{1-\alpha} m^\alpha} \left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k0}^{(m-1, n-1)}}{m-k} \right| + \\ &+ \frac{K_2 |\sin ny|}{\pi^{1-\beta} n^\beta} \left| \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda_{0l}^{(m-1, n-1)}}{n-l} \right| + O \left[\frac{1}{m^\alpha n^\beta} \left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k0}^{(m-1, n-1)}}{m-k} \right| \right] + \\ &+ O \left[\frac{1}{m^\alpha n^\beta} \left| \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda_{0l}^{(m-1, n-1)}}{n-l} \right| \right] + O \left[\frac{1}{m^\alpha n^\beta} \left| \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda_{kl}^{(m-1, n-1)}}{(m-k)(n-l)} \right| \right] + \\ &+ O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) + O\left(\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right), \end{aligned}$$

причому

$$E_{mn} \left[K_1 K_2 H^{(\alpha, \beta)}; \frac{k\pi}{m}, \frac{l\pi}{n}, \Lambda \right] = O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) + O\left(\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right);$$

$$\begin{aligned} E_{mn} \left[K_1 K_2 H^{(\alpha, \beta)}; x, \frac{l\pi}{n}, \Lambda \right] &= \frac{K_1 |\sin mx|}{\pi^{1-\alpha} m^\alpha} \left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k0}^{(m-1, n-1)}}{m-k} \right| + \\ &+ O \left[\frac{1}{m^\alpha n^\beta} \left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k0}^{(m-1, n-1)}}{m-k} \right| \right] + O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) + O\left(\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{mn} \left[K_1 K_2 H^{(\alpha, \beta)}; \frac{k\pi}{m}, y, \Lambda \right] &= \frac{K_2 |\sin ny|}{\pi^{1-\beta} n^\beta} \left| \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda_{0l}^{(m-1, n-1)}}{n-l} \right| + \\ &+ O \left[\frac{1}{m^\alpha n^\beta} \left| \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda_{0l}^{(m-1, n-1)}}{n-l} \right| \right] + O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) + O\left(\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right). \end{aligned}$$

Теорема 4. Якщо матриця $\{\lambda_{kl}^{(m-1, n-1)}\}$ ($k=0, 1, \dots, m; l=0, 1, \dots, n;$
 $\lambda_{00}^{(m-1, n-1)}=1, \lambda_{kn}^{(m-1, n-1)}=\lambda_{ml}^{(m-1, n-1)}=0$) така, що при всіх m і n системи
чисел $v_{k0}^{(m-1, n-1)} = \frac{1 - \lambda_{k0}^{(m-1, n-1)}}{k}, v_{0l}^{(m-1, n-1)} = \frac{1 - \lambda_{0l}^{(m-1, n-1)}}{l}$ ($k=1, 2, \dots$
 $\dots, m; l=1, 2, \dots, n; v_{00}^{(m-1, n-1)}=0$) не спадають і вгнуті вниз відносно k і l
відповідно, тобто $\Delta v_{k0}^{(m-1, n-1)} \leq 0, \Delta^2 v_{k0}^{(m-1, n-1)} \geq 0, \Delta v_{0l}^{(m-1, n-1)} \leq 0,$
 $\Delta^2 v_{0l}^{(m-1, n-1)} \geq 0$, то для заданих мажорант ω_1, ω_2 має місце рівність

$$\begin{aligned} E_{mn}(H_{\omega_1, \omega_2}; x, y, \Lambda) &= \frac{1}{\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{m}\right) |\sin mx| \left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k0}^{(m-1, n-1)}}{m-k} \right| + \\ &+ \frac{1}{\pi} \omega_2\left(\frac{\pi}{n}\right) |\sin ny| \left| \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda_{0l}^{(m-1, n-1)}}{n-l} \right| + \\ &+ O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k0}^{(m-1, n-1)}}{m-k} \right| \right] + \\ &+ O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \left| \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda_{0l}^{(m-1, n-1)}}{n-l} \right| \right] + \\ &+ O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \left| \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda_{kl}^{(m-1, n-1)}}{(m-k)(n-l)} \right| \right] + \\ &+ O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\right] + O\left[\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right] + O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right], \end{aligned}$$

причому

$$\begin{aligned} E_{mn}\left(H_{\omega_1, \omega_2}; \frac{k\pi}{m}, \frac{l\pi}{n}, \Lambda\right) &= O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\right] + O\left[\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right] + O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]; \\ E_{mn}\left(H_{\omega_1, \omega_2}; x, \frac{l\pi}{n}, \Lambda\right) &= \frac{1}{\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{m}\right) |\sin mx| \left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k0}^{(m-1, n-1)}}{m-k} \right| + \\ &+ O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k0}^{(m-1, n-1)}}{m-k} \right| \right] + O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\right] + O\left[\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \\ &+ O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right], \\ E_{mn}\left(H_{\omega_1, \omega_2}; \frac{k\pi}{m}, y, \Lambda\right) &= \frac{1}{\pi} \omega_2\left(\frac{\pi}{n}\right) |\sin ny| \left| \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda_{0l}^{(m-1, n-1)}}{n-l} \right| + \\ &+ O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \left| \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda_{0l}^{(m-1, n-1)}}{n-l} \right| \right] + O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\right] + O\left[\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \\ &+ O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Зауваження 3. При $\lambda_{kl}^{(m-1, n-1)} = 1$ теореми 3 і 4 доведені нами раніше (див. [3], випадок $p=q=0$).

Зауваження 4. Для інтерполяційних поліномів аналогічні результати одержані в роботі [4].

При доведенні цих теорем ми спираємося на результати, одержані для однови-
мірного випадку в роботах [1, 2], а також використовуємо метод, застосований
у роботі [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. В. М. Олов'янишников. Оценка остатка при приближении непрерывных периодических функций полиномами, наилучшими в заданной системе точек. ДАН СССР, 70 (1950), 761.

2. И. М. Ганзбург. Распространение одной асимптотической формулы А. Ф. Тимана на классы функций с заданным модулем непрерывности, ИАН, сер. мат., 27 (1963), 485.

3. Б. В. Ковальчук, Г. П. Губанов. Наближення функцій двох змінних зрізаними середніми сумами від поліномів, найкращих в заданій системі точок. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 2 (1965), 16.

4. Г. П. Губанов. Труды III наукової конференції молодих математиків України.

5. В. Б. Гришин. Диссертация на соискание уч. степ. канд. мат. наук. 1964.

УДК 517.514

Л. М. ЛІСЕВИЧ і І. М. ГЕРМАНЮК

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ S^p -ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

У цій статті досліджуються деякі властивості узагальнених похідних функцій у метриці Степанова. Розглядається величина

$$D_{S^p_l} \{f(x), \varphi(x)\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t) - \varphi(t)|^p dt \right\}^{1/p},$$

яка називається відстанню Степанова або S^p -відстанню ($p \geq 1$), що відповідає числу l . Простір сумовних в кожному скінченному інтервалі функцій з так обраною метрикою називається простором Степанова або S^p -простором.

Означення 1. Функцію $f'_S(x)$ будемо називати S^p -похідною функції $f(x)$, якщо

$$\lim_{h \rightarrow 0} D_{S^p_l} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, f'_S(x) \right\} = 0. \quad (1)$$

Якщо функція $f(x)$ має S^p -похідну, тобто виконується рівність (1), то функцію $f(x)$ будемо називати S^p -диференційованою.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ має S^p -обмежену S^p -похідну, то вона S^p -рівномірно неперервна, тобто яке б не було число $\epsilon > 0$, можна вказати таке число $\delta(\epsilon) > 0$, що

$$D_{S^p_l} \{f(x+h), f(x)\} < \epsilon,$$

якщо лише $|h| < \delta$.

Доведення. Нехай $f'_S(x)$ є S^p -похідна функції $f(x)$. Застосовуючи нерівність Мінковського, маємо

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq \\ & \leq \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t+h) - f(t) - hf'_S(t)|^p dt \right\}^{1/p} + \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |hf'_S(t)|^p dt \right\}^{1/p} = \\ & = |h| \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - f'_S(t) \right|^p dt \right\}^{1/p} + |h| \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f'_S(t)|^p dt \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Використовуючи тепер S^p -диференційовність функції $f(x)$ та S^p -обмеженість $f'_S(x)$, для кожного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, а також число $M > 0$, що для $|h| < \delta$

$$\left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right\}^{1/p} < |h| \cdot (\varepsilon + M).$$

Звідси й випливає доведення теореми 1.

Теорема 2. Сума S^p -диференційовних функцій є також S^p -диференційовна функція, і S^p -похідна суми дорівнює сумі S^p -похідних.

Доведення. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ S^p -диференційовні функції, а $f'_S(x)$ і $g'_S(x)$ відповідно їх S^p -похідні. Тоді доведення теореми безпосередньо випливає із нерівності

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \left| \frac{f(t+h) \pm g(t+h)}{h} - [f'_S(t) \pm g'_S(t)] \right|^p dt \right\}^{1/p} \leq \\ & \leq \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - f'_S(t) \right|^p dt \right\}^{1/p} + \\ & + \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \left| \frac{g(t+h) - g(t)}{h} - g'_S(t) \right|^p dt \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Якщо $f'_S(x)$ є S^p -похідною функції $f(x)$, а функція

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

має звичайну похідну $f'_h(x)$, то

$$f'_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f'_S(t) dt. \quad (2)$$

Доведення. Покладемо

$$\varphi(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f'_S(t) dt.$$

Тоді, використовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f_h(x+k) - f_h(x)}{k} - \varphi(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left[\frac{f(t+k) - f(t)}{k} - f'_S(t) \right] dt \right| \leq \\ & \leq \left\{ \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left| \frac{f(t+k) - f(t)}{k} - f'_S(t) \right|^p dt \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тому що функція $f(x)$ є S^p -диференційовна, то права частина нерівності (3) прямує до нуля, коли $k \rightarrow 0$. Отже, для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що

$$\left| \frac{f_h(x+k) - f_h(x)}{k} - \varphi(x) \right| < \varepsilon,$$

якщо лише $|k| < \delta$. Звідси випливає, що $\varphi(x) = f'_h(x)$.

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ має S^p -обмежену S^p -похідну $f'_s(x)$, то

$$D_{S^p_I} \{f(x+h), f(x)\} \leq |h| \cdot L,$$

де L — стала, тобто має місце узагальнена в метриці S^p умова Ліпшиця.

Доведення теореми безпосередньо випливає із доведення теореми 1, якщо покласти там $\varepsilon + M = L$.

ЛІТЕРАТУРА

1. W. Stepanoff. Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen. Math. Ann., Bd. 95, 1925.
 2. А. С. Кованько и Л. Н. Лисевич. О некоторых свойствах интеграла и производной от S^p -почти-периодической функции. Вопросы мат. физики и теории функций, № 2, 1964.
-

УДК 517.514

О. С. КОВАНЬКО і Л. М. ЛІСЕВИЧ

ДЕЯКІ ГРАНИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ S^p -ОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ

Означення. Функція $f(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$ називається S^p -обмеженою ($p \geq 1$), якщо можна вказати таке стає число $A > 0$, що

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < A.$$

Теорема 1. Якщо дійсна функція $f(x) \in L_p[x_0, +\infty)$ S^p -обмежена, то яке б не було число $\tau > 0$, можна вказати нескінченну послідовність значень $x_n(\tau) \rightarrow +\infty$, що для $x_n > X > x_0$

$$\sup_{x_n > X} \left| \int_{x_n}^{x_n+1} [f(t+\tau) - f(t)] dt \right| < h, \quad (1)$$

де h — деяке скінченне число.

Доведення. Будемо вважати, що теорема невірна. Тоді можна вказати таке достатньо велике число h_0 і τ_0 , що для $x_n > X > x_0$

$$\left| \int_{x_n}^{x_n+1} [f(t+\tau_0) - f(t)] dt \right| \geq h_0, \quad (2)$$

тобто, не обмежуючи загальності,

$$\int_{x_n}^{x_n+1} [f(t+\tau_0) - f(t)] dt \geq h_0, \quad (3)$$

або

$$\int_{x_n}^{x_n+1} [f(t+\tau_0) - f(t)] dt \leq -h_0. \quad (4)$$

Нехай має місце нерівність (3). Тоді для довільного числа $n > N$ і довільного $x \in (X, +\infty)$

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} [f(t+n\tau_0) - f(t)] dt &= \int_x^{x+1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} [f(t+(k+1)\tau_0) - f(t+k\tau_0)] \right\} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x+k\tau_0}^{x+(k+1)\tau_0} [f(t+\tau_0) - f(t)] dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Виберемо нашу послідовність так, щоб $x_k = x + k\tau$ ($k=0, 1, 2, \dots$). Тоді на основі нерівності (3) із (5) одержимо

$$\int_x^{x+1} [f(t + n\tau_0) - f(t)] dt \geq nh_0. \quad (6)$$

Якщо має місце нерівність (4), то аналогічно можна одержати

$$\int_x^{x+1} [f(t + n\tau_0) - f(t)] dt \leq -nh_0. \quad (7)$$

Із виразів (6) і (7) маємо

$$\left| \int_x^{x+1} [f(t + n\tau_0) - f(t)] dt \right| \geq nh_0.$$

Далі, застосовуючи нерівність Мінковського, дістанемо

$$\left(\int_x^{x+1} |f(t + n\tau_0)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \geq nh_0.$$

Остання нерівність суперечить S^p -обмеженості функції $f(x)$. Таким чином, для довільного числа $\tau > 0$ існує така послідовність $x_n(\tau) \rightarrow +\infty$, для якої виконується нерівність (1). Теорема доведена.

Аналогічно доводиться така теорема:

Теорема 2. Якщо дійсна функція $f(x) \in L_p(-\infty, x_0)$ S^p -обмежена, то яке не було б число $\tau < 0$, можна вказати нескінченну послідовність значень $x_n = x_n(\tau) \rightarrow -\infty$, що для $x_n < X < x_0$

$$\sup_{x_n < X} \left| \int_{x_n}^{x_n+1} [f(t + \tau) - f(t)] dt \right| < h,$$

де h — деяке скінченне число.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 1 і для довільного числа $\tau > 0$ існує скінченна границя

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_{x_n}^{x_n+1} [f(t + \tau) - f(t)] dt = A, \quad (8)$$

то

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} \int_{x_n}^{x_n+1} f(t) dt = A.$$

Доведення. Можливість існування скінченної границі (8) випливає з теореми 1. Нехай виконується нерівність (8). Тоді для кожного числа $\varepsilon > 0$ і $x_n > X > x_0$

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{\tau} \int_{x_n}^{x_n+1} [f(t + \tau) - f(t)] dt < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зрозуміло, що тоді виконуються нерівності

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{\tau} \int_{X+k\tau}^{X+k\tau+1} [f(t+\tau) - f(t)] dt < A + \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

для $k=0, 1, 2, \dots, n-1$. Сумуючи нерівності (9), одержимо

$$(n+1) \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \sum_{k=0}^n \frac{1}{\tau} \int_{X+k\tau}^{X+k\tau+1} [f(t+\tau) - f(t)] dt < (n+1) \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Після заміни змінних в інтегралі і сумування матимемо

$$(n+1) \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \frac{1}{\tau} \int_X^{X+1} [f(t + (n+1)\tau) - f(t)] dt < (n+1) \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (10)$$

Покладемо тепер $x_n = X + (n+1)\tau$. Тоді із (10) одержимо таку нерівність:

$$\left| \frac{1}{x_n - X} \int_X^{X+1} [f(t + x_n - X) - f(t)] dt - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$

Розглянемо тепер тотожність

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_n} \int_{x_n}^{x_n+1} f(t) dt - A &= \frac{1}{x_n} \left[\int_X^{X+1} f(t) dt - AX \right] + \\ &+ \left(1 - \frac{X}{x_n} \right) \left\{ \frac{1}{x_n - X} \int_X^{X+1} [f(t + x_n - X) - f(t)] dt - A \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Використовуючи нерівність (11) і S^p -обмеженість функції $f(x)$, із тотожності (12) при $x_n > X$ дістанемо

$$\left| \frac{1}{x_n} \int_{x_n}^{x_n+1} f(t) dt - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

що й треба було довести.

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ із строго додатним інтегралом задовольняє умови теореми 1 і для довільного числа $\tau > 0$ існує додатна скінченна границя

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\int_{x_n}^{x_n+1} f(t+\tau) dt}{\int_{x_n}^{x_n+1} f(t) dt} \right)^{1/\tau} = A, \quad (13)$$

то

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt \right)^{1/x_n} = A,$$

Доведення. Нехай виконується рівність (13) і $A > 0$. Тоді для $x_n > X > x_0$

$$\left(\frac{\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t + \tau) dt}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt} \right)^{1/\tau} = A + \alpha(x_n), \quad (14)$$

де $\alpha(x_n) \rightarrow 0$, якщо $x_n \rightarrow +\infty$. Із (14) маємо

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t + \tau) dt}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt} = \ln A.$$

Тоді для кожного числа $\varepsilon > 0$ і $x_n > X > x_0$

$$\ln A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{\tau} \ln \frac{\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t + \tau) dt}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt} < \ln A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Продовження доведення теореми цілком аналогічне доведенню теореми 3.

Примітка. Послідовність x_n в теоремах 3 і 4 взята із теореми 1.

ЛІТЕРАТУРА

1. W. Stepanoff. Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen. Math. Ann., Bd. 95, 1925.

УДК 517.512

Я. Г. ПРИТУЛА

ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР'Є МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БОРА

У роботі узагальнюються відомі теореми про абсолютну збіжність рядів Фур'є рівномірних майже-періодичних (далі скорочено р. м. п.) функцій [1, стор. 72, 73].

Відзначимо деякі властивості сум Бохнера—Фейєра $P_B^m(x)$ для р. м. п. функцій $f(x)$ [1, стор. 70]

$$P_B^m(x) = \sum_{\substack{|v_1| \leq n_1 \\ \vdots \\ |v_r| \leq n_r}} k_{n_1, \dots, n_r; v_1, \dots, v_r} A\left(\frac{v_1}{m!} \beta_1 + \dots + \frac{v_r}{m!} \beta_r\right) e^{i\left(\frac{v_1}{m!} \beta_1 + \dots + \frac{v_r}{m!} \beta_r\right) x} \quad (1)$$

а) функції $P_B^m(x)$ рівномірно обмежені числом $M = \sup_x |f(x)|$;

б) коефіцієнти $k_{n_1, \dots, n_r; v_1, \dots, v_r} \leq 1$ і при фіксованих $r, v_1, v_2, \dots, v_r$ і $n_1, n_2, \dots, n_r \rightarrow \infty$ прямують до 1;

в) коефіцієнти $k_{n_1, \dots, n_r; v_1, \dots, v_r}$ додатні.

Лема. Нехай для комплексних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ існують дійсні числа α ($0 \leq \alpha < \pi/2$) і a , що

$$|\Theta_j - \alpha| \leq \alpha \pmod{2\pi} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

де $\Theta_j = \arg a_j$. Тоді

$$\cos \alpha (1 - \sin \alpha) \sum_{j=1}^n |a_j| \leq \left| \sum_{j=1}^n a_j \right|, \quad (3)$$

а якщо $0 \leq \alpha < \pi/4$, то

$$(1 - \sin 2\alpha) \sum_{j=1}^n |a_j| \leq \left| \sum_{j=1}^n a_j \right|. \quad (4)$$

При доведенні леми користуємось геометричною інтерпретацією комплексних чисел.

Нехай $0 \leq \alpha < \pi/4$. Очевидно, що кути між вектором $\sum_{j=1}^n \vec{a}_j = \vec{l}$ і векторами $\vec{a}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) не перевищують 2α , тому

$$|\vec{a}_j| \leq |np_{\vec{l}} \vec{a}_j| + \sin 2\alpha \cdot |\vec{a}_j|; \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n |np_{\vec{l}} \vec{a}_j| = \left| \sum_{j=1}^n \vec{a}_j \right|.$$

Просумувавши по j нерівність (5), одержимо

$$\sum_{j=1}^n |\vec{a}_j| \leq \left| \sum_{j=1}^n \vec{a}_j \right| + \sin 2\alpha \sum_{j=1}^n |\vec{a}_j|.$$

Значить, (4) доведено.

Нехай $0 \leq \alpha < \pi/2$. Існує число s , що кути між $\vec{s}$ і $\vec{a}_j$ ($j=1, 2, \dots, n$) не перевищують α . Нехай p буде пряма, на якій лежить вектор s . Всі числа a_j (розглядаємо їх як точки площини), які лежать по одній стороні p і на ній, позначатимемо a'_j , а ті, що по другій стороні, — a''_j .

$$\begin{aligned} \left| \sum \vec{a}_j \right| &\geq \left| np_{\vec{s}} \sum_{j=1}^n a_j \right| = \left| np_{\vec{s}} \sum \vec{a}'_j \right| + \left| np_{\vec{s}} \sum \vec{a}''_j \right| < \\ &\geq \cos \alpha \left| \sum \vec{a}'_j \right| + \cos \alpha \left| \sum \vec{a}''_j \right|. \end{aligned}$$

З доведеної першої частини леми маємо такі нерівності:

$$\left| \sum \vec{a}'_j \right| \geq (1 - \sin \alpha) \sum |\vec{a}'_j|, \quad \left| \sum \vec{a}''_j \right| \geq (1 - \sin \alpha) \sum |\vec{a}''_j|,$$

а звідси

$$\left| \sum_{j=1}^n \vec{a}_j \right| \geq \cos \alpha (1 - \sin \alpha) \sum_{j=1}^n |\vec{a}_j|.$$

Лема доведена.

Теорема 1. Нехай $f(x)$ р. м. п. функція і $\sum_l A_l e^{i\lambda_l x}$ — її ряд Фур'є.

Розглянемо сукупність показників Фур'є $\{\lambda_j\}$ і сукупність аргументів коефіцієнтів Фур'є $\{\theta_j\}$ функції $f(x)$. Якщо для будь-якого набору $\{\lambda_{j_k}\}$ і відповідних $\{\theta_{j_k}\}$ ($k=1, 2, \dots, n$) існують дійсні числа a і α ($0 \leq \alpha \leq \alpha_0 < \pi/2$), що система нерівностей

$$|\lambda_{j_k} x + \theta_{j_k} - a| \leq \alpha \pmod{2\pi} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

має дійсний розв'язок (існує x , при якому мають місце нерівності (6)), тоді ряд Фур'є $f(x)$ є абсолютно збіжний і

$$\begin{aligned} \sum_l |A_l| &\leq \frac{M}{\cos \alpha_0 (1 - \sin \alpha_0)}, \\ M &= \sup_x |f(x)|. \end{aligned} \quad (7)$$

Доведення проведемо від супротивного.

Нехай нерівність (7) не виконується. Тоді можна вибрати N коефіцієнтів Фур'є $A'_1, A'_2, \dots, A'_N$ і $k < 1$, що

$$k \sum_{j=1}^N |A'_j| > \frac{M}{\cos \alpha_0 (1 - \sin \alpha_0)}. \quad (8)$$

Візьмемо в сумі Бохнера—Фейєра (1) для функції $f(x)$ $m, r, n_1, n_2, \dots, n_r$ настільки великими, щоб сума містила члени з усіма A'_j ($j=1, 2, \dots, N$). Тоді при фіксованих m, r збільшимо $n_1, n_2, \dots, n_r$ так, щоб $k_{n_1, \dots, n_r; n_1, \dots, n_r}$, які відповідають A'_j ($j=1, 2, \dots, N$), стали більшими від k .

Одержали суму

$$\sum_j k_j A_j e^{i\lambda_j x} = \sum_j k_j |A_j| e^{i(\lambda_j x + \theta_j)}. \quad (9)$$

За умовою теореми знайдуться α , $\alpha(\alpha < \alpha_0)$, x_0 , що

$$|\lambda_j x_0 + \theta_j - \alpha| \leq \alpha \pmod{2\pi}$$

для всіх j , по яких сумується в (9).

З леми випливає, що

$$\cos \alpha_0 (1 - \sin \alpha_0) \sum_j k_j |A_j| \leq \left| \sum_j k_j A_j e^{i\lambda_j x_0} \right|. \quad (9a)$$

Враховуючи властивість а) сум $P_B^m(x)$, маємо

$$\cos \alpha_0 (1 - \sin \alpha_0) k \sum_{j=1}^N |A_j'| \leq M,$$

що суперечить виразу (8). Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай

$$f(x) = |A_1| e^{i(\lambda_1 x + \theta_1)} + \dots + |A_n| e^{i(\lambda_n x + \theta_n)}.$$

Якщо існує дійсне число α а) $0 \leq \alpha < \pi/2$, б) $0 \leq \alpha < 2\pi/3$, що з

$$l_1 \lambda_1 + l_2 \lambda_2 + \dots + l_n \lambda_n = 0 \quad (10)$$

($l_1, l_2, \dots, l_n$ — будь-які цілі числа) випливає

$$|l_1 \theta_1 + l_2 \theta_2 + \dots + l_n \theta_n| < \alpha \pmod{2\pi}, \quad (11)$$

тоді

$$а) \sup_x |f(x)| \geq (1 - \sin \alpha) \sum_{j=1}^n |A_j|;$$

$$б) \sup_x |f(x)| \geq \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \sum_{j=1}^n |A_j|.$$

Доведемо теорему для випадку б). У другому випадку доведення аналогічне.

Розглянемо функцію

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = |A_1| x_1 + |A_2| x_2 + \dots + |A_n| x_n.$$

Нехай

$$\{f(x)\}^p = \sum_v a_v e^{i\beta_v x}; \quad (12)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum a_{n_1, n_2, \dots, n_n} x^{n_1} x^{n_2}, \dots, x^{n_n}. \quad (13)$$

Щоб з виразу (13) одержати (12), потрібно у виразі (13) покласти $x_k = e^{i(\lambda_k x + \theta_k)}$, потім звести подібні члени. Якщо

$$l'_1 \lambda_1 + l'_2 \lambda_2 + \dots + l'_n \lambda_n = l''_1 \lambda_1 + l''_2 \lambda_2 + \dots + l''_n \lambda_n,$$

тоді за умовою (10), (11)

$$|(l'_1 \theta_1 + l'_2 \theta_2 + \dots + l'_n \theta_n) - (l''_1 \theta_1 + l''_2 \theta_2 + \dots + l''_n \theta_n)| \leq \alpha \pmod{2\pi}.$$

Це означає, що подібні члени задовольняють умову леми з $\alpha < \pi/3$. Звідси одержуємо

$$\begin{aligned} \sum_j |\alpha_j| &> \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \sum a_{n_1, n_2, \dots, n_n} > \\ &> \left[\sum_{j=1}^n |A_j| \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \right]^p. \end{aligned} \quad (14)$$

Тепер прийнемо супротивне. Нехай

$$\sup_x |f(x)| = c < \left[\cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \sum_{j=1}^n |A_j| \right].$$

Звідси

$$|\alpha_j| = \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(t)]^p e^{-i\beta_j t} dt \right| < c^p.$$

З того, що число членів у виразі (12) менше від $(p+1)^n$, випливає

$$\sum |\alpha_j| < (p+1)^n c^p. \quad (15)$$

Розглянемо відношення

$$\frac{(p+1)^n c^p}{\left[\cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \sum_{j=1}^n |A_j| \right]^p} = (p+1)^n \left[\frac{c}{\cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \sum_{j=1}^n |A_j|} \right]^p. \quad (16)$$

При $p \rightarrow \infty$ вираз (16) прямує до нуля, але це суперечить нерівностям (14), (15).

Теорема доведена (метод доведення даної теореми аналогічний методу, який наведений в роботі [1]).

Теорема 3. Нехай для р. м. п. функції $f(x) \sim \sum_j |A_j| e^{i(\lambda_j x + \theta_j)}$ існує число а) $0 \leq \alpha < \pi/2$, б) $0 \leq \alpha < 2\pi/3$, що для будь-якого набору $\{\lambda_{j_k}\}$ і відповідних $\{\theta_{j_k}\}$ ($k=1, 2, \dots, n$) з умови (10) випливає (11), тоді ряд Фур'є $f(x)$ абсолютно збіжний і

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_j |A_j| &\leq \frac{M}{1 - \sin \alpha}; \\ \text{б) } \sum_j |A_j| &\leq \frac{M}{\cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Доведення теореми 3 аналогічне доведенню теореми 1 (нерівність (9а) одержуємо з теореми 2).

Н а с л і д к и. З теорем 1 і 3 легко одержуються наступні твердження для р. м. п. функцій:

1. Якщо показники Фур'є $\{\lambda_j\}$ функції $f(x)$ лінійно незалежні, то її ряд Фур'є збігається абсолютно.

2. Якщо для функції $f(x) \sim \sum_j A_j e^{i\lambda_j x}$ існує число a , що $a \leq \arg A_j \leq a + \alpha$, $\alpha < \pi$, то ряд Фур'є $f(x)$ збігається абсолютно і

$$\sum_j |A_j| < \frac{M}{\cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3. Нехай для

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x} \quad (j \neq 0; \lambda_{-j} = -\lambda_j, \arg A_j = -\arg A_{-j})$$

якщо $A_j A_{-j} \neq 0$; $\lambda_j > 0$, $\lambda_{j+1} > \lambda_j$ при $j > 0$; $\lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$) виконується

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \geq q > 3,$$

тоді ряд Фур'є $f(x)$ збігається абсолютно і

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j| < \frac{M}{\cos \frac{\pi}{q-1} \left(1 - \sin \frac{\pi}{q-1}\right)}.$$

Подібний результат одержано в роботі [2]. Для доведення наслідка 3 покажемо, що для будь-якого набору $\{\lambda_{j_k}\}$ і відповідних $\{\theta_{j_k}\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) існує рішення системи (6) при $a = 0$ і деякому $\alpha < \pi/2$. Очевидно, що це досить показати для додатних λ_{j_k} .

Нехай $\{y = \lambda_{j_k} x + \theta_{j_k}\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — множина прямих в координатній площині XOY . Назвемо α^i полосами множини точок з координатами $2\pi i - \alpha < y < 2\pi i + \alpha$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Проекцію на вісь OX системи відрізків прямої $y = \lambda_{j_k} x + \theta_{j_k}$, які належать α^i -полосам, назвемо α_k -системою відрізків ($\alpha_k = \{\alpha_{ik}\}_{i=-\infty}^{\infty}$). Тепер очевидно, що для рішення системи (6) необхідно і достатньо, щоб перетин $\prod_{k=1}^n \alpha_k$ був не пустий. Довжина одного α_k^i -відрізка є $2\alpha/\lambda_{j_k}$, а його довжина разом із віддалю до сусіднього α_k^{i+1} відрізка дорівнює $2\pi/\lambda_{j_k}$.

Якщо виконується нерівність

$$\frac{2\alpha}{\lambda_{j_k}} - \frac{2\pi}{\lambda_{j_{k+1}}} \geq \frac{2\alpha}{\lambda_{j_{k+1}}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

то кожний α_k^i -відрізок містить у собі α_{k+1}^i -відрізок. Значить, перетин $\prod_{k=1}^n \alpha_k$ не пустий. Нерівність (17) виконується, якщо

$$\frac{\lambda_{j_{k+1}}}{\lambda_{j_k}} \geq q > 3 \quad \text{і} \quad \alpha = \frac{\pi}{q-1}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан. Почти-периодические функции. М., 1953.
2. Е. А. Бредихина. О наилучших приближениях почти-периодических функций целыми функциями конечной степени. ДАН СССР, 117, № 1, 1957.

УДК 517.54

І. І. ЧУЛИК

ДО ВИЗНАЧЕННЯ КЛАСІВ РЯДІВ ЛОРАНА В МЕТОДАХ ЛОКАЛІЗАЦІЇ НУЛІВ ЗА МОДУЛЯМИ

Розглянемо ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{v=p}^q A_v z^v, \quad (-\infty \leq p < q \leq \infty); \quad (1)$$

$A_p \neq 0$, якщо $p > -\infty$; $A_q \neq 0$, якщо $q < \infty$), збіжний в деякому кільці.

Нехай $\mathfrak{M}_f(z) = \sum_{v=p}^q T_v z^v$ є його мажорантою Ньютона. Позначимо через

$M = \{v\}$ множину всіх індексів v та розглянемо довільну систему множин $\mathfrak{A} = \{M_n\}$, $(n=0, 1, 2, \dots, m; \infty)$, що задовольняє умови

- 1) $M_n \subset M$;
- 2) $M_i \cap M_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$;
- 3) $\bigcup_{n=0}^m M_n \cup M_\infty = M$;
- 4) $M_2 \neq \emptyset$;
- 4) $p, q \in M_\infty$, якщо p і q — скінченні.

Введемо функцію дійсної змінної

$$H_k(u) = \sum_{\substack{v=p-k \\ v \neq 0}}^{q-k} u^{-\mu_v} - 1, \quad (2)$$

де $\mu_v = |v| + \sum_{j=1}^{|v|-1} (|v| - j) \tau_{k+j \operatorname{sign} v}$, а τ_v — цілочисленна функція, причому

$\tau_v = n$, якщо $v \in M_n$. Як відомо [1], функція (2) має єдиний простий додатний корінь u_k такий, що $2 \leq u_k \leq 3$.

В роботі [1] вводиться поняття класу $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{A})$ для кожного фіксованого $k \in M_2$ як множини рядів Лорана, відхилення яких задовольняють умови

$$D_k > u_k^2;$$

$$D_v \geq u_k^v, \quad v \neq k;$$

$$D_v = \infty, \quad \text{якщо } v \in M_\infty.$$

Там же для рядів $f(z) \in \mathfrak{R}_k(\mathfrak{U})$ виділяються області, в яких ряд (1) не має нулів, а також області, в яких цей ряд має нулі, та встановлюється їх число.

У даній замітці буде показано, що клас рядів Лорана, для яких справедливі теореми роботи [1] про локалізацію нулів, може бути розширений. Виберемо для кожного фіксованого $k \in M_2$ нормальний ряд

$$\mathfrak{R}_f(z) = \sum_{v=p}^q T_v^* z^v,$$

відхилення якого

$$D_v^* = \frac{T_v^*}{T_{v-1}^* T_{v+1}^*} = u_k^{2v}.$$

Дамо означення класу $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{U})$ рядів Лорана для кожного $k \in M_2$.

Означення. Ряд $f(z)$ належить до класу $\mathfrak{R}_k^*(\mathfrak{U})$, якщо існують такі

комплексні числа b та α , що коефіцієнти ряду $bf(\alpha z) = \sum_{v=p}^q A_v^* z^v$ задовольняють умови

$$|A_k^*| = T_k^*; \quad k \in M_2.$$

$$|A_v^*| \leq T_v^*; \quad v \neq k.$$

$$D_k^* > D_k = u_k^2.$$

Має місце

Теорема 1. Якщо ряд Лорана

$$f(z) \in \mathfrak{R}_k^*(\mathfrak{U}),$$

де $k \in M_2$, то $f(z)$ не має нулів в кільці

$$R_k u_k \leq |z| \leq \frac{R_{k+1}}{u_k}, \quad (3)$$

де R_k, R_{k+1} — числові нахили мажоранти Ньютона $\mathfrak{M}_f(z)$.

Доведення. За умовою теореми

$$D_k^* > u_k^2 > 4,$$

отже,

$$A_k^* \neq 0, \quad A_k \neq 0.$$

Розглянемо

$$-A_k^* z^k = \sum_{\substack{v=p \\ v \neq k}}^q A_v^* z^v,$$

звідки одержимо (див. [1])

$$\begin{aligned} 0 &\leq -1 + \sum_{v=p-k}^{q-k} \left| \frac{A_{k+v}^*}{A_k^*} \right| \rho^v \leq \\ &\leq -1 + \sum_{v=p-k}^{q-k} \frac{T_{k+v}^*}{T_k^*} \rho^v \leq \sum_{v=1}^{k-p} \frac{1}{D_{k-v+1}^* D_{k-v+2}^{*2} \dots D_{k-1}^{*v-1}} \left(\frac{R_k^*}{\rho} \right)^v - \\ &- 1 + \sum_{v=1}^{q-k} \frac{1}{D_{k+1}^{*v-1} D_{k+2}^{*v-2} \dots D_{k+v-1}^*} \left(\frac{\rho}{R_{k+1}^*} \right)^v, \end{aligned}$$

де $|z| = \rho$, $R_v^* = \frac{T_{v-1}^*}{T_v^*}$, $D_v^* = \frac{R_{v+1}^*}{R_v^*}$.

Допустимо тепер, що на колі радіуса $\rho = \tilde{R}_k^* u_k$ функція $f(z)$ має нуль, де

$$R_k^* \leq \tilde{R}_k^* \leq \frac{R_{k+1}^*}{u_k^2}. \quad (4)$$

Одержимо

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{v=1}^{k-p} \frac{1}{D_{k-v+1}^* D_{k-v+2}^{*2} \cdots D_{k-1}^{*v-1}} \left(\frac{R_k^*}{\tilde{R}_k^* u_k} \right)^v - 1 + \\ &+ \sum_{v=1}^{q-k} \frac{1}{D_{k-v+1}^* D_{k-v+2}^{*2} \cdots D_{k-1}^{*v-1}} \left(\frac{u_k}{\frac{R_{k+1}^*}{\tilde{R}_k^*}} \right)^v < \\ &< \sum_{v=1}^{k-p} \frac{1}{D_{k-v+1}^* D_{k-v+2}^{*2} \cdots D_{k-1}^{*v-1}} \left(\frac{1}{u_k} \right)^v - 1 + \\ &+ \sum_{v=1}^{q-k} \frac{1}{D_{k+1}^{*v-1} D_{k+2}^{*v-2} \cdots D_{k+v-1}^*} \left(\frac{1}{u_k} \right)^v < H_k(u_k) = 0. \end{aligned}$$

Ми прийшли до суперечливої нерівності, тобто наше припущення, що функція $f(z)$ має нуль на колі радіуса $\rho = \tilde{R}_k^* u_k$, неправильне. Виходячи з виразу (4), ми й одержимо, що в кільці (3) ряд (1) не має нулів.

Теорема 2. Якщо $f(z) \in \cap_{k \in \tilde{M}_1} \mathfrak{R}_k^*(\mathfrak{U})$, де $k_2 \in M_2$, то ряд $f(z)$ має рівно $k_j - k_i$ нулів у кільці

$$\frac{R_{k_i}}{u_{k_i}} < |z| < u_{k_j}, \quad (5)$$

де $k_i, k_j \in \tilde{M}_2$; $k_i < k_j$; u_{k_i}, u_{k_j} — корені функції (2) відповідно при $k = k_i, k = k_j$.

Доведення аналогічне.

Таким чином, теореми про локалізацію нулів мають місце для рядів Лорана із класу $\mathfrak{R}_k^*(\mathfrak{U})$. Клас $\mathfrak{R}_k^*(\mathfrak{U})$ більш широкий, ніж клас $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{U})$, оскільки в першому відсутня умова, що обмежує $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{U})$,

$$D_v \geq u_{k_v}^v, \quad v \neq k, \quad (6)$$

яка, як легко було зауважити, не є необхідною. Клас $\mathfrak{R}_k^*(\mathfrak{U})$ було визначено, виходячи з нормального ряду, не використовуючи умови (6). Отже, $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{U}) \in \mathfrak{R}_k^*(\mathfrak{U})$.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Костовский. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во Львов. ун-та, 1967.

УДК 517.55

А. І. КАРДАШ

НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ НАЯВНОСТІ ПРАВИЛЬНИХ ВЕРШИН ДІАГРАМ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Для спрощення викладок будемо розглядати цілу раціональну функцію (многочлен) двох комплексних змінних

$$f(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in E} A_{\mu, \nu} z^{\mu} w^{\nu} \quad (1)$$

над полем комплексних чисел. Через E позначено множину пар (μ, ν) цілих невід'ємних індексів, відмінних від нуля коефіцієнтів функції (1). $E \subset Q_f$, де Q_f — деякий опуклий многокутник.

В роботі [1] для функції $f(z, w)$ було введено поняття мажоранти

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in Q_f} T_{\mu, \nu} z^{\mu} w^{\nu} \quad (2)$$

та діаграми $\mathfrak{D}_f$ Ньютона в системі координат $\xi\eta\lambda$ і доведено необхідні та достатні умови, щоб точка зображення $P_{kl}(k, l, -\ln |A_{kl}|)$ $(k, l) \in E$ була правильною вершиною, тобто вершиною чотиригранного опуклого кута, ребра якого паралельні координатним площинам $\xi\lambda$, $\eta\lambda$. При цьому необхідні та достатні умови виражались через коефіцієнти $T_{\mu, \nu}$ мажоранти Ньютона (2), обчислення яких зв'язане з певними труднощами.

Метою даної замітки є вираження необхідних та достатніх умов правильних вершин діаграм Ньютона $\mathfrak{D}_f$ безпосередньо через коефіцієнти $A_{\mu, \nu}$ функції (1).

Наявність правильних вершин широко використовується в застосуванні теорії мажорант і діаграм Ньютона до прикладних питань, тому що основна функція в цьому випадку надзвичайно проста [1].

Як відомо [1],

$$r_{kl}^+(\xi) = \min_{\substack{\mu_1 > 0, \mu_2 > 0 \\ h_{12}(k, l) < 0}} \left(\frac{a_{kl}^{\mu_1 + \mu_2}}{a_{k_1 l_1}^{\mu_1} a_{k_2 l_2}^{\mu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1}}; \quad (3)$$

$$r_{kl}^-(\xi) = \max_{\substack{\mu_1 > 0, \mu_2 > 0 \\ h_{12}(k, l) > 0}} \left(\frac{a_{k_1 l_1}^{\mu_1} a_{k_2 l_2}^{\mu_2}}{a_{kl}^{\mu_1 + \mu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1}}; \quad (4)$$

$$r_{kl}^+(\zeta) = \min_{\substack{\nu_1 > 0, \nu_2 > 0 \\ h_{12}(k, l) > 0}} \left(\frac{a_{kl}^{\nu_1 + \nu_2}}{a_{k_1 l_1}^{\nu_1} a_{k_2 l_2}^{\nu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1}}; \quad (5)$$

$$r_{kl}(\zeta) = \max_{\substack{\nu_1 > 0, \nu_2 > 0 \\ h_{12}(k, l) < 0}} \left(\frac{a_{k_1 l_1}^{\nu_1} a_{k_2 l_2}^{\nu_2}}{a_{kl}^{\nu_1 + \nu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1}}; \quad (6)$$

де $a_{kl} = |A_{kl}|$, $\mu_1 = k_1 - k$, $\mu_2 = k - k_2$, $\nu_1 = l_1 - l$, $\nu_2 = l - l_2$,

$$h_{12}(k, l) = \begin{vmatrix} k - k_1 & l - l_1 \\ k_2 - k_1 & l_2 - l_1 \end{vmatrix}$$

i

$$d_{kl}(\xi) = \frac{r_{kl}^+(\xi)}{r_{kl}^-(\xi)}, \quad d_{kl}(\zeta) = \frac{r_{kl}^+(\zeta)}{r_{kl}^-(\zeta)}. \quad (7)$$

Має місце

Теорема 1. Для того, щоб вершина P_{kl} діаграми Ньютона була правильною, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови

$$a_{k+\mu, l+\nu} \leq \frac{\tilde{T}_{k+\text{sign } \mu, l}^{|\mu|} \tilde{T}_{k, l+\text{sign } \nu}^{|\nu|}}{\tilde{T}_{kl}^{|\mu|+|\nu|-1}}, \quad (k+\mu, l+\nu) \in \bar{Q}_f \quad (8)$$

$$\tilde{T}_{kl} = a_{kl}, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{k+1, l} &= \frac{a_{kl}}{r_{kl}^+(\zeta)}, \quad \tilde{T}_{k, l+1} = \frac{a_{kl}}{r_{kl}^-(\xi)}; \\ \tilde{T}_{k-1, l} &= a_{kl} r_{kl}^-(\zeta), \quad \tilde{T}_{k, l-1} = a_{kl} r_{kl}^+(\xi). \end{aligned} \quad (10)$$

Доведення. Необхідність. Нехай вершина P_{kl} — правильна. Тоді за теоремою 2.3 [1] має місце нерівність

$$T_{k+\mu, l+\nu} \leq \frac{T_{k+\text{sign } \mu, l}^{|\mu|} T_{k, l+\text{sign } \nu}^{|\nu|}}{T_{kl}^{|\mu|+|\nu|-1}} \quad (11)$$

для всіх коефіцієнтів $T_{k+\mu, l+\nu}$ мажоранти (2).

З означення правильної вершини випливає рівність (9), а також, що відрізки $P_{kl} B_{k+1, l}$; $P_{kl} B_{k, l+1}$; $P_{kl} B_{k-1, l}$; $P_{kl} B_{k, l-1}$ є правильними ребрами або становлять частину спрямлених ребер діаграми Ньютона $\mathfrak{D}$, функції $f(z, w)$, тому

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{kl} &= T_{kl} = a_{kl}; \quad \tilde{T}_{k+1, l} = T_{k+1, l}; \quad \tilde{T}_{k, l+1} = T_{k, l+1}; \\ \tilde{T}_{k-1, l} &= T_{k-1, l}; \quad \tilde{T}_{k, l-1} = T_{k, l-1}; \end{aligned} \quad (12)$$

де B_{ij} — точка діаграми $\mathfrak{D}_f$.

Беручи до уваги, що $a_{k+\mu, l+\nu} \leq T_{k+\mu, l+\nu}$, з виразів (11)–(12) випливає нерівність (8). Необхідність доведена.

Достатність. Припустимо тепер, що мають місце умови (8)–(9).

Побудуємо точки $\tilde{B}_{k+1, l}(k+1, l, -\ln \tilde{T}_{k+1, l})$; $\tilde{B}_{k, l+1}(k, l+1, -\ln \tilde{T}_{k, l+1})$; $\tilde{B}_{k-1, l}(k-1, l, -\ln \tilde{T}_{k-1, l})$; $\tilde{B}_{k, l-1}(k, l-1, -\ln \tilde{T}_{k, l-1})$. Через три точки P_{kl} , $\tilde{B}_{k+1, l}$, $\tilde{B}_{k, l+1}$ проведемо площину σ_1 . Аналогічно проведемо площини σ_2 , σ_3 , σ_4 через відповідні трійки точок P_{kl} , $\tilde{B}_{k-1, l}$, $\tilde{B}_{k, l+1}$; P_{kl} , $\tilde{B}_{k+1, l}$, $\tilde{B}_{k, l-1}$.

Як відомо [1], завдяки нерівності (8), оскільки точка P_{kl} — вершинна,

$$\tilde{D}_{kl}(\zeta) = d_{kl}(\zeta) > 1, \quad \tilde{D}_{kl}(\xi) = d_{kl}(\xi) > 1. \quad (13)$$

Із виразів (9) — (10) випливає

$$\begin{aligned} r_{kl}^+(\zeta) &= \frac{\tilde{T}_{kl}}{\tilde{T}_{k+1,l}}, \quad r_{kl}^+(\xi) = \frac{\tilde{T}_{kl}}{\tilde{T}_{k,l+1}}, \\ r_{kl}^-(\zeta) &= \frac{\tilde{T}_{k-1,l}}{\tilde{T}_{kl}}, \quad r_{kl}^-(\xi) = \frac{\tilde{T}_{k,l-1}}{\tilde{T}_{kl}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Підставивши вираз (14) в (13), одержимо

$$\frac{\tilde{T}_{kl}^2}{\tilde{T}_{k-1,l} \tilde{T}_{k+1,l}} > 1, \quad \frac{\tilde{T}_{kl}^2}{\tilde{T}_{k,l-1} \tilde{T}_{k,l+1}} > 1. \quad (15)$$

Отже, чотиригранний кут, утворений площинами $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \tilde{\sigma}_4$, є правильним. Всі точки $P_{k+\mu, l+\nu}$ знаходяться всередині чотиригранного кута, тому всередині даного кута будуть знаходитись і всі точки $B_{k+\mu, l+\nu}$ діаграми $\mathfrak{D}_f$. Звідси випливає, що

$$T_{k+\mu, l+\nu} \leq \frac{\tilde{T}_{k+\text{sgn } \mu, l}^{|\mu|} \tilde{T}_{k, l+\text{sgn } \nu}^{|\nu|}}{\tilde{T}_{kl}^{|\mu|+|\nu|-1}}. \quad (16)$$

Отже, відрізки $P_{kl} \tilde{B}_{k+1, l}; P_{kl} \tilde{B}_{k, l+1}; P_{kl} \tilde{B}_{k-1, l}; P_{kl} \tilde{B}_{k, l-1}$ є правильними ребрами або становлять частину спрямлених ребер $\mathfrak{D}_f$. Тому, згідно з виразами (9) — (10), можемо записати $\tilde{T}_{kl} = T_{kl}; \tilde{T}_{k+1, l} = T_{k+1, l}; \tilde{T}_{k, l+1} = T_{k, l+1}; \tilde{T}_{k-1, l} = T_{k-1, l}; \tilde{T}_{k, l-1} = T_{k, l-1}$. Тоді нерівність (16) зводиться до нерівності (11), яка є необхідною та достатньою умовою, щоб вершина P_{kl} була правильною.

Як прямий наслідок з теореми 1 і теореми 2.3 випливає

Теорема 2. Для того, щоб точка зображення P_{kl} цілої раціональної функції (1) була правильною вершиною, необхідно та достатньо, щоб, крім умов теореми 1, виконувались також нерівності

$$\tilde{D}_{kl}(\zeta) = d_{kl}(\zeta) > 1, \quad \tilde{D}_{kl}(\xi) = d_{kl}(\xi) > 1; \quad (17)$$

$$a_{kl} > (a_{k_1, l_1}^{\mu_1} a_{k_2, l_2}^{\mu_2})^{\frac{1}{\mu_1 + \mu_2}}. \quad (18)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. А. І. Кардаш, О. М. Костовський, І. І. Чулик. Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат, вип. 3. Вид-во Львів. ун-ту, 1967.

УДК 517.9 : 621.3.032.26

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ

РОЗРАХУНОК ТРАЄКТОРІЙ ЛІНЗ З ПОРУШЕНОЮ ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

Рух електронів в осесиметричному просторі можна описати системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} = a \frac{\partial u}{\partial r} + r \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2; \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = a \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\Theta}{dt} \right) = a \frac{\partial u}{\partial \Theta}, \end{cases} \quad (1)$$

де $u = u(r, z, \Theta)$ — електростатичний потенціал, створений електронною лінзою; a — константа, вибір якої обумовлений значенням потенціалу в точці вильоту. Початкові дані при $t=0$

$$r = r(0), \dot{r} = \dot{r}(0), z = z(0), \dot{z} = \dot{z}(0), \Theta = \Theta(0), \dot{\Theta} = \dot{\Theta}(0). \quad (2)$$

У випадку осьової симетрії $\frac{\partial u}{\partial \Theta} = 0$, $r^2 \frac{d\Theta}{dt} = \text{const}$, і третє рівняння системи (1) інтегрується в кінцевому вигляді. Якщо ж електронна лінза незначно збурена, потенціал її можна зобразити у вигляді ряду [1] по степенях параметрів збурення λ, μ

$$u^*(r, z, \Theta) = u_0(r, z) + \lambda u_1(r, z, \Theta) + \mu u_2(r, z, \Theta) + \\ + \frac{\lambda^2}{2} u_{11}(r, z, \Theta) + \lambda \mu u_{12}(r, z, \Theta) + \frac{\mu^2}{2} u_{22}(r, z, \Theta) + O(\lambda^m \mu^n), \quad (3)$$

де $u_1, \dots, u_{22}$ — збурення, а $u_0(r, z)$ — потенціал незбуреної осесиметричної лінзи.

В роботі [2] розглянуто три види порушень осьової симетрії електронно-оптичних систем: еліптична дисторсія, паралельне зміщення осей та перекося осей окремих електродів. У цих випадках порушень симетрії збурення, що входять у вираз (3), зображуються у вигляді

$$u_v(r, z, \Theta) = v_v(r, z) \Phi_v(\Theta), \quad (4)$$

де $v_v(r, z)$ є розв'язками задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца в осесиметричній області. Для знаходження $u_0(r, z)$, $v_v(r, z)$ можна використати метод функцій дискретного аргументу [3]. При наближеному

інтегруванні системи (1) з початковими умовами (2) виникає необхідність в обчисленні частинних похідних від електростатичного потенціалу, що задані тільки таблично, і обчисленні значень потенціалу в проміжкових точках, відмінних від узлів прямокутної сітки.

Для забезпечення високої точності інтерполяції табличних функцій двох змінних будемо враховувати значення в дев'яти вузлах, що межують з заданою точкою

$$\begin{array}{ccccc} (i-1, k+1) & (i, k+1) & (i+1, k+1) \\ & \downarrow & \\ (i-1, k) & (i, k) & (i+1, k) \\ & \leftarrow h \rightarrow & \\ (i-1, k-1) & (i, k-1) & (i+1, k-1) \end{array}$$

Тоді значення функції в проміжковій точці $(r_k + \eta, z_i + \xi)$ обчислюється за формулою [4]

$$\begin{aligned} u(r_k + \eta, z_i + \xi) = & u_{ki} + \frac{\eta}{2l} (u_{k+1,i} - u_{k-1,i}) + \frac{\xi}{2h} (u_{k,i+1} - u_{k,i-1}) + \\ & + \frac{\eta^2}{2l^2} (u_{k+1,i} - 2u_{k,i} + u_{k-1,i}) + \frac{\xi^2}{2h^2} (u_{k,i+1} - 2u_{k,i} + u_{k,i-1}) + \\ & + \frac{\xi\eta}{4hl} (u_{k+1,i+1} + u_{k-1,i-1} - u_{k+1,i-1} - u_{k-1,i+1}). \end{aligned} \quad (5)$$

З формули (5) легко дістати наближені значення для частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial r}$ і $\frac{\partial u}{\partial z}$ в проміжкових точках через значення функції в дев'яти вузлах

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{(r_k + \eta, z_i + \xi)} = & \frac{1}{2l} (u_{k+1,i} - u_{k-1,i}) + \frac{\eta}{l^2} (u_{k+1,i} - 2u_{k,i} + u_{k-1,i}) + \\ & + \frac{\xi}{4hl} (u_{k+1,i+1} + u_{k-1,i-1} - u_{k+1,i-1} - u_{k-1,i+1}); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(r_k + \eta, z_i + \xi)} = & \frac{1}{2h} (u_{k,i+1} - u_{k,i-1}) + \frac{\xi}{h^2} (u_{k,i+1} - 2u_{k,i} + u_{k,i-1}) + \\ & + \frac{\eta}{4hl} (u_{k+1,i+1} + u_{k-1,i-1} - u_{k+1,i-1} - u_{k-1,i+1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Виходячи із зображення потенціалу $u^*(r, z, \Theta)$ у вигляді ряду (3), а членів ряду у вигляді (4), похідну по Θ легко знайти.

Для чисельного інтегрування системи (1) застосуємо метод Рунге—Кутта четвертого порядку, який забезпечує високу точність розв'язку і легко реалізується на ЕОМ. Для ЕОМ «Мінськ-2» складено стандартну програму розв'язку системи (1) з початковими умовами (2) у випадку трьох згаданих порушень осової симетрії. Для прикладу розглянемо випадок еліптичної дисторсії. Як показано в роботі [1], потенціал електронної лінзи зображується формулою

$$u^*(r, z, \Theta) = u_0(r, z) + \lambda v_1(r, z) \cos 2\Theta, \quad (8)$$

де $u_0(r, z)$ — осесиметричний потенціал; $v_1(r, z) \cos 2\Theta$ — збурення.

З формули (8) одержуємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^*}{\partial r} &= \frac{\partial u_0}{\partial r} + \lambda \frac{\partial v_1}{\partial r} \cos 2\theta; \\ \frac{\partial u^*}{\partial z} &= \frac{\partial u_0}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_1}{\partial z} \cos 2\theta, \\ \frac{\partial u^*}{\partial \theta} &= -2\lambda v_1 \sin 2\theta,\end{aligned}\tag{9}$$

а числові значення для $\frac{\partial u_0}{\partial r}$, $\frac{\partial u_0}{\partial z}$, $\frac{\partial v_1}{\partial r}$, $\frac{\partial v_1}{\partial z}$, v_1 знаходимо за формулами (5) — (7).

Використання чисельних значень потенціалу при розв'язуванні системи (1) — (2) значно економить машинний час і порівняно легко реалізується на ЕОМ.

Вплив порушень симетрії лінзи на її оптичні характеристики легко виявити, коли прорахувати траєкторії для незбуреної ідеальної лінзи, а потім з врахуванням збурення при різних значеннях λ при одних і тих самих початкових умовах (2). На екрані побачимо відхилення точок попадання траєкторій збуреної лінзи від незбуреної лінзи. Для прикладу наведемо точки попадання на два екрани $z_{e1}=3,5$, $z_{e2}=3,7$ декількох

траєкторій, випущених під кутом в площині $\Theta=0$ при $\lambda=\frac{1}{64}$, однієї електронно-оптичної системи:

Осесиметрична лінза		Збурена лінза	
r_{e1}	r_{e2}	r_{e1}	r_{e2}
0,0828	0,0762	0,0848	0,0784
0,4977	0,1876	0,1887	0,1778
0,1032	0,0768	0,1361	0,1115

Обчисливши необхідні фізичні характеристики лінзи, зможемо відповісти на питання про межі зміни параметрів збурення, і, отже, на можливі допуски виготовлення лінз.

ЛІТЕРАТУРА

1. Є. С. Дорожовський, В. Г. Костенко. Поле потенціалу електронної лінзи з порушеною осью симетрії. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 2, 1965.
2. Е. С. Дорожовский, В. Г. Костенко. Поле потенциала электронной линзы с незначительно нарушенной осевой симметрией. Труды I Всесоюз. семинара по расчетам электронно-оптических систем. Новосибирск, 1965.
3. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киев. ун-та, 1962.
4. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, К. Е. Черныш. Таблицы для решения граничных задач. М., 1956.

УДК 517.9 : 621.3.032.26

И. В. ЛЮДКЕВИЧ

ПРО УТОЧНЕННЯ ОДНОГО МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОДІВ МАЛОЇ ТОВЩИНИ

В роботах [1, 2] вказувалось, що розрахунок електростатичного поля системи електродів малої товщини електронної лінзи у випадку осьової симетрії зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_L q(\tau) \cdot \frac{K[r, z, R(\tau), \xi(\tau)] d\tau}{V[R(\tau) + r]^2 + [\xi(\tau) - z]^2} = U_0|_{L'}, \quad (1)$$

де $q(\tau)$ — невідома густина зарядів на деякій поверхні всередині електроду; L — твірна цієї поверхні; L' — твірна поверхні електроду, на якій заданий потенціал U_0 , інші позначення ті ж самі. У формулі (1) опущено сумування по всіх електродах лінзи і формально вважається, що лінза складається з одного електрода.

Якщо густина $q(\tau)$ відома, то потенціал поля в будь-якій точці з координатами (r, z) визначається за формулою

$$U(r, z) = \int_L q(\tau) \cdot \frac{K[r, z, R(\tau), \xi(\tau)] d\tau}{V[R(\tau) + r]^2 + [\xi(\tau) - z]^2}. \quad (2)$$

Ефективність інтегрування рівняння (1) істотно залежить від способу зображення густини $q(\tau)$. Як показали приклади розрахунку електронних лінз (поля, траєкторій і оптичних параметрів), найбільш ефективним і практично вигідним є зображення густини $q(\tau)$ у вигляді суми кільцевих зарядів на кінцях твірної L і раціональних функцій (неперервних на всій твірній L) з нелінійними параметрами

$$q(\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (\tau_k - \tau)^2}, \quad (3)$$

де b_k — наперед задані нелінійні параметри; τ_k — деякі значення τ на твірній L ; a_k — невідомі лінійні параметри, які визначаються з граничних умов.

Недоліком даного методу є затрата великої кількості машинного часу на добір параметрів b_k при розрахунку потенціалу поля і, якщо потрібно знаходити тільки потенціал поля, то більш ефективне зображення густини у вигляді кусочно-неперервної функції на L .

Нехай твірна L розбита на декілька нерівних частин, густина на кожній з яких задається у вигляді

$$q_k = \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (\tau_k - \tau)^2}. \quad (4)$$

Тоді формула (2) для потенціалу поля перепишеться так:

$$U(r, z) = \sum_{k=1}^n \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+1}} \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (\tau_k - \tau)^2} \cdot \frac{K[r, z, R(\tau), \xi(\tau)] d\tau}{V[R(\tau) + r]^2 + [\xi(\tau) - z]^2}, \quad (5)$$

де $\tau_k, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}$ — координати середини і кінців відрізка L_k . Деколи вигідно ще ставити кільцеві заряди на кінцях твірної L . Параметри a_k з виразу (5) визначаються шляхом задоволення граничних умов в середніх точках відрізків твірної L' . При цьому для досягнення заданої точності задоволенням граничних умов в (3) потрібна більша кількість доданків вигляду (4), порядку 30—40 на лінзу. Не дивлячись на збільшення числа невідомих коефіцієнтів у зображенні густини $q(\tau)$, машинний час на розрахунок поля в 3—4 рази менший, ніж у випадку неперервних густин, внаслідок зменшення проміжку інтегрування при обчисленні коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь. Крім цього, даний метод дає можливість одержати розв'язок задачі при однократному прорахунку, оскільки для параметрів b_k вдалось вказати проміжок їх зміни, а саме:

$$\Delta_k \leq b_k \leq 2\Delta_k, \quad (6)$$

де Δ_k — довжина відрізка L_k твірної L . Нерівність (6) була одержана таким чином: необхідно було спочатку при фіксованому числі n для конкретної лінзи прорахувати потенціал при декількох різних наборах значень b_k , тобто, зафіксувавши будь-який набір b_k , розв'язуємо систему алгебраїчних рівнянь, до якої зводиться інтегральне рівняння (1). Потім фіксується другий набір параметрів b_k , і знову робимо аналогічно, і так далі. Слід зауважити, що програма при цьому зовсім не змінюється.

Якщо прораховано декілька варіантів при різних наборах b_k , то про кращий з них судять за точністю задоволення граничних умов у проміжкових точках. Нехай, наприклад, граничні умови задовольнялись в m точках при декількох наборах b_k ; шукаємо середню відносну похибку ϵ при кожному з цих наборів b_k і при мінімальному значенні ϵ вважаємо, що даний набір b_k є найбільш точним. Таким чином, вдалось зв'язати значення b_k з довжинами Δ_k і одержати графічну залежність похибки ϵ від величин b_k . Досліджено, що залежність похибки ϵ від значень b_k має місце не тільки при фіксованому значенні n , але і при різній кількості невідомих a_k , тобто вона не залежить від кількості розбивок твірної L .

Крім того, велись дослідження в напрямі вибору числа n , що має істотне значення, оскільки з ростом n сильно зростає машинний час. Очевидно, потрібно було знайти такі границі для n , щоб, по-перше, досягалась бажана точність, по-друге, затрачувався мінімальний час.

Як показали розрахунки багатьох оптичних систем, Δ_k повинно знаходитись в таких границях (в одиницях довжини електрода):

$$0,15 \leq \Delta_k \leq 0,3. \quad (7)$$

Знаючи Δ_k і довжину твірної L , кількість невідомих знаходимо за формулою

$$n = \frac{L}{\Delta_k}. \quad (8)$$

Таким чином, при знаходженні потенціалу електронних лінз необхідно додержуватися нерівності (7), тому що зменшення Δ_k приводить до системи з визначником, близьким до нуля, а збільшення Δ_k зменшує точність задоволення граничних умов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. В. Валько, І. О. Прусов, Й. В. Людкевич. Визначення осесиметричного потенціалу системи електродів малої товщини методом нелінійних параметрів. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 1, 1965.
 2. Б. В. Валько, І. О. Прусов, Л. О. Романів. Осесиметричний потенціал системи електродів малої товщини. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 2, 1965.
-

УДК 517.946

М. І. ІВАНЧОВ

ДЕЯКІ АПРІОРНІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

Нехай задана квазілінійна система вигляду

$$a_{ij}(x, \vec{u}) u^i_{x_j} + a^l(x, \vec{u}, \vec{u}_x) = 0, \quad (l = 1, \dots, N) \quad (1)$$

де

$$\vec{u}(x) = \{u^1(x), \dots, u^N(x)\}, \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}$$

Для системи (1) розглянемо задачу Діріхле в області Ω , що лежить зовні поверхні S з класу $C^{(2)}$:

$$u^l(x)|_S = \psi^l(x), \quad (l = 1, \dots, N) \quad (2)$$

Будемо вважати, що початок координат знаходиться всередині поверхні S .

Встановимо деякі апріорні оцінки розв'язків задачі (1) — (2) в просторі $C^{(2)}_{\beta}(\bar{\Omega})$, $\beta > -1$ [1]. Будемо вважати, що функція $\vec{u}(x)$ належить до класу $C^{(2)}_{\beta}(\bar{\Omega})$, якщо для неї визначена і скінченна норма

$$\|\vec{u}(x)\|_{C^{(2)}_{\beta}(\bar{\Omega})} = \left\{ \sum_{l=1}^N \left[\sum_{k=0}^2 \max_{\Omega} (|x|^{k+\beta} |D^{(k)} u^l|) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Введемо позначення

$$M_{0, \beta}[\vec{u}] = \left[\sum_{l=1}^N (\max_{\Omega} |x|^{\beta} |u^l(x)|)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$M_{1, \beta}[\vec{u}] = \left[\sum_{l=1}^N (\max_{\Omega} |x|^{1+\beta} |\nabla u^l(x)|)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай виконуються такі умови:

а) коефіцієнти $a_{ij}(x, \vec{u})$ і $a^l(x, \vec{u}, \vec{p})$ неперервно диференційовані по всіх аргументах і при $x \in \Omega$, довільних $\vec{u}(x)$, таких, що $M_{0, \beta}[\vec{u}] < \infty$, і довільних скінченних $\vec{p}$ задовольняють умови

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq a_{ij}(x, \vec{u}) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2; \quad (3)$$

$$\left(\left| \frac{\partial a_{ij}(x, u)}{\partial x_k} \right| + \left| \frac{\partial a^l}{\partial p_k^m} \right| \right) |\vec{p}| + \left| \frac{\partial a^l}{\partial x_k} \right| |x| + |a^l| \leq \mu |\vec{p}| |x|^{-1};$$

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^m} \right| |\vec{p}| + \left| \frac{\partial a^l}{\partial u^m} \right| |x| \leq (\varepsilon + P) |\vec{p}| |x|^\beta, \quad (4)$$

де $\beta > -1$; $\mu = \mu(M_{0,\beta}[\vec{u}]) > 0$ — монотонна неспадна функція; $\nu = \nu(M_{0,\beta}[\vec{u}]) > 0$ — монотонна незростаюча функція; $\varepsilon > 0$ — достатньо мале число, що залежить від $\nu, \mu, M_{0,\beta}[\vec{u}]$ і N ; $P[|x|^\beta |\vec{u}|; |x|^{1+\beta} |\nabla \vec{u}|]$ — неперервна функція, монотонно зростаюча по першому аргументу і прямує до нуля при $|x|^{1+\beta} |\nabla \vec{u}| \rightarrow \infty$; $\vec{p} = \{p^1, \dots, p^N\} = \{\nabla u^1, \dots, \nabla u^N\}$;

б) $\psi^l(x) \in C^{(2)}(S)$. ($l=1, \dots, N$)

Теорема. При виконанні умов а)–б) для довільного розв'язку задачі (1)–(2) $\vec{u}(x)$ з класу $C_{\beta}^{(2)}(\bar{\Omega})$ величина $M_{1,\beta}[\vec{u}]$ оцінюється через $M_{0,\beta}[\vec{u}]$, постійні $\nu, \mu, N, \hat{P} = \max_{\Omega} P(M_{0,\beta}[\vec{u}], |x|^{1+\beta} |\nabla \vec{u}|)$, норму $\|\psi\|_{C^{(2)}(S)}$ і норму границі S в $C^{(2)}$.

Для доведення теореми введемо нові функції $v^l(x)$ за допомогою заміни

$$u^l = \varphi(v^l) |x|^{-\beta}, \quad (5)$$

де

$$\varphi(t) = -2M_{0,\beta}[\vec{u}] + 6eM_{0,\beta}[\vec{u}] \int_0^t e^{-s^q} ds, \quad q \gg 1$$

і величина q пізніше буде зафіксована. З такої заміни легко бачити, що для оцінки $M_{1,\beta}[\vec{u}]$ достатньо оцінити $M_{1,0}[\vec{v}]$.

Після заміни (5) система (1) буде мати вигляд

$$M^l(\vec{u}, \vec{v}) \equiv a_{ij}(x, \vec{u}) v_{x_i x_j}^l + \frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} a_{ij} v_{x_i}^l v_{x_j}^l - 2\beta \frac{a_{ij} x_i}{|x|^2} v_{x_j}^l +$$

$$+ \beta(\beta + 2) \frac{a_{ij} x_i x_j}{|x|^4} \frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)} - \beta \frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)} \frac{\Sigma a_{ij}}{|x|^2} + \frac{|x|^\beta}{\varphi'(v^l)} a^l(x, \vec{u}, \vec{u}_x) = 0$$

$$(l=1, \dots, N).$$

Введемо в розгляд функцію $w = |x|^{2r} |\nabla \vec{v}|^2$, де $r = 1 - \delta$, $0 < \delta \ll 1$. Очевидно, що для оцінки $M_{1,0}[\vec{v}]$ достатньо отримати рівномірну відносно δ оцінку $\max_{\Omega} w$. Якщо $\max_{\Omega} w$ досягається на границі S , то оцінка проводиться так само, як і у випадку обмеженої області [2]. Тому величину $\max_S w$ можна вважати відомою. Якщо ж $\max_{\Omega} w$ на границі S не досягається, то він досягається у внутрішній точці області Ω , бо $w(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow \infty$. Оцінку w всередині області Ω встановлюємо таким чином. Введемо функцію $\eta(x) = \max_S \{w(x) - \lambda, 0\}$, $\lambda \geq \max_S w$ і розглянемо рівність

$$\int_{\Omega} \sum_{l=1}^N M^l(\vec{u}, \vec{v}) (2v_{x_a}^l \eta |x|^{4r})_{x_a} dx = 0. \quad (7)$$

Використовуючи результати роботи [1], з рівності (7) одержимо

$$\begin{aligned}
 \int_{A_\lambda} & \left\{ a_{ij} \omega_{x_i} \omega_{x_j} |x|^{2r} + (\omega - \lambda) \left[2a_{ij} v_{x_\alpha x_i}^l v_{x_\alpha x_j}^l |x|^{4r} + 2a_{ij} B_{ij} \omega |x|^{2r-2} + \right. \right. \\
 & + 6ra_{ij} x_i \omega_{x_j} |x|^{2r-2} + \frac{da_{ij}}{dx_i} \omega_{x_j} |x|^{2r} - 2 \frac{da_{ij}}{dx_\alpha} v_{x_i x_j}^l v_{x_\alpha}^l |x|^{4r} - \\
 & - 2 \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' a_{ij} v_{x_i}^l v_{x_j}^l \omega |x|^{2r} - 2 \frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \frac{da_{ij}}{dx_\alpha} v_{x_i}^l v_{x_j}^l v_{x_\alpha}^l |x|^{4r} - \\
 & - 4 \frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} a_{ij} v_{x_j}^l v_{x_j x_\alpha}^l v_{x_\alpha}^l |x|^{4r} + 4\beta \frac{da_{ij}}{dx_\alpha} x_i v_{x_j}^l v_{x_\alpha}^l |x|^{4r-2} + \\
 & + 4\beta a_{ij} \delta_{i\alpha} v_{x_j}^l v_{x_\alpha}^l |x|^{4r-2} + 4\beta a_{ij} x_i v_{x_j x_\alpha}^l v_{x_\alpha}^l |x|^{4r-2} - \\
 & - 8\beta a_{ij} x_i x_\alpha v_{x_j}^l v_{x_\alpha}^l |x|^{4r-4} + 2 \left(\frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' a_{ij} A_{ij} \omega |x|^{2r-2} + \\
 & + 2 \frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)} \frac{da_{ij}}{dx_\alpha} A_{ij} v_{x_\alpha}^l |x|^{4r-2} + 2 \frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)} \frac{dA_{ij}}{dx_\alpha} v_{x_\alpha}^l |x|^{4r-2} - \\
 & - 4 \frac{\varphi(v^l)}{\varphi'(v^l)} a_{ij} A_{ij} x_\alpha v_{x_\alpha}^l |x|^{4r-4} + \frac{2}{\varphi'(v^l)} \frac{da^l}{dx_\alpha} v_{x_\alpha}^l |x|^{4r+\beta} + \\
 & \left. + 2 \frac{\varphi''(v^l)}{(\varphi'(v^l))^2} a^l \omega |x|^{2r+\beta} - 2\beta \frac{a^l}{\varphi'(v^l)} x_\alpha v_{x_\alpha}^l |x|^{4r+\beta-2} \right\} dx = 0, \quad (8)
 \end{aligned}$$

де A_λ — множина точок області Ω , в якій $\omega > \lambda$;

$$\begin{aligned}
 A_{ij}(x) & \equiv \beta \left[\delta_{ij} - (2 + \beta) \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right]; \quad B_{ij}(x) \equiv r \left[\delta_{ij} - 2(1 + r) \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right]; \\
 \frac{da_{ij}}{dx_\alpha} & = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^m} [|x|^{-\beta} \varphi'(v^m) v_{x_\alpha}^m - \beta x_\alpha \varphi(v^m) |x|^{-2-\beta}] + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha}; \\
 \frac{da^l}{dx_\alpha} & = \frac{\partial a^l}{\partial p_k^m} [|x|^{-\beta} \varphi'(v^m) v_{x_k x_\alpha}^m + |x|^{-\beta} \varphi''(v^m) v_{x_k}^m v_{x_\alpha}^m - \\
 & - 2\beta x_k |x|^{-2-\beta} \varphi'(v^m) v_{x_\alpha}^m - \beta \varphi(v^m) |x|^{-2\beta} \delta_{\alpha k} + \\
 & + \beta(\beta + 2) x_k x_\alpha \varphi(v^m) |x|^{-4-\beta}] + \frac{\partial a^l}{\partial u^m} [|x|^{-\beta} \varphi'(v^m) v_{x_\alpha}^m - \\
 & - \beta x_\alpha \varphi(v^m) |x|^{-2-\beta}] + \frac{\partial a^l}{\partial x_\alpha}.
 \end{aligned}$$

Використовуючи умову (3) для оцінки знизу, оцінимо наступні члени рівності (8):

$$\begin{aligned}
 a_{ij} \omega_{x_i} \omega_{x_j} |x|^{2r} & \geq \nu |\nabla \omega|^2 |x|^{2r}; \\
 a_{ij} v_{x_\alpha x_i}^l v_{x_\alpha x_j}^l |x|^{4r} & \geq \nu \sum_{i,j=1}^n \vec{v}_{x_i x_j}^2 |x|^{4r}; \\
 - \left[\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right]' a_{ij} v_{x_i}^l v_{x_j}^l \omega |x|^{2r} & \geq - \nu \sum_{i=1}^N \left[\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right]' \omega^2. \quad (9)
 \end{aligned}$$

При цьому враховуємо, що внаслідок вибору функції φ величина $-\left[\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)}\right]'$ додатня.

Інші члени рівності (8) оцінюємо зверху, використовуючи при цьому умови (3)–(4) і нерівність Коші $ab \leq \varepsilon_1 a^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} b^2$. Для прикладу наведемо кілька таких оцінок:

$$\begin{aligned} & \frac{da_{ij}}{dx_a} v_{x_i x_j}^l v_{x_a}^l |x|^{4r} \leq \varepsilon_1 \sum_{i,j=1}^n \vec{v}_{x_i x_j}^2 |x|^{4r} + \\ & + \frac{(\varepsilon + P)^2}{4\varepsilon_1} \sum_{m=1}^N [\varphi'(v^m)]^2 w^2 + c_1(\varepsilon, \varepsilon_1, P, q, M_{0,\beta}[\vec{u}]) w; \\ & \frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \frac{da_{ij}}{dx_a} v_{x_i x_j}^l v_{x_a}^l |x|^{4r} \leq c_2(\mu, M_{0,\beta}[\vec{u}]) \left[(\varepsilon + P) \left(\sum_{l=1}^N |\varphi''(v^l)| + 1 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)^2 \right] w^2 + c_3(\mu, q, M_{0,\beta}[\vec{u}]) w; \\ & \frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} a_{ij} v_{x_i x_j}^l v_{x_a}^l |x|^{4r} \leq c_4(\mu) |\nabla w|^2 |x|^{2r} + \\ & + c_5(\mu) \sum_{l=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)^2 w^2 + c_6(\mu, q, M_{0,\beta}[\vec{u}]) w; \\ & \frac{da^l}{dx_a} \frac{v_{x_a}^l}{\varphi'(v^l)} \leq \varepsilon_1 \sum_{i,j=1}^n \vec{v}_{x_i x_j}^2 |x|^{4r} + [\varepsilon + P + \sum_{l,m=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^m)} \right)^2] w^2 + \\ & + c_7(\mu, \varepsilon, \varepsilon_1, \beta, q, N, M_{0,\beta}[\vec{u}]) w. \end{aligned} \quad (10)$$

При одержанні оцінок враховувалось те, що без обмеження загальності можна вважати $w > 1$ і $|x| > 1$. Застосуємо одержані оцінки до членів рівності (8):

$$\begin{aligned} & \int_{A_\lambda} \left\{ |\nabla w|^2 |x|^{2r} + 2(w - \lambda) \left[\sum_{i,j=1}^n \vec{v}_{x_i x_j}^2 |x|^{4r} - \sum_{l=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' w^2 \right] \right\} dx \leq \\ & \leq \int_{A_\lambda} (w - \lambda) \left\{ c_8(\mu, \nu) |\nabla w|^2 |x|^{2r} + 3\varepsilon_1 \sum_{i,j=1}^n \vec{v}_{x_i x_j}^2 |x|^{4r} + \right. \\ & \quad + c_9(\varepsilon, \mu, \nu, M_{0,\beta}[\vec{u}]) \left[(\varepsilon + P)^2 \sum_{m=1}^N (\varphi'(v^m))^2 + \right. \\ & \quad \left. + (\varepsilon + P) \left(\sum_{l=1}^N |\varphi''(v^l)| + 1 \right) + \sum_{l=1}^N \frac{(\varphi''(v^l))^2}{(\varphi'(v^l))^4} + \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{l,m=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^m)}{\varphi'(v^l)} \right)^2 \right] w^2 + c_{10}(\nu, \mu, \beta, N, q, \varepsilon, P, \varepsilon_1, M_{0,\beta}[\vec{u}]) w \right\} dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Покладемо в (11) $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$. Тоді приходимо до такої нерівності:

$$\begin{aligned} & \int_{A_\lambda} \left[|\nabla w|^2 |x|^{2r} - 2(w - \lambda) \sum_{l=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' w^2 \right] dx \leq \\ & \leq \int_{A_\lambda} (w - \lambda) \left\{ c_8 |\nabla w|^2 |x|^{2r} + c_9 \left[(\varepsilon + P)^2 \sum_{m=1}^N (\varphi'(v^m))^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\varepsilon + P) \left(\sum_l |\varphi''(v^l)| + 1 \right) + \sum_l \frac{(\varphi''(v^l))^2}{(\varphi'(v^l))^4} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{l,m=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^m)} \right)^2 \right] w^2 + c_{10} w \right\} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Використаємо властивості функції P з умови (4). Для цього попередньо встановимо таку оцінку:

$$|x|^{1+\beta} |\nabla \vec{u}| \geq M_{0,\beta}[\vec{u}] (6\sqrt{\lambda} - |\beta|), \quad (13)$$

яка отримується з формули (5) з врахуванням властивостей функції $\varphi(t)$ [2]. Тепер виберемо λ_1 настільки великим, щоб при $\lambda > \lambda_1$ мала місце нерівність $P(M_{0,\beta}[\vec{u}], (6\sqrt{\lambda} - |\beta|) M_{0,\beta}[\vec{u}]) < \varepsilon$. Це можливо внаслідок властивостей функції P . Тоді при $\lambda > \lambda_1$ ми також будемо мати

$$P(|x|^\beta |\vec{u}|, |x|^{1+\beta} |\nabla \vec{u}|) \leq P(M_{0,\beta}[\vec{u}], (6\sqrt{\lambda} - |\beta|) M_{0,\beta}[\vec{u}]) < \varepsilon, \quad (14)$$

якщо врахувати нерівність (13).

Виберемо q , що входить у визначення функції $\varphi(t)$, настільки великим, щоб мало місце

$$\begin{aligned} - \sum_{l=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' & \geq c_9 \left[4\varepsilon^2 \sum_{m=1}^N (\varphi'(v^m))^2 + 2\varepsilon \sum_{l=1}^N |\varphi''(v^l)| + 2\varepsilon + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l=1}^N \frac{(\varphi''(v^l))^2}{(\varphi'(v^l))^4} + \sum_{l,m=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^m)} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Покажемо, що це можливо.

Перш за все відзначимо деякі співвідношення, які випливають з визначення функції $\varphi(t)$ (5):

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= 6eM_{0,\beta}[\vec{u}] e^{-t^q}; \\ \varphi''(t) &= -6eM_{0,\beta}[\vec{u}] e^{-t^q} q t^{q-1}; \\ -\frac{\varphi''}{\varphi'} &= q t^{q-1}; \quad -\left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)' = q(q-1) t^{q-2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Крім того, $\frac{1}{6e} < t < \frac{1}{2}$ [2].

Використовуючи співвідношення (16), легко бачити, що

$$\frac{(\varphi''(t))^2}{(\varphi'(t))^4} \leq t^{q-2} q^2 2^{-q} \frac{1}{36 e M_{0,\beta}^2 [\bar{u}]};$$

$$\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} \right)^2 \leq t^{q-2} q^2 2^{-q}; \quad (17)$$

$$\left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^m)} \right)^2 \leq q^2 (v^l)^{2q-2} e^{-2(v^l)^q + 2(v^m)^q} \leq q^2 (v^l)^{q-2} 2^{-q} e.$$

Тепер, якщо врахувати співвідношення (16) і (17), то при досить великому q і досить малому $\varepsilon > 0$ справедливості нерівності (15) стає очевидною. Отже, використовуючи нерівності (14) і (15), маємо при $\lambda > \lambda_1$

$$\int_{A_\lambda} \left[|\nabla w|^2 |x|^{2r} - (w - \lambda) \sum_{l=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' w^2 \right] dx \leq$$

$$\leq \int_{A_\lambda} (w - \lambda) (c_8 |\nabla w|^2 |x|^{2r} + c_{10} w) dx.$$

Позначимо $\min_{|u| < |x|^{-\beta} M_{0,\beta} [\bar{u}]} \left\{ - \sum_{l=1}^N \left(\frac{\varphi''(v^l)}{\varphi'(v^l)} \right)' \right\} = \kappa > 0$. Одержимо

$$\int_{A_\lambda} [|\nabla w|^2 |x|^{2r} + \kappa (w - \lambda) w^2] dx \leq \int_{A_\lambda} (w - \lambda) (c_8 |\nabla w|^2 |x|^{2r} + c_{10} w) dx. \quad (18)$$

Нехай $\lambda_2 = \max_{\Omega} w$ і $\lambda_3 = \lambda_2 - \frac{1}{c_8}$. Якщо $\lambda_3 \leq \lambda_1$, то $\max_{\Omega} w \leq \lambda_1 + \frac{1}{c_8}$, і ми маємо потрібну оцінку. Якщо ж $\lambda_3 > \lambda_1$, то візьмемо (18) при $\lambda = \lambda_3$ і одержимо

$$\kappa \int_{A_{\lambda_3}} (w - \lambda_3) w^2 dx \leq c_{10} \int_{A_{\lambda_3}} (w - \lambda_3) w dx.$$

Тому що в A_{λ_3} $w > \lambda_3$, то

$$\kappa \lambda_3 \int_{A_{\lambda_3}} (w - \lambda_3) w dx \leq c_{10} \int_{A_{\lambda_3}} (w - \lambda_3) w dx,$$

або $\lambda_3 \leq \frac{c_{10}}{\kappa}$. Звідси випливає, що

$$\max_{\Omega} w \leq \frac{c_{10}}{\kappa} + \frac{1}{c_8},$$

тобто необхідна оцінка встановлена і тим самим доведена теорема.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. П. Осколков, В. А. Тарасов. Об априорных оценках первых производных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченной области. Вестник Ленингр. ун-та, сер. мат., мех. и астрон., № 7, 1966.
2. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.

УДК 512.39

Г. Г. ЦЕГЕЛИК

УМОВА НАЙКРАЩОГО ВИБОРУ ПАРАМЕТРІВ У МЕТОДІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ЛОКАЛІЗАЦІЇ НУЛІВ ФУНКЦІЙ

У роботах [1, 2] розглядається локалізація за модулями нулів рядів Лорана (зокрема, степенних рядів або многочленів) за допомогою мажорант і діаграм Ньютона. Більш загальним методом локалізації за модулями нулів рядів Лорана (зокрема, степенних рядів або многочленів) є метод локалізації за допомогою параметрів, який введений в роботі [3]. У даній статті досліджується умова найкращого вибору параметрів у цьому методі, а також можливість за допомогою параметрів розширювати області, в яких немає нулів, або звужувати області, в яких є визначене число нулів.

Розглянемо ряд Лорана (зокрема, степенний ряд або многочлен)

$$f(z) = \sum_{v=p}^q A_v z^v, \quad (-\infty \leq p < q \leq \infty; A_p, A_q \neq 0) \quad (1)$$

який збігається в кільці $r < |z| < R$.

Позначимо через M множину індексів, відмінних від нуля коефіцієнтів ряду (1); через M_1 — множину тих індексів із M , які менші від k ($p < k < q$); через M_2 — множину тих індексів із M , які більші від k .

Нехай $k \in M$ і $\{\alpha_v\} (v \in M)$ — довільна послідовність додатних чисел (параметрів), яка задовольняє умову

$$\sum_{v \in M_1} \alpha_v = \delta, \quad \sum_{v \in M_2} \alpha_v = \alpha_k - \delta. \quad (0 < \delta < \alpha_k) \quad (2)$$

Покладемо

$$R_k = \inf_{v \in M_2} \left(\frac{\alpha_v \alpha_k}{\alpha_k \alpha_v} \right)^{\frac{1}{v-k}};$$

$$r_k = \sup_{v \in M_1} \left(\frac{\alpha_k \alpha_v}{\alpha_v \alpha_k} \right)^{\frac{1}{k-v}},$$

де $\alpha_v = |A_v|$ ($v \in M$).

В роботі [3] показано, що якщо $A_k \neq 0$ ($p < k < q$) і існує такий набір параметрів $\{\alpha_v\} (v \in M)$, який задовольняє умову (2), що $R_k > r_k$, то ряд Лорана (1) (зокрема, степенний ряд або многочлен) не перетворюється в нуль в кільці $r_k \leq |z| \leq R_k$.

Легко бачити, що різним наборам параметрів $\{\alpha_v\} (v \in M)$ (при постійних α_k і δ) відповідають різної величини кільця $r_k \leq |z| \leq R_k$. Роз-

глянемо множину всіляких наборів параметрів $\{\alpha_v\} (v \in M)$, для яких $R_k > r_k$. Цій множині наборів параметрів відповідає якась множина кілець $K = \{r_k \leq |z| \leq R_k\}$. Позначимо об'єднання всіх кілець з множини K через кільце $q_k \leq |z| \leq Q_k$. Нехай це кільце відповідає якомусь наборові параметрів $\{\alpha_v^{(0)}\} (v \in M)$.

Для знаходження набору параметрів $\{\alpha_v^{(0)}\}$ і кільця $q_k \leq |z| \leq Q_k$, яке йому відповідає, використаємо наступну лему.

Нехай в області D :

$$\begin{cases} 0 < x_i < \delta, \\ \sum_{i=1}^n x_i = \delta \quad (1 \leq i \leq n; 1 < n \leq \infty) \end{cases}$$

n -вимірному Евклідовому простору задана послідовність функцій $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)$, яка задовольняє такі умови:

- 1) всі функції неперервні і або зростають, або спадають;
- 2) якщо всі функції неперервно зростають, то кожна функція $\varphi_v(x_v)$ зростає від 0 до деякого постійного β_v при зростанні x_v від 0 до δ ; якщо всі функції неперервно спадають, то кожна функція $\varphi_v(x_v)$ спадає від ∞ до деякого постійного γ_v при зростанні x_v від 0 до δ .

Позначимо

$$B_1 = \sup_{x \in D} \inf_{1 \leq v \leq n} \varphi_v(x_v);$$

$$B_2 = \inf_{x \in D} \sup_{1 \leq v \leq n} \varphi_v(x_v),$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)$. Має місце наступна лема.

Лема 1. Існує одна і тільки одна точка $x = x^{(1)}$ області D , для якої

$$\varphi_1(x_1^{(1)}) = \varphi_2(x_2^{(1)}) = \dots = \varphi_n(x_n^{(1)}), \quad (3)$$

причому для цієї точки досягається B_1 та B_2 і $B_1 = B_2$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що якщо для точки $x = x^{(1)}$ області D виконується (3), то, очевидно, для неї досягається B_1 та B_2 і $B_1 = B_2$. Доведемо тепер, що така точка існує і вона єдина.

Допустимо, що всі функції $\varphi_v(x_v)$ неперервно зростають (якщо всі $\varphi_v(x_v)$ неперервно спадають, то доведення аналогічне). Нехай $n=2$. Виберемо в області D точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, для якої $\varphi_1(x_1^{(0)}) < \varphi_2(x_2^{(0)})$. При зростанні x_1 від $x_1^{(0)}$ до δ функція $\varphi_1(x_1)$ неперервно зростає від $\varphi_1(x_1^{(0)})$ до β_1 , в той час $x_2 = \delta - x_1$ спадає від $x_2^{(0)}$ до 0 і функція $\varphi_2(x_2)$ неперервно спадає від $\varphi_2(x_2^{(0)})$ до 0. Тому існує одне значення $x = x^{(1)}$ в області D , для якого $\varphi_1(x_1^{(1)}) = \varphi_2(x_2^{(1)})$, тобто лема справедлива для $n=2$.

Нехай лема вірна для $n=k > 2$, доведемо, що вона вірна для $n=k+1$. Виберемо в області D точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_{k+1}^{(0)})$, для якої $\varphi_1(x_1^{(0)}) = \varphi_2(x_2^{(0)}) = \dots = \varphi_k(x_k^{(0)}) < \varphi_{k+1}(x_{k+1}^{(0)})$.

Позначимо

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = y_k, \quad x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + \dots + x_k^{(0)} = y_k^{(0)}.$$

Оскільки лема вірна для $n=k$, то для кожного значення y_k з проміжку $[y_k^{(0)}, \delta]$ існує одна точка, для якої

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2) = \dots = \varphi_k(x_k). \quad (4)$$

Позначимо множину точок $(x_1, \dots, x_k)$, для якої виконується (4), коли y_k пробігає свої значення від $y_k^{(0)}$ до δ , через S . Очевидно, що, розглядаючи тільки точки множини S , при зростанні y_k від $y_k^{(0)}$ до δ функція $\varphi_k(x_k)$ неперервно зростає, в той час $x_{k+1} = \delta - y_k$ спадає від $\delta - y_k^{(0)}$ до 0, і функція $\varphi_{k+1}(x_{k+1})$ також неперервно спадає до 0. Таким чином, існує одна точка $x = x^{(1)}$ ($y_k^1 = y_k^{(1)}$, $x_{k+1} = \delta - y_k^{(1)}$) області D , для якої $\varphi_k(x_k^{(1)}) = \varphi_{k+1}(x_{k+1}^{(1)})$. А оскільки для цієї точки виконується (4), то має місце (3). Лема доведена.

Використовуючи лему 1, легко бачити, що $q_k = t_1$, де t_1 — додатний корінь рівняння

$$\sum_{j=1}^m a_{i_j} t^{k-i_j} = \frac{a_k}{\alpha_k} \delta, \quad (5)$$

$i_1, i_2, \dots, i_m$ ($1 \leq m \leq \infty$) — всі елементи множини M_1 , розміщені в порядку $i_l > i_{l+1}$ ($1 \leq l \leq m-1$); $Q_k = t_2$, де t_2 — додатний корінь рівняння

$$\sum_{j=1}^n a_{s_j} t^{s_j-k} = \frac{a_k}{\alpha_k} (\alpha_k - \delta), \quad (6)$$

$s_1, s_2, \dots, s_n$ ($1 \leq n \leq \infty$) — всі елементи множини M_2 , розміщені в порядку $s_l < s_{l+1}$ ($1 \leq l \leq n-1$).

Набір параметрів $\{\alpha_v^{(0)}\}$ ($v \in M$) буде

$$\begin{aligned} \alpha_{i_l}^{(0)} &= \frac{\alpha_k}{a_k} a_{i_l} \frac{1}{t_1^{k-i_l}}; \quad (1 \leq l \leq m) \\ \alpha_{s_l}^{(0)} &= \frac{\alpha_k}{a_k} a_{s_l} t_2^{s_l-k}. \quad (1 \leq l \leq n) \end{aligned} \quad (7)$$

З цього випливає

Теорема 1. Якщо $R_k > r_k$ для деякого набору параметрів $\{\alpha_v\}$ ($v \in M$) (при заданих постійних α_k і δ), то існує єдиний набір параметрів $\{\alpha_v^{(0)}\}$ ($v \in M$), який визначається з (7), що ряд Лорана (1) (зокрема, степенний ряд або многочлен) не перетворюється в нуль у кільці

$$q_k \leq |z| \leq Q_k,$$

де q_k і Q_k — відповідно додатні корені рівнянь (5) і (6).

Геометрично це означає, що якщо $R_k > r_k$ для деякого набору параметрів $\{\alpha_v\}$ ($v \in M$), то існує єдиний набір параметрів $\{\alpha_v^{(0)}\}$ ($v \in M$), що всі точки зображення коефіцієнтів ряду [1, 2]

$$f_0(z) = \sum_{v=p}^q \frac{A_v}{\alpha_v^{(0)}} z^v$$

лежать на двох півпрямих, які виходять з точки зображення k -го коефіцієнта, тобто діаграма Ньютона функції $f_0(z)$ складається з двох півпрямих, які виходять з однієї точки.

Різним значенням δ ($0 < \delta < \alpha_k$) (при постійному α_k) відповідають різні значення величин q_k і Q_k . Розглянемо множину всіх значень δ , для яких $Q_k \geq q_k$. Цій множині значень δ відповідає якась множина L значень q_k і Q_k . Позначимо через p_k і P_k відповідно нижню і верхню границі множини L .

Очевидно, що величинам p_k і P_k відповідають два значення δ : δ_1 і δ_2 і два набори параметрів $\{\alpha_v^{(1)}\}$ і $\{\alpha_v^{(2)}\}$, для яких $q_k = Q_k$. Щоб знайти p_k , P_k , δ_1 , δ_2 , $\{\alpha_v^{(1)}\}$ і $\{\alpha_v^{(2)}\}$, використаємо таку лему.

Розглянемо дві області $D_1(t)$:

$$\begin{cases} 0 < x_i < t, \\ \sum_{i=1}^{n_1} x_i = t \quad (1 \leq i \leq n_1; 1 \leq n_1 \leq \infty) \end{cases}$$

і $D_2(t)$:

$$\begin{cases} 0 < y_i < \gamma - t, \\ \sum_{i=1}^{n_2} y_i = \gamma - t \quad (1 \leq i \leq n_2; 1 \leq n_2 < \infty; 0 < t < \gamma = \text{const}). \end{cases}$$

відповідно n_1 - і n_2 -вимірному Евклідовому простору, які при кожному фіксованому значенні t набувають конкретного вигляду.

Нехай в області $D_1(t)$ задана послідовність функцій $\{\varphi_v(x_v)\}$ ($1 \leq v \leq n_1$), кожна функція $\varphi_v(x_v)$ неперервна і спадає від ∞ до деякого $b_v(t)$ при зростанні x_v від 0 до t ; в області $D_2(t)$ задана послідовність функцій $\{\psi_v(y_v)\}$ ($1 \leq v \leq n_2$), кожна функція $\psi_v(y_v)$ неперервна і зростає від 0 до деякого $c_v(t)$ при зростанні y_v від 0 до $\gamma - t$.

Нехай на основі леми 1 існує хоч би одне значення $t = t_0$, для якого в області $D_1(t_0)$ існує точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_{n_1}^{(0)})$ і в області $D_2(t_0)$ існує точка $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_{n_2}^{(0)})$, що

$$\varphi_1(x_1^{(0)}) = \dots = \varphi_{n_1}(x_{n_1}^{(0)}) < \psi_1(y_1^{(0)}) = \dots = \psi_{n_2}(y_{n_2}^{(0)}).$$

Тоді на основі леми 1 справедлива така лема:

Лема 2. Існує тільки два значення t : t_1 і t_2 , дві точки $x^{(1)}$ і $x^{(2)}$ відповідно в $D_1(t_1)$ і $D_2(t_2)$ і дві точки $y^{(1)}$ і $y^{(2)}$ відповідно в $D_2(t_1)$ і $D_2(t_2)$, що

$$\varphi_1(x_1^{(i)}) = \dots = \varphi_{n_1}(x_{n_1}^{(i)}) = \psi_1(y_1^{(i)}) = \dots = \psi_{n_2}(y_{n_2}^{(i)}). \quad (i=1, 2)$$

Доведення леми очевидне.

Використовуючи лему 2, легко бачити, що $p_k = t_3$ і $P_k = t_4$, де t_3 і t_4 — два додатні корені ($t_3 < t_4$) рівняння

$$\sum_{j=1}^m a_{lj} t^{k-lj} + \sum_{j=1}^n a_{sj} t^{k-sj} = a_k. \quad (8)$$

Набір параметрів $\{\alpha_v^{(1)}\}$ і $\{\alpha_v^{(2)}\}$ ($v \in M$) буде

$$\begin{aligned} \alpha_{l_l}^{(j)} &= \frac{\alpha_k}{a_k} a_{l_l} t^{k-l_l}; \quad (1 \leq l \leq m) \\ \alpha_{s_l}^{(j)} &= \frac{\alpha_k}{a_k} a_{s_l} \frac{1}{t^{s_l-k}}, \quad (1 \leq l \leq n) \end{aligned} \quad (9)$$

де $j=1, 2$.

Значення δ_1 і δ_2 будуть

$$\delta_1 = \frac{\alpha_k}{a_k} \sum_{v \in M_1} a_v t_3^{k-v}, \quad \delta_2 = \frac{\alpha_k}{a_k} \sum_{v \in M_1} a_v t_4^{k-v}, \quad (10)$$

Звідси випливає наступна теорема:

Теорема 2. Якщо $R_k > r_k$ для деякого набору параметрів $\{\alpha_v\}$ ($v \in M$) (при заданих постійних α_k і δ), то існує таких два значення δ : δ_1 і δ_2 , які визначаються з (10), для яких існує два набори параметрів $\{\alpha_v^{(1)}\}$ і $\{\alpha_v^{(2)}\}$ ($v \in M$), які визначаються з (9), що ряд Лорана (1) (зокрема, степенний ряд або многочлен) не перетворюється в нуль у кільці

$$p_k < |z| < P_k,$$

де p_k і P_k — два додатних корені рівняння (8).

Геометрично це означає, що якщо $R_k > r_k$ для деякого набору параметрів $\{\alpha_v\}$ ($v \in M$), то існує такі два набори параметрів $\{\alpha_v^{(1)}\}$ і $\{\alpha_v^{(2)}\}$ ($v \in M$), що всі точки зображення коефіцієнтів ряду

$$f_i(z) = \sum_{v=p}^q \frac{A_v}{\alpha_v^{(i)}} z^v \quad (i=1, 2)$$

для $\delta = \delta_i$ будуть лежати на одній прямій, тобто діаграма Ньютона функції $f_i(z)$ ($i=1, 2$) буде складатися з однієї прямої.

В роботі [3] показано, що якщо за допомогою параметрів встановлено, що ряд Лорана (1) (зокрема, степенний ряд або многочлен) не перетворюється в нуль у кільцях $r_{k_1} \leq |z| \leq R_{k_1}$, $r_{k_2} \leq |z| \leq R_{k_2}$, ($k_2 > k_1$), то він має точно $h = k_2 - k_1$ нулів у кільці

$$R_{k_1} < |z| < r_{k_2}.$$

Враховуючи це і попередні теореми, бачимо справедливості такої теореми:

Теорема 3. Якщо ряд Лорана (1) (зокрема, степенний ряд або многочлен) не перетворюється в нуль у кільцях $p_{k_1} < |z| < P_{k_1}$, $p_{k_2} < |z| < P_{k_2}$ ($k_2 > k_1$), які визначаються теоремою 2, то він має точно $h = k_2 - k_1$ нулів у кільці

$$P_{k_1} \leq |z| \leq p_{k_2}.$$

Зауваження. При $n = \infty$ лема 1 справедлива для функцій типу

$$\psi_v = \sqrt[n]{\frac{x_v}{a_v}}, \quad \varphi_v = \sqrt[n]{\frac{b_v}{x_v}}, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{a_v} < \infty, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{b_v} > 0,$$

де $a_v, b_v > 0$; при $n_1 = n_2 = \infty$ лема 2 вірна для функцій типу

$$\varphi_v = \sqrt[n]{\frac{c_v}{x_v}}, \quad \psi_v = \sqrt[n]{\frac{x_v}{d_v}}, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{c_v} > 0, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{d_v} < \infty,$$

де $c_v, d_v > 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. A. Ostrowski. Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des series Laurent. Acta Math., 72, 1940.
2. А. Н. Костовский. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во Львов. ун-та, 1967.
3. Г. Г. Цегелик. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. Изв. вузов, Математика, 12, 1967.

УДК 517.946

Г. С. ГУПАЛО

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ НЕЙМАНА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 2-ГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Дана робота є узагальненням результатів [1—3], в якій розглядається узагальнена (в певному розумінні) задача Неймана для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу з безмежно диференційовними коефіцієнтами, подано розв'язок такої задачі, теорему єдиності.

1. Нехай маємо позначення, введені в попередній статті [4].

2. **Постановка задачі.** Нехай $B \in D'(S)$. Знайти розв'язок $u(x)$ рівняння $\mathcal{M}u=0$ в обмеженій області $\Omega \subset E^n$, який на поверхні S задовольняє умову

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left(\alpha \frac{du}{d\nu} + \beta u \right) \varphi dS_\epsilon = B[\varphi] \text{ для кожної } \varphi \in D(S), \quad (1)$$

де $\alpha, \beta \in D(S)$ і $\alpha \neq 0$ на поверхні S . Без порушення загальності можна припустити, що $\alpha = a = \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} n_k \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, тоді (1) запишеться у вигляді

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} P u \cdot \varphi dS_\epsilon = B[\varphi] \text{ для кожної } \varphi \in D(S), \quad (2)$$

де

$$P \equiv a \frac{du}{d\nu} + \beta u, \quad (3)$$

β — довільна функція з $D(S)$.

Має місце

Лема 1. Якщо $\varphi(x)$ — основна функція на S , то

$$\chi(x) = \int_S P_y G(y, x) \varphi(y) d_y S -$$

основна функція на S , де $G(x, y)$ — головний фундаментальний розв'язок [5] рівняння $\mathcal{M}u=0$ в E^n і P означено формулою (3).

Доведення леми 1 аналогічно доведенню леми 1 в роботі [3].

Теорема 1. Якщо $B \in D'(S)$ і $C[g] = B[\varphi_g]$, де φ_g — розв'язок інтегрального рівняння

$$g(x) = -\varphi(x) + 2 \int_S P_y G(y, x) \varphi(y) d_y S,$$

то функція $u(x) = 2C[G(x, y)]$ при $x \in \Omega$ є розв'язком узагальненої задачі Неймана для рівняння $\mathfrak{M}u = 0$.

Доведення. В силу означення похідної, лінійності і неперервності функціоналу C маємо $\mathfrak{M}u = 2C[\mathfrak{M}_x G(x, y)] = 0$, $x \in \Omega$. Тепер

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} P u \cdot \varphi dS_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} P_{x_\varepsilon} C[G(x_\varepsilon, y)] \varphi(x_\varepsilon) d_{x_\varepsilon} S_\varepsilon =$$

в силу леми 5 з [6]

$$= 2C \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} P_{x_\varepsilon} G(x_\varepsilon, y) \varphi(x_\varepsilon) d_{x_\varepsilon} S_\varepsilon \right] =$$

в силу формули стрибка з [5], леми 1 і умов теореми остаточно одержуємо

$$= C \left[-\varphi(y) + 2 \int_S P_x G(x, y) \varphi(x) d_x S \right] = B[\varphi_g].$$

Має місце така теорема:

Теорема 2 (єдиності). Якщо $c \leq 0$, $\beta \geq 0$, причому хоча б одна з функцій c і β не дорівнює тотожно нулевій, а u_1 і u_2 є розв'язками сформульованої узагальненої задачі Неймана, то різниця $u_1 - u_2$ дорівнює нулю.

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 2 з попередньої статті [4], тому ми його не проводимо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Z. S z m y d t. Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzato. Atti Accad. Nar. Lincei, 32, 867 (1962).
2. Z. S z m y d t. Sur un probleme de Neumann generalise. Ann. Polon. Math. XV, 3, 309 (1964).
3. Г. С. Г у п а л о. Про узагальнену задачу Неймана. Доп. АН УРСР, 199 (1967).
4. Г. С. Г у п а л о. Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу. Даний збірник.
5. К. М и р а н д а. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Изд-во иностр. л-ры, 1957.
6. Г. С. Г у п а л о. Про узагальнену задачу Діріхле. Доп. АН УРСР, 843 (1966).

УДК 517.946

Г. С. ГУПАЛО

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 2-ГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Дана замітка є узагальненням результатів [1—3], в якій ми розглядаємо узагальнену (в певному розумінні) задачу Діріхле для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу з безмежно диференційовними коефіцієнтами, подаємо розв'язок такої задачі, доводимо теорему єдиності і необхідну і достатню умову того, що розв'язок набуває узагальнених граничних значень.

1. Нехай Ω — обмежена область n -вимірного евклідового простору E^n точок $x = (x_1, \dots, x_n)$, S — її $n-1$ -вимірна гладка границя. В $\Omega \cup S$ розглядається еліптичний диференціальний оператор 2-го порядку з безмежно диференційовними коефіцієнтами

$$\mathfrak{M}u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

крім того, вважається, що $c(x) \leq 0$, $a_{ik} = a_{ki}$ в області Ω .

Через n_y позначимо внутрішню нормаль до поверхні S в точці y , через $v(y)$ — її орт, S_ε ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$) — поверхня в Ω , паралельна до поверхні S . Через $D(S)$ позначимо простір безмежно диференційовних функцій на поверхні S (простір основних функцій), $D'(S)$ — простір лінійних неперервних функціоналів над $D(S)$ (простір узагальнених функцій). Нехай $F \in D'(S)$, говоритимемо, що функція $u(x)$, визначена в області Ω , набуває на S узагальнених граничних значень F , коли

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon) \varphi(x_\varepsilon) d_{x_\varepsilon} S_\varepsilon = F[\varphi] \text{ для кожної } \varphi \in D(S), \quad (1)$$

причому $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y)$, $x_\varepsilon = y + \varepsilon n_y$, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$, $y \in S$.

2. Постановка задачі. Знайти розв'язок $u(x)$ рівняння $\mathfrak{M}u = 0$ в обмеженій області $\Omega \subset E^n$, який на поверхні S набуває узагальнених граничних значень F .

Лема 1. Якщо $\varphi(x)$ — основна функція на S , то

$$\psi(x) = \int_S Q_x G(y, x) \varphi(y) d_y S, \quad x \in S$$

— основна функція на S , де $G(x, y)$ — головний фундаментальний розв'язок [4] рівняння $\mathfrak{M}u=0$ в E^n , $Q=a\frac{d}{d\nu}+(\beta-b)$, $a=\left[\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^na_{ik}\times\right.\right.$
 $\left.\times n_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $\frac{d}{d\nu}$ — диференціювання по конормалі, n_k — напрямні коси-
 нуси нормалі, $b=\sum_{i=1}^ne_in_i$, $e_i=b_i-\sum_{k=1}^n\frac{da_{ik}}{dx_k}$, β — довільна функція
 з $D(S)$.

Лема 1 доводиться аналогічно, як лема 4 з статті [3].

Теорема 1. Якщо $F\in D'(S)$ і $A[g]=F[\varphi_g]$, де φ_g — розв'язок інте-
 грального рівняння

$$g(x)=\varphi(x)+2\int_S Q_x G(y, x)\varphi(y)d_y S, \quad x\in S$$

то функція $u(x)=2A[Q_y G(x, y)]$ при $x\in\Omega$ є розв'язком узагальненої за-
 дачі Діріхле для рівняння $\mathfrak{M}u=0$.

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення похідної, в силу лінійно-
 сті і неперервності функціоналу A матимемо, що $\mathfrak{M}u=2A[Q_y \mathfrak{M}_x G(x, y)]=$
 $=0$, при $x\in\Omega$. Покажемо, що функція $u(x)$ набирає заданих узагальне-
 них граничних значень F

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\int_{S_\varepsilon} 2A[Q_y G(x_\varepsilon, y)]\varphi(x_\varepsilon)d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon=$$

в силу леми 5 з [3]

$$=2A\left[\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\int_{S_\varepsilon} Q_y G(x_\varepsilon, y)\varphi(x_\varepsilon)d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon\right]=$$

в силу формул стрибка з [4], леми 1 і умов теореми остаточно одержуємо

$$=A\left[\varphi(y)+2\int_S Q_y G(x, y)\varphi(x)d_x S\right]=F[\varphi_g].$$

Теорема 2. Якщо u_1 і u_2 є розв'язками сформульованої узагальненої
 задачі Діріхле, то різниця u_1-u_2 дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я. Різницю u_1-u_2 позначимо через u , тоді

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon=0 \text{ для кожної } \varphi\in D(S).$$

Перейшовши до інтегрування по поверхні S , матимемо, що

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\int_S u_\varepsilon(y)\varphi(y)d_y S=0 \text{ для кожної } \varphi\in D(S), \quad (2)$$

де $u_\varepsilon(y)=u(y+\varepsilon\nu(y))W_\varepsilon(y)$, $W_\varepsilon(y)$ — якобіан перетворення.

Функцію u , яка задовольняє рівняння $\mathfrak{M}u=0$ в області Ω , можна
 подати у вигляді

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}2\int_{S_\varepsilon} \mu_\varepsilon(x_\varepsilon)Q_{x_\varepsilon}G(z, x_\varepsilon)d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon, \quad (3)$$

де $\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)$ — розв'язок відповідного інтегрального рівняння.

Підставивши $\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)$ в (2), використавши позначення $u_\varepsilon(y)$, матимемо

$$u(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S u_\varepsilon(y) \varphi_\varepsilon(z, y) d_y S, \quad (2)$$

де

$$\varphi_\varepsilon(z, y) = Q_y G(z, y + \varepsilon \nu(y)) - \int_{S_\varepsilon} \Gamma(x, y + \varepsilon \nu(y)) Q_{x_\varepsilon} G(z, x_\varepsilon) d_{x_\varepsilon} S_\varepsilon$$

і

$$\varphi_\varepsilon(z, y) \rightarrow \varphi(z, y) \in D(S), \quad z \in \Omega, \quad y \in S.$$

В силу леми з [5] і рівностей (2) і (4) одержуємо, що $u(z) = 0$. Оскільки z — яка-небудь точка області Ω , то $u(z) \equiv 0$, тобто $u_1 - u_2 = 0$ в області Ω .

Теорема 3. Для того щоб розв'язок рівняння $\mathfrak{M}u = 0$ набирав узагальнених граничних значень, необхідно і достатньо, щоб знайшлося таке число $k \geq 0$, щоб $\int_\Omega r^k(x) |u(x)| dx < +\infty$, де $r(x)$ — віддаль від точки x

до границі S області Ω .

Теорема 3 доводиться аналогічно, як теорема 3 в роботі [3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Z. Szmydt. Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzato. Atti Accad. Naz. Lincei, **32**, 867 (1962).
2. Z. Szmydt. L'unicite des solutions d'un probleme de Dirichlet generalise. Atti Accad. Naz. Lincei, **33**, 6 (1962—1963).
3. Г. С. Гупало. Про узагальнену задачу Діріхле. Доповіді АН УРСР, **843** (1966).
4. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Изд-во иностр. л-ры, 1957.
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. Пространства основных и обобщенных функций. М., 1958.

УДК 517.55

А. І. КАРДАШ, І. І. ЧУЛИК

ПРО ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ ТА ЙОГО МАЖОРАНТИ НЬЮТОНА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

1. Розглянемо функцію

$$f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} a_{kl} z^k w^l, \quad (1)$$

степеневий ряд якої абсолютно збігається в обмеженій повній бікруговій області D .

Нехай E_f — множина пар (k, l) цілих невід'ємних індексів коефіцієнтів $a_{kl} \neq 0$. В системі координат $\mu\nu\lambda$ кожній точці $(k, l) \in E_f$ зіставимо точку зображення $P_{kl}(k, l, -\ln |a_{kl}|)$. Множину всіх точок зображення позначимо Φ_0 , а множину точок відрізків, що сполучають кожну пару точок множини Φ_0 , через Φ_1 . Сполучимо відрізками кожну пару точок множини Φ_1 , одержимо множину Φ_2 . Нарешті, з'єднуючи відрізками кожну пару точок множини Φ_2 і беручи її замикання, одержимо множину $\bar{\Phi}_f$ з точками $B(\alpha, \beta, \gamma)$ в системі координат $\mu\nu\lambda$. Опукла множина $\bar{Q}_f$ є проекцією множини $\bar{\Phi}_f$ на площину $\mu\nu$. Для кожної фіксованої точки $(\alpha, \beta) \in \bar{Q}_f$ визначимо точку $B_{\alpha\beta}(\alpha, \beta, \kappa_{\alpha\beta})$, де $\kappa_{\alpha\beta} = \inf_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \bar{\Phi}_f} \gamma$. Множині всіх точок $(\alpha, \beta) \in \bar{Q}_f$ відповідає множина $\mathfrak{D}_f$ точок $B_{\alpha\beta}$, яку назовемо діаграмою Ньютона [1] функції (1).

Теорема 1. Діаграма $\mathfrak{D}_f$ є відкритою опуклою вниз поверхнею.

Візьмемо дві довільні точки $B_1, B_2 \in \bar{\Phi}_f$. Можливі два випадки:

а) відрізок $\overline{B_1 B_2} \in \bar{\Phi}_f$ і $\bar{\Phi}_f$ — опукла множина;

б) знайдеться принаймні одна точка $B(\alpha, \beta, \gamma)$ відрізка $\overline{B_1 B_2}$ така, що $B \notin \bar{\Phi}_f$. Це означає, що

$$\gamma < \kappa_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

де $\kappa_{\alpha\beta}$ за означенням — апліката точки, що лежить на границі множини $\bar{\Phi}_f$, тобто на діаграмі $\mathfrak{D}_f$. Однак нерівність (2) суперечить означенню величини $\kappa_{\alpha\beta}$. Отже, другий випадок неможливий, і $\bar{\Phi}_f$ — опукла вниз множина, звідки й випливає теорема 1.

Функцію

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} T_{kl} z^k w^l, \quad (3)$$

де

$$T_{kl} = \exp(-\kappa_{kl}), \quad (k, l) \in \bar{Q}_f \quad (4)$$

назвемо мажорантою Ньютона [1] функції $f(z, w)$.

Із означення $\kappa_{\alpha\beta}$ випливає, що $\kappa_{kl} \leq -\ln |a_{kl}|$, тому має місце нерівність

$$|a_{kl}| \leq T_{kl}, \quad (k, l) \in \bar{Q}_f. \quad (5)$$

Коефіцієнти T_{kl} мажоранти $\mathfrak{M}_f(z, w)$ можна виразити безпосередньо через модулі коефіцієнтів ряду (1).

Розглянемо трикутник Δ_P , утворений точками зображення $P_{k,l}$, P_{k_2,l_2} , P_{k_3,l_3} , проекція якого на площину $\mu\nu$ дасть трикутник Δ з вершинами в точках (k_1, l_1) , (k_2, l_2) , (k_3, l_3) . Для того, щоб точка $(k, l) \in \Delta$ ($\Delta \in \bar{Q}_f$), необхідно й достатньо, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned} H_1 &= h_{23}(k, l) \cdot h_{23}(k_1, l_1) \geq 0; \\ H_2 &= h_{31}(k, l) \cdot h_{31}(k_2, l_2) \geq 0; \\ H_3 &= h_{12}(k, l) \cdot h_{12}(k_3, l_3) \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $h_{12}(k, l) = (k-k_1)(l_2-l_1) - (k_2-k_1)(l-l_1)$, а h_{23} і h_{31} одержуються циклічною перестановкою індексів [1].

Нехай трикутник Δ не вироджується в пряму, тобто серед нерівностей (6) є хоча б одна строга нерівність. Із рівняння площини, яка проходить через точки $P_{k,l}$, P_{k_2,l_2} , P_{k_3,l_3} , визначимо аплікату λ_{kl} точки $(k, l, \lambda_{kl}) \in \Delta_P$:

$$\lambda_{kl} = -\frac{1}{h_{12}(k_3, l_3)} \ln [|a_{k,l}|^{h_{23}(k,l)} \cdot |a_{k_2,l_2}|^{h_{31}(k,l)} \cdot |a_{k_3,l_3}|^{h_{12}(k,l)}].$$

Тоді з побудови діаграми $\mathfrak{D}_f$ випливає формула

$$T_{kl} = \sup_{H_1, H_2, H_3 > 0} [|a_{k,l}|^{h_{23}(k,l)} \cdot |a_{k_2,l_2}|^{h_{31}(k,l)} \cdot |a_{k_3,l_3}|^{h_{12}(k,l)}]^{\frac{1}{h_{12}(k_3, l_3)}}. \quad (7)$$

2. Введемо допоміжну функцію

$$g(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{n=k+l} z^k w^l \right), \quad (8)$$

де

$$b_n = \max_{n=k+l} |a_{kl}|, \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

В силу (9) всі точки зображення $\tilde{P}_{kl}(k, l, -\ln b_n)$ функції $g(z, w)$ для фіксованого $n=k+l$ лежать на відрізку $\Gamma_n = \tilde{P}_{n0}\tilde{P}_{0n}$, де $\tilde{P}_{n0}$ і $\tilde{P}_{0n}$ — точки зображення коефіцієнтів b_n функцій $\varphi(z) \equiv g(z, 0)$ та $\varphi(w) \equiv g(0, w)$ відповідно.

Нехай $\{n_i\}$ — послідовність вершинних індексів плоскої діаграми $\mathfrak{D}_\varphi$ [2]. Тоді $\{(n_i, 0)\}$ та $\{(0, n_i)\}$ є послідовностями вершинних індексів діаграми $\mathfrak{D}_g$. Ребрами $\mathfrak{D}_g$ є відрізки Γ_{n_i} , а також ребра діаграм $\mathfrak{D}_\varphi$ в площинах $\mu\lambda$ та $\nu\lambda$. Таким чином, гранями діаграми $\mathfrak{D}_g$ є рівнобічні трапеції з основами Γ_{n_i} та $\Gamma_{n_{i+1}}$ за винятком хіба що грані, на якій лежить точка $\tilde{P}_{00}$. В кожній грані $\mathfrak{D}_g$ лежить принаймні одне ребро діаграми $\mathfrak{D}_\varphi$. Для всіх $n=k+l$ кожній точці $(k, l) \in \bar{Q}_g = \mu\nu\mathfrak{D}_g \supseteq \bar{Q}_f$ відповідає точка $\tilde{B}_{kl}(k, l, \kappa_n) \in \mathfrak{D}_g$.

Нехай $t_n = \exp(-\kappa_n)$, тоді функція

$$\mathfrak{M}_g(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \left(\sum_{n=k+l} z^k w^l \right), \quad (k, l) \in \bar{Q}_g \quad (10)$$

є мажорантою Ньютона функції (8), причому $b_n \leq t_n$. Зокрема, $\mathfrak{M}_\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ є мажорантою Ньютона функції $\varphi(z)$.

Лема. Для всіх $n = k + l$, $(k, l) \in \bar{Q}_f$ має місце нерівність

$$|a_{kl}| \leq T_{kl} \leq t_n. \quad (11)$$

Нехай пряма L , що проходить через довільну точку $(k, l) \in \bar{Q}_f$, перпендикулярна до площини $\mu\nu$ і перетинає діаграми $\mathfrak{D}_f$ та $\mathfrak{D}_g$ в точках B_{kl} та $\tilde{B}_{kl}$ відповідно. Припустимо, що точка $P_{kl} \in \mathfrak{D}_f$ лежить на L нижче точки $\tilde{B}_{kl}$. Тоді

$$\kappa_{kl} = -\ln |a_{kl}| < \tilde{\kappa}_n = -\ln t_n \leq -\ln b_n, \quad n = k + l.$$

Звідси $|a_{kl}| > b_n$, що неможливе. Отже, $\kappa_{kl} \geq \tilde{\kappa}_n$, тобто $T_{kl} \leq t_n$ для довільної точки $P_{kl} \in \mathfrak{D}_f$, а в силу опуклості фігур $\mathfrak{D}_f$ та $\mathfrak{D}_g$ ця нерівність справедлива й для довільної точки $P_{kl} \in \mathfrak{D}_f$. Із врахуванням (5) лема доведена.

3. Розглянемо випадок, коли степеневий ряд (1) абсолютно збігається в біциліндрі

$$\{|z| < 1, |w| < 1\}. \quad (12)$$

Оскільки

$$\overline{\lim}_{k+l \rightarrow \infty} \sqrt[k+l]{|a_{kl}|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} \leq 1, \quad (n = k + l), \quad (13)$$

то степеневий ряд допоміжної функції $g(z, w)$ також збігається в біциліндрі (12).

Функція $\varphi(z)$ (чи $\varphi(w)$) збігається в одиничному крузі, а за теоремою О. Островського [3] там же збігається її мажоранта Ньютона $\mathfrak{M}_\varphi(z)$, отже,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{t_n} \leq 1. \quad (14)$$

На підставі леми та (13), (14) одержимо

$$\overline{\lim}_{k+l \rightarrow \infty} \sqrt[k+l]{T_{kl}} \leq 1,$$

тобто мажоранта Ньютона $\mathfrak{M}_f(z, w)$ збігається в одиничному біциліндрі.

4. Нехай степеневий ряд (1) абсолютно збігається в біциліндрі

$$\{|z| < R_1, |w| < R_2\}. \quad (15)$$

За теоремою Айзенберга—Мітягіна [4] ряд

$$\tilde{f}(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} \tilde{a}_{kl} z^k w^l, \quad (16)$$

де

$$\tilde{a}_{kl} = a_{kl} R_1^k R_2^l$$

збігається в одиничному біциліндрі. За доведеним в п. 3, мажоранта Ньютона ряду (16)

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} \tilde{T}_{kl} z^k w^l \quad (17)$$

також збігається в біциліндрі (12).

На підставі (7) коефіцієнт $\tilde{T}_{kl}$ ряду (17) виражається через коефіцієнт T_{kl} мажоранти (3) так:

$$\tilde{T}_{kl} = T_{kl} R_1^k R_2^l.$$

Отже, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} T_{kl} R_1^k R_2^l z^k w^l$$

збігається в одиничному біциліндрі; тоді мажоранта Ньютона

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} T_{kl} z^k w^l$$

ряду (1) збігається [4] в біциліндрі (15).

Таким чином, доведена

Теорема 2. Якщо степеневий ряд

$$f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} a_{kl} z^k w^l$$

абсолютно збігається в біциліндрі

$$\{|z| < R_1, |w| < R_2\},$$

то і його мажоранта Ньютона

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+l} T_{kl} z^k w^l$$

збігається в цьому ж біциліндрі.

Неважко бачити, що доведена теорема 2 має місце й для довільної обмеженої повної бікругової області D .

Одержані результати справджуються й для функцій n комплексних змінних; випадок $n=2$ розглянуто нами для спрощення викладу.

На закінчення висловлюємо подяку О. М. Костовському за постановку задачі та керівництво.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. І. Кардаш, О. М. Костовський, І. І. Чулик. Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. вип. 3, 1967.
2. А. Костовский. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во Львов. ун-та, 1967.
3. A. Ostrowski. Recherches sur la Méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent. Acta Math., 72 (1940).
4. Л. А. Айзенберг и Б. С. Митягин. Пространства функций, аналитических в кратно-круговых областях. Сиб. мат. ж. 1 № 2 (1960).

УДК 513.872

А. І. ПИЛИПОВИЧ

ПЛОЩИНИ ТА СФЕРИ В КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧАХ ПРОСТОРУ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

Розглянемо дві групи задач, розв'язання яких вимагає проведення площин, сфер та орисфер, або площин, сфер та гіперсфер (еквідистантних поверхонь). Відповідно до цього виберемо такі інструменти побудови: площинограф, сферограф, орисферограф та гіперсферограф, які коротко позначатимемо P, C, O, G . Розглянемо такі комплекси інструментів: P, C, O ; P, C, G та P, C . Комплекс P, C, O використовується при знаходженні елементів перетину з заданою орисферою таких поверхонь та ліній: 1) площини, 2) сфери, 3) орисфери, 4) гіперсфери, 5) прямої, 6) кола, 7) орицикла, 8) гіперцикла. Комплексом P, C, G користуються при побудові перетину заданої гіперсфери з перерахованими вище вісьмома поверхнями та лініями. Однак виявляється, що вживання орисферографа та гіперсферографа для розв'язання цих задач не є необхідним і зводиться лише до побудови відповідної поверхні як неперервного геометричного місця точок, тобто має місце така

Теорема. Всяку конструктивну задачу, яку можна розв'язати комплексом інструментів P, C, O , або — P, C, G , можна розв'язати і комплексом P, C .

Для доведення теореми показано, що ці дві групи задач можна розв'язати за допомогою площинографа і сферографа. Причому орисферу задаємо направленою віссю і точкою орисфери на цій осі. Інші ж способи задання орисфери, а саме: направленою віссю і точкою орисфери, не інцидентною цій осі, чотирма точками орисфери, частиною орисферичної поверхні за допомогою комплексу P, C , можна звести до першого способу. Так само гіперсферу задаватимемо базовою площиною і дистанцією. Способи ж задання гіперсфери базовою площиною і точкою гіперсфери, чотирма точками однієї або різних віток гіперсфери, частиною гіперсферичної поверхні за допомогою комплексу P, C легко звести до задання гіперсфери базовою площиною і дистанцією.

Лінія перетину двох поверхонь вважається відомою, якщо знайдено елементи, які її визначають, і вказано спосіб побудови довільної її точки вибраним комплексом інструментів. Для побудови лінії перетину сфер, орисфер, гіперсфер або їх комбінацій використовується метод січних площин. Одною з таких площин є радикальна площина цих поверхонь. Тип лінії перетину розглянутих поверхонь встановлюється на основі інтерпретації гіперболічного простору гіперболічною сіткою.

сфер. Вважається також, що комплексом Π, C можна розв'язати всяку плоску конструктивну задачу, яка розв'язується за допомогою циркуля і лінійки.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. Ф. Каган. Основания геометрии, ч. 1. М.—Л., 1949.
 2. М. Н. Несторович. Геометрические построения в плоскости Лобачевского, М.—Л., 1951.
 3. А. И. Фетисов. Очерки по евклидовой и неевклидовой геометрии. М., 1965.
-

УДК 513.(07)

Г. Л. БУЙМОЛА, М. Й. ВЛАДИКА, А. О. КОПИСТЯНСЬКИЙ

ПРО ВИКОРИСТАННЯ ПЕРФОКАРТ ДЛЯ ПРИЙМАННЯ ЗАЛІКІВ (КОЛОКВІУМІВ)

На кафедрі геометрії та вищої математики Львівського державного університету нагромаджено значний досвід у галузі програмованого навчання. Підготовлено та надруковано задачі з аналітичної геометрії для програмованого прийому заліків, проведено експериментальний прийом заліків на машинах «Альфа-2» в ряді груп, введено практичні заняття із застосуванням екзаменуючих машин.

Ряд важливих змін зазнала методика викладання нарисної геометрії та креслення — курсу, який вважається одним із важких у вузах.

Домашні завдання з нарисної геометрії та креслення скасовано; всі роботи за програмою виконуються в кабінеті креслення в академічний час. Таким чином, студенти мусять готуватися до кожного заняття і їх знання зростають.

В ряді груп проведено експериментальний прийом проміжкових заліків (колоквіумів) з нарисної геометрії за принципом програмованих питань, але без екзаменуючих машин. Заздалегідь були приготовлені перфокарти та дешифратори. Перфокарта — це конверт, виготовлений з картону (або цупкого паперу), на якому пробито ряди дірок: по п'ять в ряді — відповідно до кількості відповідей. Рядів стільки, скільки питань. Кожний ряд пронумерований (наприклад, 1, 2, 3, ...), кожний отвір в ряді має позначення літерами *A, B, C, D, E*.

Дешифратор — такий самий конверт, але в ньому вибиті тільки ті отвори, які відповідають правильному розв'язку задачі. Для кожного варіанта є свій дешифратор. Всі дешифратори зібрані в одній книжці, що знаходиться тільки у викладача.

Перфокарта видається студентові разом з контрольним листком і комплектом задач-питань, в яких серед п'яти розв'язків один правильний. Студент обирає з запропонованих йому розв'язків задач тільки ті, які, на його думку, є правильними і через відповідні отвори перфокарти робить на контрольному листочку помітки (хрестик або закреслює отвір).

Карточку з відповіддю викладач вкладає в дешифратор, з якого довідується про правильність відповіді. В результаті значно скоротився час приймання колоквіуму: до 30 хвилин замість 2 годин, час перевірки зменшився до 10 хвилин на групу замість 3—4 годин. На такому колоквіумі не тільки виявляються знання студента, але й поглиблюються: вивчаючи різні розв'язки задач-питання, студент змушений аналізувати кожний елемент відповідей. Позитивне значення має також короткотривалість навантаження.

Було зроблено і такий експеримент: проведення такого самого колоквиуму з перфокартами і без них. Виявилось, що тільки 2% опитуваних одержали оцінки з різницею в один-два бали, причому кращі студенти здавали залік на 10—15 хвилин швидше порівняно з відведеним часом.

Отже, доцільно, на нашу думку, перейти від експерименту до постійної практики приймання таким способом колоквиумів та заліків. Там, де можливо, слід використовувати машини типу «Альфа-2» чи «Ластівка». Очевидно, перфокарти доцільні, якщо немає відповідного обладнання для машинного приймання заліків.

МЕХАНІКА

УДК 539.311

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, Р. М. ЛУЦИШИН

ПРУЖНА РІВНОВАГА АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ВПАЯНОЮ ІЗОТРОПНОЮ ШАЙБОЮ ПРИ НАЯВНОСТІ РОЗРІЗУ НА СПАЇ

В класі задач про пружну рівновагу кусочно-неоднорідних тіл значний технічний інтерес викликає задача про визначення напруженого стану анізотропної пластинки з пружним ядром. Задачі такого роду описані в працях С. Г. Лехніцького [1], Г. М. Савіна і Д. В. Гриліцького [2]. В даній роботі розглядається пружна рівновага безмежної анізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою під дією навантаження на безмежності, при умові, що лінія спаю ослаблена одним розрізом. Припускається, що краї розрізу не завантажені і в процесі деформації не контактують.

При розв'язуванні задачі початок координат помістимо в центрі шайби, радіус якої приймемо рівним одиниці. Лінію розрізу позначимо через $a_1 b_1$, тоді лінією спаю буде дуга $b_1 a_1$.

1. Відділивши умовно шайбу від пластинки, можемо розглянути її пружну рівновагу під дією невідомих контактних напружень $\sigma_r(t)$, $\tau_{r\varphi}(t)$ на $b_1 a_1$. На основі відомих формул М. І. Мусхелішвілі [3] легко отримати таку граничну умову для функції напруження в шайбі $\Phi_1(z)$:

$$it[\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)] = \begin{cases} 0 & \text{на } a_1 b_1, \\ f(t) & \text{на } b_1 a_1, \end{cases} \quad (1.1)$$

де
$$f(t) = it[\sigma_r(t) + i\tau_{r\varphi}(t)]. \quad (1.2)$$

Розв'язок задачі (1.1) має вигляд

$$iz\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_1}^{a_1} \frac{f(t) dt}{t-z} - iz\bar{A}_0, \quad (1.3)$$

де
$$A_0 = \Phi_1(0). \quad (1.4)$$

Аналогічно можна розглянути пружну рівновагу анізотропної пластинки, з якої виділена шайба. Граничні умови цього випадку, що даються в монографії Г. М. Савіна [4] для функцій напруження $\varphi(z_1)$ і $\psi(z_2)$, можна привести до такого вигляду:

$$\begin{aligned} & it[(1+is_1)\Phi_2'(t) + (1+is_2)\Psi_2'(t)] + \\ & + \frac{1}{it}[(1+i\bar{s}_1)\overline{\Phi_2'(t)} + (1+i\bar{s}_2)\overline{\Psi_2'(t)}] = \begin{cases} 0 & \text{на } a_1 b_1, \\ f(t) & \text{на } b_1 a_1, \end{cases} \\ & it[(1-is_1)\Phi_2'(t) + (1-is_2)\Psi_2'(t)] + \\ & + \frac{1}{it}[(1-i\bar{s}_1)\overline{\Phi_2'(t)} + (1-i\bar{s}_2)\overline{\Psi_2'(t)}] = \begin{cases} 0 & \text{на } a_1 b_1, \\ f(t) & \text{на } b_1 a_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

де

$$\Phi_2(\zeta) = \varphi[z_1(\zeta)]; \quad \Psi_2(\zeta) = \psi[z_2(\zeta)],$$

причому мають місце розклади

$$\Phi'_2(\zeta) = a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k}; \quad \Psi'_2(\zeta) = b_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{\zeta^k}; \quad (1.6)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}(1 - is_1)B^*; \quad b_0 = \frac{1}{2}(1 - is_2)(B' + iC'). \quad (1.7)$$

B^*, B', C' — постійні, що залежать від напруженого стану на безмежності; s_1, s_2 — параметри, що характеризують анізотропію матеріалу пластинки.

Розв'язок граничної задачі (1.5) визначається формулами

$$i\zeta \Phi'_2(\zeta) = \frac{1}{4\pi i} \int_{b_1}^{a_1} \frac{v_2(t) dt}{t - \zeta} + ia_0 \zeta - \frac{h_2}{\zeta}; \quad (1.8)$$

$$i\zeta \Psi'_2(\zeta) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{b_1}^{a_1} \frac{v_1(t) dt}{t - \zeta} + ib_0 \zeta + \frac{h_1}{\zeta}.$$

Тут позначено

$$v_1(t) = \frac{(s_1 + i)f(t) + (s_1 - i)\bar{f}(t)}{s_1 - s_2}; \quad v_2(t) = \frac{(s_2 + i)f(t) + (s_2 - i)\bar{f}(t)}{s_1 - s_2}; \quad (1.9)$$

$$h_1 = \frac{i[(s_1 - \bar{s}_1)\bar{a}_0 + (s_1 - \bar{s}_2)\bar{b}_0]}{s_1 - s_2}; \quad h_2 = \frac{i[(s_2 - \bar{s}_1)\bar{a}_0 + (s_2 - \bar{s}_2)\bar{b}_0]}{s_1 - s_2}.$$

2. Якщо за відомими формулами виразити похідні по полярній координаті φ від компонент зміщення для шайби $\left(\frac{du_1}{d\varphi}, \frac{dv_1}{d\varphi}\right)$ і пластинки $\left(\frac{du_2}{d\varphi}, \frac{dv_2}{d\varphi}\right)$ через знайдені в (1.3) і (1.8) функції напружень, то умови рівності їх на лінії спаю приводять до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно $f(t)$ і $\bar{f}(t)$:

$$\frac{b}{\pi i} \int_{b_1}^{a_1} \frac{f(t) dt}{t - \sigma} - \frac{\bar{b}}{\pi i} \int_{b_1}^{a_1} \frac{\bar{f}(t) dt}{t - \sigma} - af(\sigma) - \bar{a}\bar{f}(\sigma) + G_1(\sigma) = 0; \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{\pi i} \int_{b_1}^{a_1} \frac{f(t) dt}{t - \sigma} + \frac{\bar{d}}{\pi i} \int_{b_1}^{a_1} \frac{\bar{f}(t) dt}{t - \sigma} - cf(\sigma) + \bar{c}\bar{f}(\sigma) + G_2(\sigma) = 0. \quad \sigma \in b_1/a_1$$

Тут використані такі позначення:

$$a = \alpha_2 + \frac{\kappa - 1}{2\mu}; \quad b = \alpha_1 - \frac{\kappa + 1}{2\mu}; \quad c = \delta_2 + \frac{\kappa - 1}{2\mu}; \quad d = \delta_1 - \frac{\kappa + 1}{2\mu}; \quad (2.2)$$

$$\alpha_1 = k_1 - k_2; \quad \alpha_2 = k_1 + k_2; \quad \delta_1 = l_1 - l_2; \quad \delta_2 = l_1 + l_2.$$

$$k_1 = \frac{p_1(s_2 + i) - p_2(s_1 + i)}{s_1 - s_2}; \quad k_2 = \frac{\bar{p}_1(\bar{s}_2 + i) - \bar{p}_2(\bar{s}_1 + i)}{s_1 - s_2}; \quad (2.3)$$

$$l_1 = i \frac{q_1(s_2 + i) - q_2(s_1 + i)}{s_1 - s_2}; \quad l_2 = i \frac{\bar{q}_1(\bar{s}_2 + i) - \bar{q}_2(\bar{s}_1 + i)}{\bar{s}_1 - \bar{s}_2};$$

$$G_1(\sigma) = 4[M_1\sigma + \bar{M}_1\sigma^{-1} - \frac{i(\kappa+1)}{4\mu}(A_0\sigma^{-1} - \bar{A}_0\sigma)]; \quad (2.4)$$

$$G_2(\sigma) = 4[-M_2\sigma + \bar{M}_2\sigma^{-1} + \frac{i(\kappa+1)}{4\mu}(A_0\sigma^{-1} + \bar{A}_0\sigma)];$$

$$M_1 = i \left[p_1 a_0 + p_2 b_0 - \bar{p}_1 \frac{(s_1 - \bar{s}_2) a_0 + (s_2 - \bar{s}_1) b_0}{(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)} + \right. \\ \left. + \bar{p}_2 \frac{(s_1 - \bar{s}_1) a_0 + (s_2 - \bar{s}_1) b_0}{(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)} \right]; \quad (2.5)$$

$$M_2 = \left[q_1 a_0 + q_2 b_0 - \bar{q}_1 \frac{(s_1 - \bar{s}_2) a_0 + (s_2 - \bar{s}_2) b_0}{(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)} + \right. \\ \left. + \bar{q}_2 \frac{(s_1 - \bar{s}_1) a_0 + (s_2 - \bar{s}_1) b_0}{(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)} \right];$$

p_1, p_2, q_1, q_2 — постійні, що характеризують анізотропію матеріалу пластинки.

Наслідуючи Д. І. Шермана [5] і Л. А. Галіна [6], можемо замінити систему (2.1) такими двома рівняннями:

$$\frac{R_k}{\pi i} \int_{b_1}^{a_1} \frac{f(t) + \lambda_k \bar{f}(t)}{t - \sigma} dt - Q_k [f(\sigma) + \lambda_k \bar{f}(\sigma)] + G_1(\sigma) + \gamma_k G_2(\sigma) = 0, \quad (k=1,2) \quad (2.6)$$

де

$$R_k = b + \gamma_k d; \quad Q_k = a + \gamma_k c.$$

Постійні λ_k і γ_k зв'язані умовою

$$-\frac{b + \gamma_k d}{b - \gamma_k d} = \frac{a + \gamma_k c}{a - \gamma_k c} = \frac{1}{\lambda_k}, \quad (k=1,2) \quad (2.7)$$

Ввівши дві функції

$$W_k(z) = \frac{R_k}{2\pi i} \int_{b_1}^{a_1} \frac{f(t) + \lambda_k \bar{f}(t)}{t - z} dt + \frac{1}{2} [G_1(z) + \gamma_k G_2(z)], \quad (k=1,2) \quad (2.8)$$

можемо звести рішення рівнянь (2.6) до таких двох задач лінійного спряження:

$$W_k^+(\sigma) + g_k W_k^-(\sigma) = 0; \quad \sigma \in b_1 a_1, \quad (k=1,2) \quad (2.9)$$

де

$$g_k = \frac{R_k + Q_k}{R_k - Q_k}, \quad (k=1,2) \quad (2.10)$$

Розв'язок задачі (2.9) має вигляд

$$W_k(z) = X_0^{(k)}(z) [C_0^{(k)} z^2 + C_1^{(k)} z + C_2^{(k)} + D_k z^{-1}]. \quad (k=1,2) \quad (2.11)$$

Тут $C_0^{(k)}, C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, D_k$ — шукані коефіцієнти,

$$X_0^{(k)}(z) = (z - b_1)^{-\frac{1}{2} + i\beta_k} (z - a_1)^{-\frac{1}{2} - i\beta_k}; \quad (2.12)$$

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi} \ln |g_k|, \quad (k=1, 2)$$

причому мають місце зображення

$$\begin{aligned} X_0^{(k)}(z) &\xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z} + \frac{\alpha_{-2}^{(k)}}{z^2} + \dots; \\ X_0^{(k)}(z) &\xrightarrow{|z| \rightarrow 0} X_0^{(k)}(0) (1 + \alpha_1^{(k)} z + \dots). \end{aligned} \quad (k=1, 2) \quad (2.13)$$

Порівнюючи (2.8) і (2.11), знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b_1}^{a_1} \frac{f(t) + \lambda_k \overline{f(t)}}{t - z} dt = & \left\{ X_0^{(k)}(z) [C_0^{(k)} z^2 + C_1^{(k)} z + C_2^{(k)} + D_k z^{-1}] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} [G_1(z) + \gamma_k G_2(z)] \right\} R_k^{-1}, \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Із (2.14) випливає

$$f(\sigma) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{k=1}^2 \lambda_{k+1} \frac{g_k + 1}{R_k g_k} X_0^{(k)}(\sigma) [C_0^{(k)} \sigma^2 + C_1^{(k)} \sigma + C_2^{(k)} + D_k \sigma^{-1}], \quad \sigma \in b_1 a_1. \quad (2.15)$$

Тут і надалі

$$\lambda_3 = \lambda_1.$$

Формула (2.15) разом із (1.2) служить для визначення контактних напружень на лінії спаю.

3. На основі співвідношень (2.14) легко визначаються функції напружень у шайбі і в пластинці.

а) Шайба

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = & \frac{i}{(\lambda_1 - \lambda_2) z} \sum_{k=1}^2 \lambda_{k+1} R_k^{-1} \left[X_0^{(k)}(z) (C_0^{(k)} z^2 + C_1^{(k)} z + C_2^{(k)} + D_k z^{-1}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (G_1(z) + \gamma_k G_2(z)) \right] - \bar{A}_0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

б) Пластинка

$$\begin{aligned} \Phi'(z_1) = & \left\{ \sum_{k=1}^2 a_{k,2} R_{k+1}^{-1} \left[X_0^{(k+1)}(\zeta) (C_0^{(k)} \zeta^2 + C_1^{(k)} \zeta + C_2^{(k)} + D_k \zeta^{-1}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} (G_1(\zeta) + \gamma_{k+1} G_2(\zeta)) \right] + 2(i a_0 - h_2 \zeta^{-1}) \right\} \frac{1}{(s_1 + i) \zeta + (s_1 - i) \zeta^{-1}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тут

$$\zeta = (z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1 - s_1^2}) (1 - i s_1)^{-1}; \quad (3.3)$$

$$a_{k,l} = (-1)^{k-1} \frac{\lambda_k (s_l + i) - (s_l - i)}{(\lambda_1 - \lambda_2) (s_1 - s_2)}; \quad a_{3,1} = -a_{1,1}, \quad (k; l=1, 2) \quad (3.4)$$

$$X_0^{(3)}(\zeta) = X_0^{(1)}(\zeta); \quad \gamma_3 = \gamma_1. \quad (3.5)$$

$$\psi'(z_2) = \left\{ \sum_{k=1}^2 a_{(k+1),1} R_k^{-1} \left[X_0^{(k)}(\zeta) (C_0^{(k)} \zeta^2 + C_1^{(k)} \zeta + C_2^{(k)} + D_k \zeta^{-1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} (G_1(\zeta) + \gamma_k G_2(\zeta)) \right] + 2(ib_0 + h_1 \zeta^{-1}) \right\} \frac{1}{(s_2 + i)\zeta + (s_2 - i)\zeta^{-1}}. \quad (3.6)$$

Тут

$$\zeta = (z_2 + \sqrt{z_2^2 - 1 - s_2^2}) (1 - is_2)^{-1}. \quad (3.7)$$

4. Отриманий розв'язок містить дев'ять невідомих констант A_0 , $C_0^{(k)}$, $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$, D_k ($k=1,2$), для визначення яких маємо і дев'ять умов. На основі формул (1.3) і (1.4) отримуємо умову для знаходження

$$A_0 + \bar{A}_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{b_1}^{a_1} \frac{f(t) dt}{t^2}. \quad (4.1)$$

Прирівнюючи головні частини полюсів функцій (2.8) і (2.11), приходимо до співвідношень

$$C_0^{(k)} = 2 \left[M_1 - \gamma_k M_2 + (1 + \gamma_k) \frac{i(x+1)}{4\mu} \bar{A}_0 \right]; \\ C_0^{(k)} \alpha_{-2}^{(k)} + C_1^{(k)} = 0; \quad (4.2) \\ D_k = \frac{2}{X_0^{(k)}(0)} \left[\bar{M}_1 + \gamma_k \bar{M}_2 - (1 + \gamma_k) \frac{i(x+1)}{4\mu} A_0 \right]. \quad (k=1, 2)$$

Умова однозначності зміщень приводить до таких рівнянь:

$$\int_{a_1}^{b_1} X_0^{(k)}(t) [C_0^{(k)} t + C_1^{(k)} + C_2^{(k)} t^{-1} + D_k t^{-2}] dt = 0. \quad (k=1, 2) \quad (4.3)$$

5. Розглянемо розтяг на безмежності ортотропної пластинки, спай якої з ізотропною шайбою ослаблений одним розрізом, симетрично розміщеним відносно одного з головних напрямів пружності пластинки. Для цього випадку $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$, а система рівнянь (4.1) — (4.3) спрощується і набуває вигляду

$$C_0^{(1)} = 2[E_1 + I_1 A_0]; \quad C_0^{(2)} = 2[E_2 + I_2 A_0], \quad (5.1) \\ C_1^{(1)} = -\alpha_{-2}^{(1)} C_0^{(1)}; \quad C_1^{(2)} = -\alpha_{-2}^{(2)} C_0^{(2)}; \\ C_2^{(1)} = \frac{\alpha_1^{(1)}}{X_0^{(1)}(0)} C_0^{(2)}; \quad C_2^{(2)} = \frac{\alpha_1^{(2)}}{X_0^{(2)}(0)} C_0^{(1)}; \\ D_1 = -\frac{1}{X_0^{(1)}(0)} C_0^{(2)}; \quad D_2 = -\frac{1}{X_0^{(2)}(0)} C_0^{(1)},$$

де позначено

$$E_1 = M_1 + \gamma M_2; \quad E_2 = M_1 - \gamma M_2; \quad (5.2) \\ I_1 = \frac{i(x+1)}{4\mu} (1 + \gamma); \quad I_2 = \frac{i(x+1)}{4\mu} (1 - \gamma);$$

$$A_0 = \frac{\Omega_1}{1 - \Omega_2}; \quad (5.3)$$

де

$$E_3 = E_1, I_3 = I_1;$$

$$\Omega_1 = \frac{i}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{k=1}^2 \frac{\lambda_{k+1}}{R_k} \{E_k [1 + X_0^{(k)}(0) \alpha_{-2}^{(k)}] + E_{k+1} [\alpha_2^{(k)} - (\alpha_1^{(k)})^2]\}; \quad (5.4)$$

$$\Omega_2 = \frac{i}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{k=1}^2 \frac{\lambda_{k+1}}{R_k} \{I_k [1 + X_0^{(k)}(0) \alpha_{-2}^{(k)}] + I_{k+1} [\alpha_2^{(k)} - (\alpha_1^{(k)})^2]\}.$$

Постійні, що визначаються системою (5.1), набувають уявних значень, A_0 — дійсне число.

6. Компоненти контактного напруження визначаємо з умови (2.15)

$$\begin{aligned} \sigma_r(\varphi) &= \sum_{k=1}^2 (1 + g_{k+1}) L_k(\varphi); \\ \tau_{r\varphi}(\varphi) &= \sum_{k=1}^2 (1 + g_{k+1}) N_k(\varphi), \end{aligned} \quad g_3 = g_1 \quad (\Theta < \varphi < 2\pi - \Theta) \quad (6.1)$$

а 2Θ — центральний кут, що відповідає дузі розрізу. У формулах (6.1) введені позначення

$$\begin{aligned} L_k(\varphi) &= \frac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_1 - \lambda_2) R_k} \cdot \frac{e^{\beta_k(2\pi - \Theta)}}{2i \sqrt{\left| \sin \frac{\varphi - \Theta}{2} \right| \left| \sin \frac{\varphi + \Theta}{2} \right|}} \times \\ &\times \left\{ C_0^{(k)} \sin \left[\varepsilon_k(\varphi) + \frac{\varphi}{2} \right] + C_1^{(k)} \sin \left[\varepsilon_k(\varphi) - \frac{\varphi}{2} \right] + C_2^{(k)} \sin \left[\varepsilon_k(\varphi) - \frac{3\varphi}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + D_k \sin \left[\varepsilon_k(\varphi) - \frac{5\varphi}{2} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} N_k(\varphi) &= \frac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_2 - \lambda_1) R_k} \cdot \frac{e^{\beta_k(2\pi - \Theta)}}{2i \sqrt{\left| \sin \frac{\varphi - \Theta}{2} \right| \left| \sin \frac{\varphi + \Theta}{2} \right|}} \times \\ &\times \left\{ C_0^{(k)} \cos \left[\varepsilon_k(\varphi) + \frac{\varphi}{2} \right] + C_1^{(k)} \cos \left[\varepsilon_k(\varphi) - \frac{\varphi}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + C_2^{(k)} \cos \left[\varepsilon_k(\varphi) - \frac{3\varphi}{2} \right] + D_k \cos \left[\varepsilon_k(\varphi) - \frac{5\varphi}{2} \right] \right\}; \\ \varepsilon_k(\varphi) &= \beta_k \ln \frac{\left| \sin \frac{\varphi - \Theta}{2} \right|}{\left| \sin \frac{\varphi + \Theta}{2} \right|}. \end{aligned}$$

Використовуючи вирази для функцій напруження (3.1), (3.2) і (3.6), легко отримати формули для кільцевих напружень у шайбі та пластинці як на лінії спаю, так і на розрізі.

І. Для шайби:

а) на лінії спаю

$$\sigma_{\varphi}^{(1)} = \sum_{k=1}^2 \{(3 - g_{k+1}) L_k(\varphi) + 4\Delta_k(\varphi)\} - 4A_0; \quad (\Theta < \varphi < 2\pi - \Theta), \quad (6.3)$$

б) на розрізі

$$\sigma_{\varphi}^{(1)} = 4 \left\{ \sum_{k=1}^2 [e^{-\pi\beta_k} N_k(\varphi) + \Delta_k(\varphi)] - A_0 \right\}. \quad (-\Theta < \varphi < \Theta) \quad (6.4)$$

II. Для пластинки:

а) на лінії спаю

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^{(2)} = & \sum_{m=1}^2 \Gamma_m \left\{ (\sin^2 \varphi + \rho_m \cos^2 \varphi) \left[F_m(\varphi) + \right. \right. \\ & + \sum_{k=1}^2 T_{k+1,m} \left(\frac{L_k(\varphi)}{g_k} - \Delta_{k+1}(\varphi) \right) \left. \right] - \frac{1-\rho_m}{2} \sin 2\varphi \times \\ & \times \left[H_m(\varphi) + \sum_{k=1}^2 T_{k+1,m} \left(\frac{N_k(\varphi)}{g_k} - \omega_{k+1}(\varphi) \right) \right] \left. \right\} - \sigma_r(\varphi); \quad (6.5) \\ & (\Theta < \varphi < 2\pi - \Theta) \end{aligned}$$

б) на розрізі

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^{(2)} = & \sum_{m=1}^2 \Gamma_m \left\{ (\sin^2 \varphi + \rho_m \cos^2 \varphi) \left[F_m(\varphi) + \right. \right. \\ & + \sum_{k=1}^2 T_{k+1,m} (N_k(\varphi) e^{-\pi\beta_k} - \Delta_{k+1}(\varphi)) \left. \right] - \frac{1-\rho_m}{2} \sin 2\varphi \times \\ & \times \left[H_m(\varphi) - \sum_{k=1}^2 T_{k+1,m} (L_k(\varphi) e^{-\pi\beta_k} + \omega_{k+1}(\varphi)) \right] \left. \right\}. \quad (-\Theta < \varphi < \Theta). \quad (6.6) \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$\rho_m = -is_m; \quad (6.7)$$

$$\Gamma_m = \frac{1 - \rho_m^2}{(\rho_2 - \rho_1) [\sin^4 \varphi + \rho_m^2 \cos^4 \varphi + (1 + \rho_m^2) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi]}; \quad (m=1, 2) \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= 2 \{ a_0(\rho_2 - \rho_1) + [(\rho_1 + \rho_2) a_0 + 2\rho_2 b_0] \cos 2\varphi \}; \\ F_2(\varphi) &= 2 \{ b_0(\rho_1 - \rho_2) + [2\rho_1 a_0 + (\rho_1 + \rho_2) b_0] \cos 2\varphi \}; \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$H_1(\varphi) = 2 [(\rho_1 + \rho_2) a_0 + 2\rho_2 b_0] \sin 2\varphi;$$

$$H_2(\varphi) = 2 [2\rho_1 a_0 + (\rho_1 + \rho_2) b_0] \sin 2\varphi;$$

$$T_{k,m} = 1 + \rho_k + \frac{1 - \rho_k}{\lambda_m};$$

$$\Delta_k(\varphi) = \frac{\lambda_{k+1} R_k^{-1}}{i(\lambda_1 - \lambda_2)} [C_0^{(k)} - C_0^{(k+1)} \cos 2\varphi]; \quad (6.10)$$

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\lambda_{k+1} R_k^{-1}}{i(\lambda_2 - \lambda_1)} C_0^{(k+1)} \sin 2\varphi,$$

причому

$$T_3 = T_1; \quad \Delta_3(\varphi) = \Delta_1(\varphi); \quad C_0^{(3)} = C_0^{(1)}; \quad \omega_3(\varphi) = \omega_1(\varphi).$$

7. За отриманими формулами було проведено підрахунок контактних і кільцевих напружень для випадку одноосного та двоосного розтягу зусиллями інтенсивності p текстолітової пластинки [7] (текстоліт СВМ зі зв'язуючим БФ-4, $E_{11}=4,33 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$; $\nu_{11}=0,261$; $E_{22}=0,904 \times 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$; $\nu_{22}=0,051$; $G=0,344 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$; $\rho_1=3,4433$; $\rho_2=0,6356$) з абсолют-

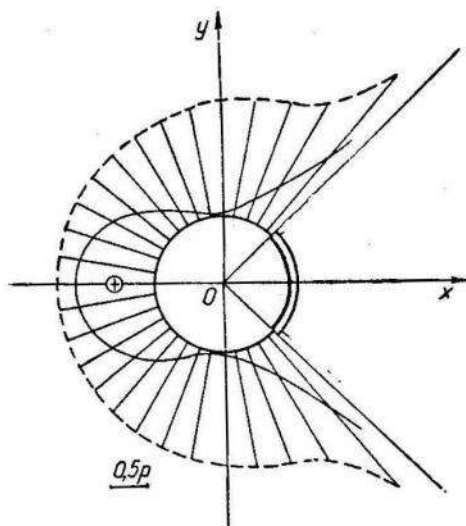


Рис. 1.

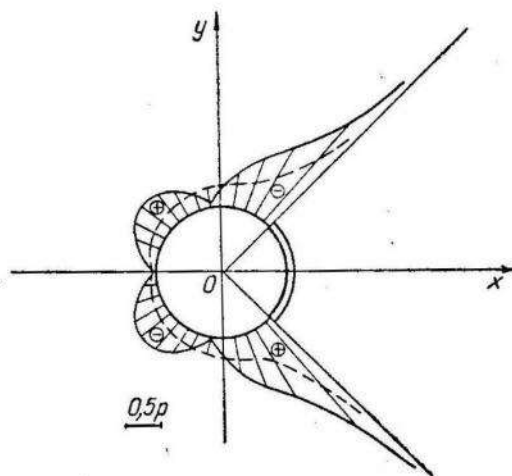


Рис. 2.

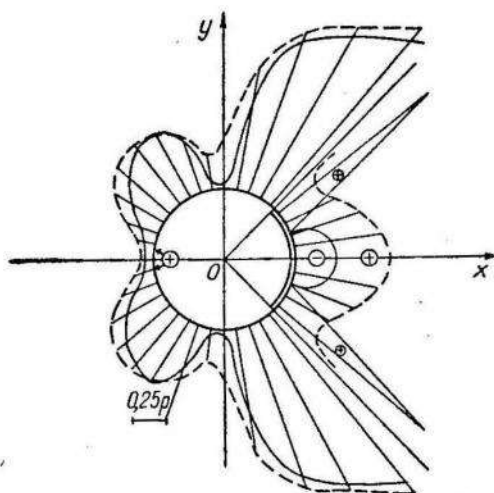


Рис. 3.

но жорсткою шайбою. Осі координат направлені по головних осях пружності матеріалу пластинки. Розріз розміром в чверть кола розміщений симетрично відносно осі OX ($\Theta=45^\circ$).

Одержані результати підрахунку приводяться на графіках. На рис. 1 зображено нормальні контактні напруження σ_r , на рис. 2 — дотичні контактні напруження $\tau_{r\theta}$, на рис. 3 — кільцеві напруження для пластинки $\sigma_\varphi^{(2)}$.

Суцільна лінія відповідає одноосному розтягу, штрихова — двоосному.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
 2. Г. Н. Савин, Д. В. Грилицкий. Об определении напряженного состояния в анизотропной пластинке с упругим ядром. Прикладная механика, т. 1, вып. 1, 1965.
 3. Н. И. Muskhelishvili. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
 4. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
 5. Д. И. Шерман. О приемах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений, ПММ, т. XII, вып. 4, 1948.
 6. Л. А. Галин. Контактные задачи теории упругости. Изд-во АН СССР, 1953.
 7. А. Л. Рабинович, И. А. Верховский. Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков. Инж. журн., т. IV, вып. 1, 1964.
-

УДК 539.311

Р. М. ЛУЦИШИН

ПРО ПРУЖНУ РІВНОВАГУ КУСОЧНО-НЕОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНКИ З АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОЮ ПРОКЛАДКОЮ

У статті [1] досліджено напружений стан анізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою. В даній роботі досліджується напружений стан ортотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою при наявності абсолютно жорсткої прокладки на деякій частині лінії спаю. Маємо безмежну ортотропну пластинку, в круговий отвір якої впаяна без попереднього натягу ізотропна шайба, причому вздовж деякої дуги lm між шайбою і пластинкою впаяна абсолютно жорстка «математична» прокладка. Тоді через ml позначимо дугу спаю, на якій відсутня прокладка. Вважаємо, що прокладка розміщена симетрично відносно одного з головних напрямів пружності пластинки.

Виберемо початок координат в центрі шайби, радіус якої приймемо рівним одиниці, а вісь ox спрямуємо по осі симетрії прокладки. Напружений стан на безмежності вважається заданим симетрично відносно осі ox .

Потрібно визначити напружений стан в пластинці і в шайбі.

1. Внаслідок прийнятих умов задачі на лінії розділу матеріалів мають місце такі умови:

$$\left[\frac{du}{d\varphi} + i \frac{dv}{d\varphi} \right]^+ = \left[\frac{du}{d\varphi} + i \frac{dv}{d\varphi} \right]^- = 0 \text{ на } lm, \quad (1.1)$$

$$\left[\frac{du}{d\varphi} + i \frac{dv}{d\varphi} \right]^+ = \left[\frac{du}{d\varphi} + i \frac{dv}{d\varphi} \right]^- = f(t) + ig(t) \text{ на } ml; \quad (1.2)$$

$$[\sigma_r(t) + i\tau_{r\varphi}(t)]^+ = [\sigma_r(t) + i\tau_{r\varphi}(t)]^- = \sigma_r(t) + i\tau_{r\varphi}(t) \text{ на } ml. \quad (1.3)$$

Тут значок «+» вказує, що дана величина стосується шайби, а значок «-» — пластинки. $f(t) + ig(t)$; $\sigma_r(t) + i\tau_{r\varphi}(t)$ — невідомі функції.

2. Умовно виділимо шайбу із пластинки і розглянемо пружну рівновагу кожної з частин. Використовуючи відомі формули [2], граничні умови другої основної задачі для шайби запишемо так:

$$it[\chi\Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t)] = \begin{cases} 0 & \text{на } lm; \\ f(t) + ig(t) & \text{на } ml. \end{cases} \quad (2.1)$$

Розв'язок цієї задачі дається формулою

$$iz\Phi_1(z) = \begin{cases} \frac{\mu}{\pi i\chi} \int_m^l \frac{f(t) + ig(t)}{t-z} dt + i\frac{\bar{A}_0}{\chi} z, & z \in S^+ \\ -\frac{\mu}{\pi i} \int_m^l \frac{f(t) + ig(t)}{t-z} dt - i\bar{A}_0. & z \in S^- \end{cases} \quad (2.2)$$

Тут $A_0 = \Phi_1(0)$, S^+ і S^- — внутрішність і зовнішність одиничного кола.

Далі розглянемо другу основну задачу для пластинки. Граничні умови цього випадку запишемо, виходячи з відомих формул [3, 4]

$$\begin{aligned} it[p_1\Phi'_2(t) + p_2\Psi'_2(t)] + \frac{1}{it}[\bar{p}_1\overline{\Phi'_2(t)} + \bar{p}_2\overline{\Psi'_2(t)}] &= \begin{cases} 0 & \text{на } lm, \\ f(t) & \text{на } ml; \end{cases} \\ it[q_1\Phi'_2(t) + q_2\Psi'_2(t)] + \frac{1}{it}[\bar{q}_1\overline{\Phi'_2(t)} + \bar{q}_2\overline{\Psi'_2(t)}] &= \begin{cases} 0 & \text{на } lm, \\ g(t) & \text{на } ml; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Phi'_2(\zeta) = a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k}; \quad \Psi'_2(\zeta) = b_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{\zeta^k}; \quad (2.4)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}(1 - is_1)B^*; \quad b_0 = \frac{1}{2}(1 - is_2)B'. \quad (2.5)$$

Розв'язок задачі (2.3) має вигляд

$$i\zeta\Phi'_2(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_m^l \frac{q_2 f(t) - p_2 g(t)}{t - \zeta} dt + ia_0\zeta + \frac{h_2}{\zeta}; \quad (2.6)$$

$$i\zeta\Psi'_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_m^l \frac{q_1 f(t) - p_1 g(t)}{t - \zeta} dt + ib_0\zeta - \frac{h_1}{\zeta};$$

$$h_1 = i \frac{(p_1 q_2 + p_2 q_1) a_0 + 2p_2 q_2 b_0}{p_1 q_2 - p_2 q_1}; \quad h_2 = i \frac{2p_1 q_1 a_0 + (p_2 q_1 + p_1 q_2) b_0}{p_1 q_2 - p_2 q_1}. \quad (2.7)$$

3. На основі формул (2.2) і (2.6) умова (1.1) приводить до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно функцій $f(t)$ і $g(t)$

$$\begin{aligned} \frac{b}{\pi i} \int_m^l \frac{g(t) dt}{t - \sigma} + af(\sigma) - G_1(\sigma) &= 0; \\ \frac{d}{\pi i} \int_m^l \frac{f(t) dt}{t - \sigma} + cg(\sigma) + G_2(\sigma) &= 0. \quad \sigma \in ml \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned} a &= \frac{q_1 - q_2}{p_1 q_2 - p_2 q_1} + \frac{\mu(1 - \kappa)}{\kappa}; \quad b = \frac{p_2 - p_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} + \frac{i\mu(\kappa + 1)}{\kappa}; \\ c &= \frac{s_2 p_1 - s_1 p_2}{p_1 q_2 - p_2 q_1} - \frac{\mu(1 - \kappa)}{\kappa}; \quad d = \frac{s_2 q_1 - s_1 q_2}{p_1 q_2 - p_2 q_1} + \frac{i\mu(\kappa + 1)}{\kappa}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$G_1(\sigma) = H_1\sigma + \bar{H}_1\sigma^{-1} - \frac{i(\kappa + 1)}{\kappa}(\bar{A}_0\sigma - A_0\sigma^{-1}); \quad (3.3)$$

$$G_2(\sigma) = H_2\sigma + \bar{H}_2\sigma^{-1} - \frac{\kappa + 1}{\kappa}(\bar{A}_0\sigma + A_0\sigma^{-1});$$

$$H_1 = \frac{2i(p_1 - p_2)}{p_1 q_2 - p_2 q_1}(a_0 q_1 + b_0 q_2); \quad H_2 = \frac{2i(s_1 q_2 - s_2 q_1)}{p_1 q_2 - p_2 q_1}(a_0 p_1 + b_0 p_2). \quad (3.4)$$

Неважко переконатись, що система (3.1) еквівалентна двом незалежним сингулярним інтегральним рівнянням

$$\frac{\lambda_k d}{\pi i} \int_m^l \frac{f(t) + \lambda_k g(t)}{t - \sigma} dt - a [f(\sigma) + \lambda_k g(\sigma)] + G_1(\sigma) + \lambda_k G_2(\sigma) = 0, \quad (3.5)$$

де $\sigma \in ml$, $k=1, 2$; $\lambda_1 = i \sqrt{\frac{b}{d}}$, $\lambda_2 = -i \sqrt{\frac{b}{d}}$.

Рівняння (3.5) можна вважати розв'язаним, коли визначити таку функцію:

$$L_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_m^l \frac{f(t) + \lambda_k g(t)}{t - z} dt. \quad (3.6)$$

Наслідуючи Д. В. Гриліцького [5], знаходимо

$$L_k(z) = X_k(z) [C_0^{(k)} z^2 + C_1^{(k)} z + C_2^{(k)} + C_3^{(k)} z^{-1}] - \frac{1}{2\lambda_k d} [G_1(z) + \lambda_k G_2(z)], \quad (k=1, 2) \quad (3.7)$$

Тут

$$X_k(z) = (z - m)^{-\frac{1}{2} + i\varepsilon_k} (z - l)^{-\frac{1}{2} - i\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_k = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\lambda_k d + a}{\lambda_k d - a} \right|, \quad (3.8)$$

причому

$$\begin{aligned} X_k(z) &\xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z} + \frac{\alpha_{-1}^{(k)}}{z^2} + \dots; \\ X_k(z) &\xrightarrow{|z| \rightarrow 0} X_k(0) (1 + \alpha_1^{(k)} z + \dots). \end{aligned} \quad (k=1, 2) \quad (3.9)$$

Постійні визначаються з умов

$$\begin{aligned} C_0^{(k)} &= \frac{1}{2} \left[H_1 + \lambda_k H_2 - \frac{x+1}{x} A_0 (i + \lambda_k) \right]; \quad C_1^{(k)} = -C_0^{(k)} \alpha_{-1}^{(k)}; \\ C_3^{(k)} &= \frac{1}{2X_k(0)} \left[H_1 - \lambda_k H_2 + \frac{x+1}{x} A_0 (i - \lambda_k) \right]; \quad C_2^{(k)} = -C_3^{(k)} \alpha_1^{(k)}; \end{aligned} \quad (k=1, 2) \quad (3.10)$$

$$A_0 = \frac{\Omega}{1 - \chi}, \quad (3.11)$$

де

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\mu i}{2bx} \left\{ (H_1 + \lambda_1 H_2) (\lambda_1 + i) [X_1(0) \alpha_{-1}^{(1)} + 1] + (H_1 - \lambda_1 H_2) (\lambda_1 - i) \times \right. \\ &\quad \left. \times [X_2(0) \alpha_{-1}^{(2)} + 1] - 2 [\alpha_2^{(1)} - (\alpha_1^{(1)})^2] \left(\frac{H_1}{i} + \lambda_1^2 H_2 \right) \right\}; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{x} - \frac{\mu(x+1)}{2bx^2 i} \left\{ 2 [\alpha_2^{(1)} - (\alpha_1^{(1)})^2] (\lambda_1^2 + 1) - [X_1(0) \alpha_{-1}^{(1)} + 1] (i + \lambda_1)^2 - \right. \\ &\quad \left. - [X_2(0) \alpha_{-1}^{(2)} + 1] (\lambda_1 - i)^2 \right\}. \end{aligned}$$

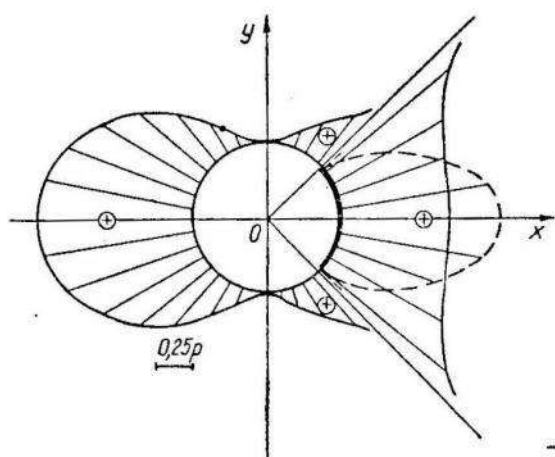


Рис. 1.

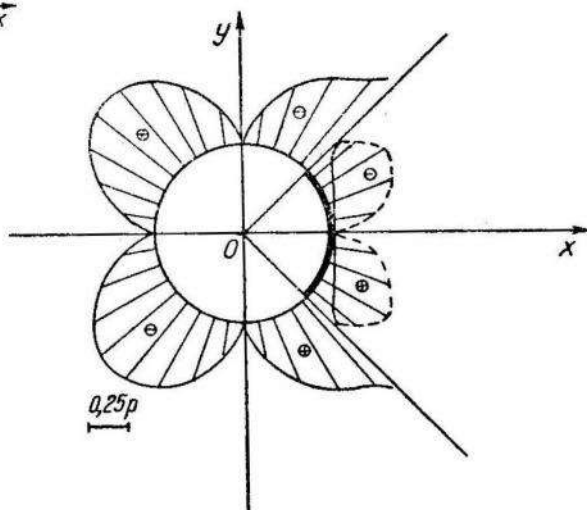
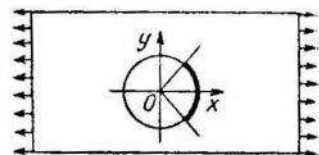


Рис. 2.

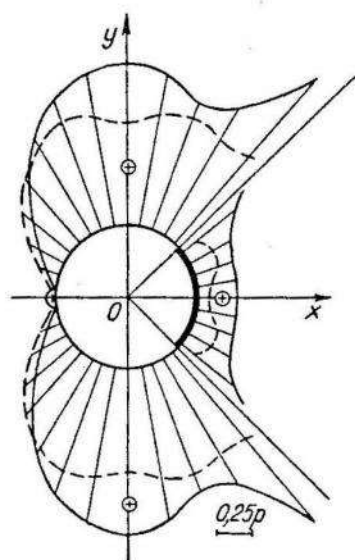


Рис. 3.

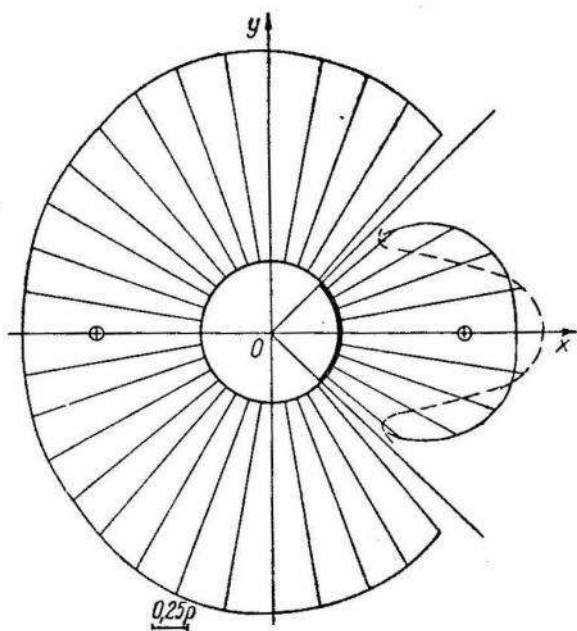


Рис. 4.

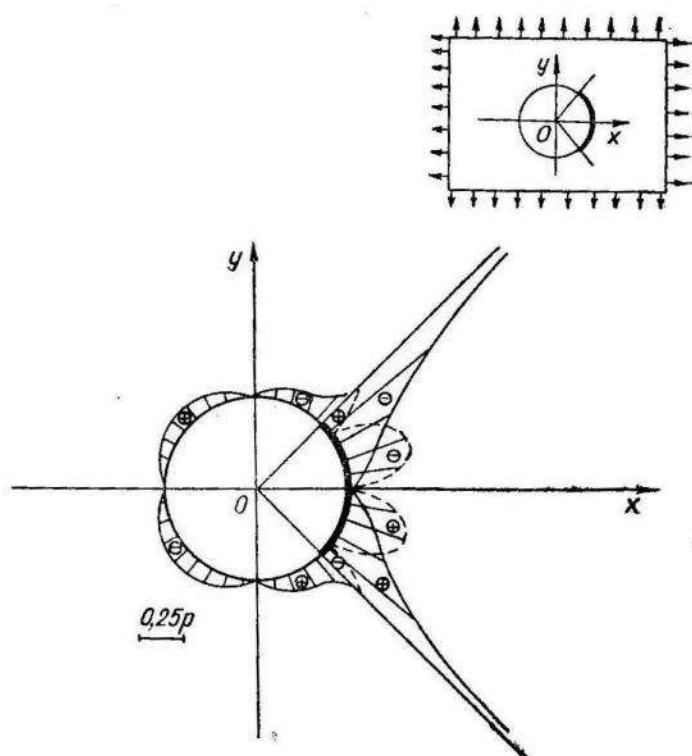


Рис. 5.

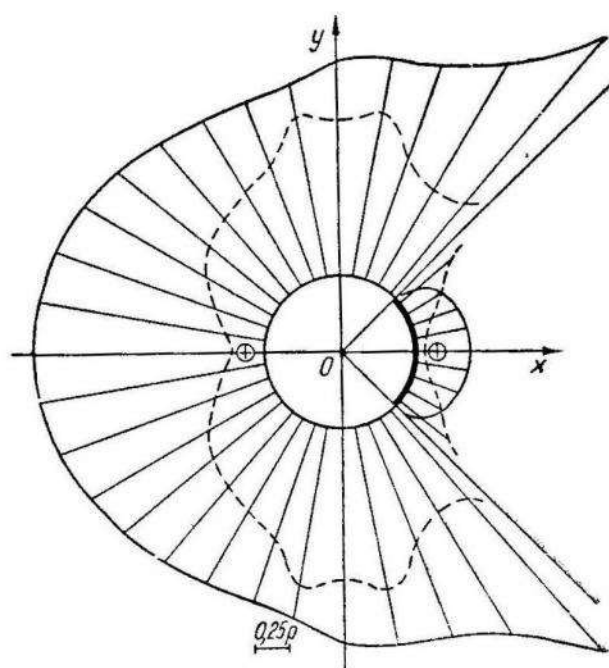


Рис. 6.

4. Маючи співвідношення (2.2), (2.6) і (3.7), легко визначити функції напруження в шайбі і в пластинці:

а) шайба

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \frac{\mu i}{2\lambda_1 z} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (\lambda_{k+1} - i) L_k(z) + \frac{\bar{A}_0}{z}, & z \in S^+ \\ -\frac{\mu i}{2\lambda_1 z} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (\lambda_{k+1} - i) L_k(z) - \bar{A}_0, & z \in S^- \end{cases} \quad (4.1)$$

б) пластинка $[\lambda_3 = \lambda_1]$

$$\Phi'(z_1) = \left\{ \sum_{k=1}^2 [a_{k+1,2} L_k(\zeta)] + i a_0 \zeta + \frac{h_2}{\zeta} \right\} \frac{1}{(s_1 + i)\zeta + (s_1 - i)\zeta^{-1}}, \quad (4.2)$$

де

$$\zeta = (z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1 - s_1^2}) (1 - i s_1)^{-1}; \quad \Phi(z_1) = \Phi_2[\zeta(z_1)].$$

$$a_{k,j} = (-1)^k \frac{\lambda_k q_j + p_j}{2(p_1 q_2 - p_2 q_1) \lambda_1}; \quad a_{3,l} = a_{1,l}.$$

$$\Psi'(z_2) = \left\{ \sum_{k=1}^2 [-a_{k+1,1} L_k(\zeta)] + i b_0 \zeta - \frac{h_1}{\zeta} \right\} \frac{1}{(s_2 + i)\zeta + (s_2 - i)\zeta^{-1}}. \quad (4.3)$$

Тут

$$\zeta = (z_2 + \sqrt{z_2^2 - 1 - s_2^2}) (1 - i s_2)^{-1}; \quad \Psi(z_2) = \Psi[\zeta(z_2)].$$

5. Виходячи з відомих формул плоскої задачі теорії пружності [2, 3, 4], на основі отриманих виразів для функцій напруження (4.1) — (4.2) — (4.3) легко визначити компоненти тензора напружень у довільній точці досліджуваної пластинки.

Для прикладу проведено підрахунок напружень вздовж лінії розділу матеріалів для текстолітової пластинки з впаяною алюмінієвою шайбою і прокладкою розміром в чверть кола для випадків одноосового і двоосового розтягу на безмежності зусиллями інтенсивності p (текстоліт СВАН із зв'язуючим БФ-4 [6]).

Результати підрахунку наведені на графіках. Для одноосового розтягу: нормальні напруження σ_r — рис. 1, дотичні напруження $\tau_{r\varphi}$ — рис. 2, кільцеві напруження σ_φ — рис. 3. Для двоосового розтягу: нормальні напруження σ_r — рис. 4, дотичні $\tau_{r\varphi}$ — рис. 5, σ_φ — рис. 6. Суцільна лінія відповідає напруженням у шайбі, а штрихова — напруженням у пластинці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Н. Савин, Д. В. Грилицкий. Об определении напряженного состояния в анизотропной пластинке с упругим ядром. «Прикладная механика», т. 1, вып. 1, 1965.
2. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
3. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
4. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
5. Д. В. Грилицкий. Основні граничні задачі теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою і з розрізами на лінії спаю. Питання механіки і математики, вип. 9. Вид-во ЛДУ, 1962.
6. А. Л. Рабинович, И. А. Верховский. Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков, Инж. журн., т. IV, вып. 1, 1964.

УДК 539.311

В. О. ЛІХАЧОВ

ЗГИН БАЛКИ, ПІДКРІПЛЕНОЇ КОЛОВИМ ЦИЛІНДРОМ

Розглянемо чистий згин ізотропної балки з круговим отвором, який підкріплено коловим циліндром. Припустимо, що балка прямокутного поперечного розрізу має товщину $2h$ і що центр отвору лежить на її осі. При рішенні задачі вважаємо, що діаметр отвору в балці достатньо малий щодо її поперечних розмірів, тобто в достатньо віддалених точках балки напружений стан майже не відрізняється від напруженого стану в балці без отвору.

Будемо надалі користуватися циліндричною системою координат з початком в центрі отвору балки. Вісь oz направимо по осі циліндра. Очевидно, що в даному випадку площина $z=0$ співпадає з серединною площиною балки.

В області контакту пластинки з циліндром приймаються умови рівності відповідних компонент напружень σ_r , $\tau_{r\theta}$ та компонент зміщення u_r , u_θ , а саме:

$$\sigma_r = \sigma_{r_0}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta_0} \quad \text{при} \quad -h \leq Z \leq h; \quad (1)$$

$$u_r = u_{r_0}, \quad u_\theta = u_{\theta_0} \quad \text{при} \quad Z = 0, \quad (2)$$

де за допомогою індекса 0 позначені компоненти зміщення і напруги, що стосуються пластинки.

Введемо позначення: R — радіус циліндра; $b = \frac{h}{R}$; μ_0 і μ — модулі зсуву для матеріалу пластинки і циліндра відповідно, $l = \frac{\mu_0}{\mu}$; $x = \frac{r}{R}$; $z = \frac{Z}{R}$; $\kappa = \frac{3m-1}{m+1}$; m — число Пуассона.

На підставі робіт [1, 2] функції напружень для балки при чистому згині мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= -i \frac{MR}{8I} \left[\zeta^2 + b_0 + b_2 \frac{1}{\zeta^2} + b_4 \frac{1}{\zeta^4} \right]; \\ \varphi(\zeta) &= i \frac{MR}{8I} \left[\zeta^2 + a_2 \frac{1}{\zeta^2} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

де $|\zeta| \geq 1$; M — момент згину; a_2 , b_2 , b_4 — дійсні постійні, які треба визначити.

Розв'язок системи рівнянь Ляме для визначення напруженого стану суцільного циліндра візьмемо у вигляді [3]

$$\begin{aligned}
 xu_{\theta} = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[I_1(\lambda x) a'_6 - \frac{m}{2(m-2)} \cdot \frac{x}{\lambda} I_2(\lambda x) a'_5 - \right. \\
 & \left. - \frac{x}{\lambda} I_2(\lambda x) a'_4 \right] \cos \lambda z d\lambda \cos \Theta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[I_3(\lambda x) a_6^3 - \frac{3m}{2(m-2)} \times \right. \\
 & \left. \times \frac{x}{\lambda} I_4(\lambda x) a_5^3 - \frac{x}{\lambda} I_4(\lambda x) a_4^3 \right] \cos \lambda z d\lambda \cos 3\Theta; \quad (4) \\
 u_r = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\lambda I_0(\lambda x) - \frac{1}{x} I_1(\lambda x) \right] a'_6 - \frac{m}{m-2} \left[\frac{2 + \lambda^2 x^2}{2\lambda^2 x} I_1(\lambda x) - \right. \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2\lambda} I_0(\lambda x) \right] a'_5 + \left[\frac{1}{\lambda} I_0(\lambda x) - \frac{2}{\lambda^2 x} I_1(\lambda x) \right] a'_4 \left\} \cos \lambda z d\lambda \sin \Theta + \right. \\
 & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\frac{\lambda}{3} I_2(\lambda x) - \frac{1}{x} I_3(\lambda x) \right] a_6^3 - \frac{m}{m-2} \left[\frac{18 + \lambda^2 x^2}{2\lambda^2 x} I_3(\lambda x) - \right. \right. \\
 & \left. - \frac{3}{2\lambda} I_2(\lambda x) \right] a_5^3 + \left[\frac{1}{\lambda} I_2(\lambda x) - \frac{6}{\lambda^2 x} I_3(\lambda x) \right] a_4^3 \left\} \cos \lambda z d\lambda \sin 3\Theta; \\
 u_z = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ -\lambda I_1(\lambda x) a'_6 + \left[\frac{2(m-1)}{m-2} \cdot \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda x) + \frac{m}{2(m-2)} I_2(\lambda x) \right] a'_5 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda x) a'_4 \right\} \sin \lambda z d\lambda \sin \Theta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{\lambda}{3} I_3(\lambda x) a_6^3 + \right. \\
 & + \left[\frac{2(m-1)}{m-2} \cdot \frac{1}{\lambda} I_3(\lambda x) + \frac{m}{2(m-2)} I_4(\lambda x) \right] a_5^3 - \\
 & \left. - \frac{1}{\lambda} I_3(\lambda x) a_4^3 \right\} \sin \lambda z d\lambda \sin 3\Theta.
 \end{aligned}$$

Тут $I_k(r)$ — функції Бесселя першого роду уявного аргументу; $a'_4, a'_5, a'_6, a_4^3, a_5^3, a_6^3$ — постійні інтегрування.

Виконання умов (1) в області контакту та умов відсутності зовнішніх напружень на поверхні циліндра

$$\begin{aligned}
 \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } x=1, |z| > b, \\
 \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } x=1, z > 0
 \end{aligned}$$

приводить до наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 E_{1,2k-1} a_4^{2k-1} - E_{2,2k-1} a_5^{2k-1} + E_{3,2k-1} a_6^{2k-1} &= f_{2k-1}; \\
 E'_{1,2k-1} a_4^{2k-1} - E'_{2,2k-1} a_5^{2k-1} + E'_{3,2k-1,2k-1} a_6^{2k-1} &= f'_{2k-1}, \\
 E''_{1,2k-1} a_4^{2k-1} - E''_{2,2k-1} a_5^{2k-1} + E''_{3,2k-1} a_6^{2k-1} &= 0, \quad (k=1, 2)
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
E_{1,2k-1} &= \frac{2k}{\lambda} I_{2k-1}(\lambda) - \frac{4k(k-1) + \lambda^2}{\lambda^2} I_{2k-1}(\lambda); \\
E_{2,2k-1} &= \frac{m}{m-2} \left[\frac{4k(2k-1)^2 m + 2(k-1)m\lambda^2 + 2\lambda^2}{2m\lambda^2} I_{2k-1}(\lambda) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2k(2k-1) + \lambda^2}{2\lambda} I_{2k-2}(\lambda) \right]; \\
E_{3,2k-1} &= \frac{\lambda}{2k-1} I_{2k-2}(\lambda) - \frac{2k(2k-1) + \lambda^2}{2k-1} I_{2k-1}(\lambda); \\
E'_{1,2k-1} &= \frac{4k}{\lambda} I_{2k-2}(\lambda) - \frac{8k(2k-1) + \lambda^2}{\lambda^2} I_{2k-1}(\lambda); \\
E'_{2,2k-1} &= \frac{(2k-1)m}{m-2} \left[\frac{4k(2k-1) + \lambda^2}{\lambda^2} I_{2k-1}(\lambda) - \frac{2k}{\lambda} I_{2k-2}(\lambda) \right]; \\
E'_{3,2k-1} &= 2\lambda \left[I_{2k-2}(\lambda) - \frac{2k}{\lambda} I_{2k-1}(\lambda) \right]; \\
E''_{1,2k-1} &= 2I_{2k-2}(\lambda) - \frac{3(2k-1)}{\lambda} I_{2k-1}(\lambda); \\
E''_{2,2k-1} &= \frac{m}{m-2} \left[\frac{2(2k-1)^2 m + m\lambda^2 - 2(m-1)(2k-1)}{m\lambda} I_{2k-1}(\lambda) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(m-1) - m(2k-1)}{m} I_{2k-2}(\lambda) \right]; \\
E''_{3,2k-1} &= \frac{2\lambda^2}{2k-1} I_{2k-2}(\lambda) - 2\lambda I_{2k-1}(\lambda); \\
f_1 &= -\frac{M}{8I_{\mu}} (1 + b_2) \frac{\sin \lambda b}{\lambda}, \quad f'_1 = \frac{M}{4I_{\mu}} (1 + b_2) \frac{\sin \lambda b}{\lambda}; \\
f_3 &= -\frac{M}{8I_{\mu}} (1 + 5a_2 + 2b_4) \frac{\sin \lambda b}{\lambda}; \\
f'_3 &= \frac{M}{4I_{\mu}} (-1 + 3a_2 + 2b_4) \frac{\sin \lambda b}{\lambda}.
\end{aligned}$$

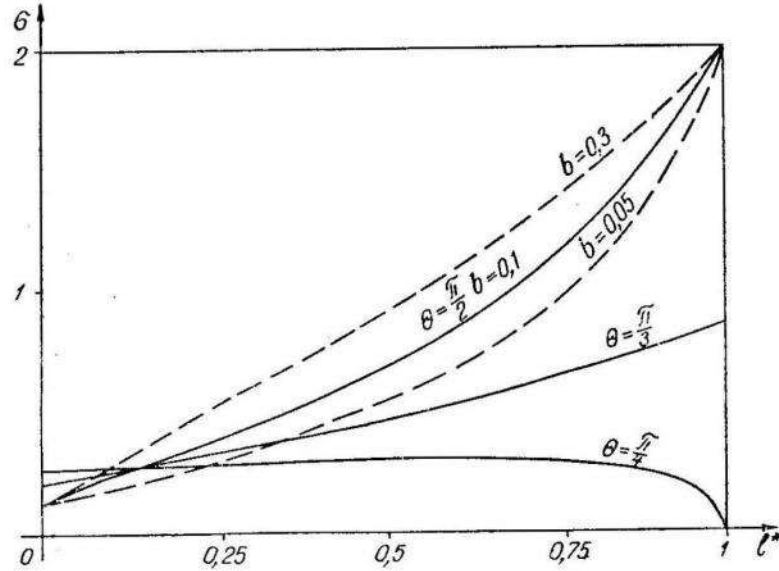
Розв'язавши системи (5), визначимо величини $a'_4, a'_5, a'_6, a_4^3, a_5^3, a_6^3$ через невідомі коефіцієнти a_2, b_2, b_4 функцій напружень. Після цього з умов (2) одержуємо рівняння для визначення згаданих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned}
a_2 [\pi(x+2) + 20lF_1 - 24lF_2] + b_4 [\pi + 8lF_1 - 16lF_2] &= \pi - 4lF_1 - 8lF_2; \\
a_2 [\pi(x-2) + 20lF_3 - 24lF_4] + b_4 [-\pi + 8lF_3 - 16lF_4] &= \\
&= \pi - 4lF_3 - 8lF_4; \\
b_2 [\pi - 4lF_5] &= \pi x + 4lF_5.
\end{aligned} \tag{7}$$

Тут позначено

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_0^{\infty} \left[\frac{6-9m}{\lambda} I_3^3(\lambda) + \frac{6m-24+4(m-1)\lambda^2}{\lambda^2} I_3^2(\lambda) I_2(\lambda) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{36-27m+2(1-m)\lambda^2}{3\lambda} I_3(\lambda) I_2^2(\lambda) + \frac{4(m-1)}{m} I_2^3(\lambda) \right] \frac{\sin \lambda b}{\lambda \Phi_3(\lambda)} d\lambda;
\end{aligned}$$

$$F_2 = \int_0^\infty \left[-\frac{3m+6+m\lambda^2}{2\lambda} I_3^3(\lambda) - \frac{36-9m+(4m-1)\lambda^2}{\lambda^2} I_3^2(\lambda) I_2(\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{36-27m+m\lambda^2}{2\lambda} I_3(\lambda) I_2^2(\lambda) + 2(m-1) I_2^3(\lambda) \right] \frac{\sin \lambda b}{\lambda \psi_3(\lambda)} d\lambda; \quad (8)$$



$$F_3 = \int_0^\infty \left[-\frac{3m+6+m\lambda^2}{\lambda} I_3^3(\lambda) + \frac{18m-72+(1-4m)2\lambda^2}{\lambda^2} I_3^2(\lambda) I_2(\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{36-27m+m\lambda^2}{\lambda} I_3(\lambda) I_2^2(\lambda) + 4(m-1) I_2^3(\lambda) \right] \frac{\sin \lambda b}{\lambda \psi_3(\lambda)} d\lambda;$$

$$F_4 = \int_0^\infty \left[\frac{2m\lambda^2+6-9m}{2\lambda} I_3^3(\lambda) + \frac{9m-36+(18-\lambda^2)m\lambda^2}{3\lambda^2} I_3^3(\lambda) I_2(\lambda) - \right. \\ \left. - \frac{9m-12+6m\lambda^2}{2\lambda} I_2^2(\lambda) I_3(\lambda) + \frac{m\lambda^3+2(m-1)}{3} I_2^3(\lambda) \right] \frac{\sin \lambda b}{\lambda \psi_3(\lambda)} d\lambda;$$

$$\Psi_3 = -\frac{m\lambda^6+24m\lambda^4+144\lambda^2-72m\lambda^2}{3\lambda^3} I_3^3(\lambda) + \\ + \frac{m\lambda^4+38m\lambda^2-2\lambda^2+288-216m}{3\lambda} I_3(\lambda) I_2^2(\lambda) - \\ - \frac{4m\lambda^4+192m\lambda^2-48\lambda^2+576-144m}{3\lambda^2} I_2^2(\lambda) I_2(\lambda) - \\ - \frac{2m\lambda^2-32(m-1)}{3} I_2^3(\lambda);$$

$$F_5 = \int_0^\infty \left[\frac{4(2m-2-m\lambda^2)}{\lambda} I_1^3(\lambda) + 2(5m-1) I_1(\lambda) I_0^2(\lambda) + \right. \\ \left. + 2(4-8m+m\lambda^2) I_1^2(\lambda) I_0(\lambda) - 2m\lambda^2 I_0^3(\lambda) \right] \frac{\sin \lambda b}{\lambda \psi_1(\lambda)} d\lambda;$$

Таблица значений $\sigma = -\frac{l}{MR} \sigma_{\theta_0}$

$l = 0$

$b \backslash m$		0,05						0,1						0,2						0,3					
		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
2	3	0,37	0,38	0,29	0,13	0,29	0,38	0,37	0,13	0,29	0,38	0,37	0,13	0,29	0,38	0,37	0,13	0,29	0,38	0,37	0,13	0,29	0,38	0,37	0,13
3	4	0,25	0,26	0,22	0,13	0,22	0,26	0,25	0,13	0,22	0,26	0,25	0,13	0,22	0,26	0,25	0,13	0,22	0,26	0,25	0,13	0,22	0,26	0,25	0,13
4	5	0,19	0,26	0,17	0,11	0,17	0,26	0,19	0,11	0,17	0,26	0,19	0,11	0,17	0,26	0,19	0,11	0,17	0,26	0,19	0,11	0,17	0,26	0,19	0,11
5		0,16	0,17	0,14	0,095	0,14	0,17	0,16	0,095	0,14	0,17	0,16	0,095	0,14	0,17	0,16	0,095	0,14	0,17	0,16	0,095	0,14	0,17	0,16	0,095

$l = \frac{1}{3}$

2	3	0,31	0,36	0,35	0,30	0,29	0,36	0,29	0,30	0,38	0,36	0,27	0,37	0,42	0,36	0,27	0,46	0,37	0,45	0,26	0,46	0,37	0,45	0,26	0,51
3	4	0,23	0,28	0,30	0,29	0,28	0,29	0,22	0,29	0,34	0,29	0,21	0,37	0,39	0,31	0,21	0,46	0,32	0,42	0,21	0,46	0,32	0,42	0,21	0,51
4	5	0,18	0,24	0,26	0,26	0,26	0,25	0,18	0,26	0,31	0,25	0,18	0,36	0,37	0,31	0,18	0,45	0,29	0,40	0,18	0,45	0,29	0,40	0,18	0,51
5		0,15	0,21	0,24	0,27	0,24	0,23	0,16	0,27	0,29	0,23	0,16	0,35	0,35	0,26	0,16	0,45	0,28	0,39	0,17	0,45	0,28	0,39	0,17	0,50

$l = 1$

2	3	0,23	0,34	0,44	0,54	0,54	0,33	0,18	0,54	0,50	0,33	0,13	0,69	0,56	0,32	0,13	0,85	0,32	0,59	0,10	0,85	0,32	0,59	0,10	0,92
3	4	0,18	0,29	0,41	0,53	0,53	0,30	0,15	0,53	0,48	0,30	0,12	0,68	0,54	0,31	0,12	0,84	0,31	0,59	0,10	0,84	0,31	0,59	0,10	0,91
4	5	0,15	0,27	0,39	0,52	0,52	0,29	0,14	0,52	0,47	0,29	0,11	0,68	0,54	0,30	0,11	0,83	0,31	0,58	0,10	0,83	0,31	0,58	0,10	0,91
5		0,14	0,25	0,38	0,51	0,51	0,28	0,13	0,51	0,46	0,28	0,11	0,67	0,54	0,30	0,11	0,83	0,31	0,58	0,10	0,83	0,31	0,58	0,10	0,91

$l = 3$

2	3	0,063	0,29	0,59	0,96	0,96	0,25	0,020	0,96	0,66	0,25	-0,096	1,16	0,71	0,22	-0,096	1,33	0,21	0,73	-0,129	1,33	0,21	0,73	-0,129	1,40
3	4	0,060	0,28	0,58	0,94	0,94	0,26	-0,0088	0,94	0,65	0,26	-0,073	1,14	0,71	0,24	-0,073	1,32	0,23	0,74	-0,102	1,32	0,23	0,74	-0,102	1,38
4	5	0,058	0,27	0,57	0,93	0,93	0,26	-0,0027	0,93	0,65	0,26	-0,062	1,13	0,71	0,25	-0,062	1,30	0,24	0,74	-0,089	1,30	0,24	0,74	-0,089	1,36
5		0,056	0,27	0,57	0,93	0,93	0,26	0,0006	0,93	0,65	0,26	-0,055	1,13	0,71	0,25	-0,055	1,29	0,24	0,74	-0,080	1,29	0,24	0,74	-0,080	1,36

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{16(m-1) - 2m\lambda^2(4+\lambda^2)}{\lambda} I_1^3(\lambda) + 16(1-2m) I_1^2(\lambda) I_0(\lambda) + \\ + [4(5m-1)\lambda + 2m\lambda^3] I_1(\lambda) I_0^2(\lambda) - 4m\lambda^3 I_0^3(\lambda).$$

Нами за допомогою чисельного інтегрування в формулах (8) одержані значення σ_{θ_0} на контурі спаю в залежності від значень m , b , l і кута Θ . Ці значення наведені в таблиці і проілюстровані на графіках у системі (σ, l^*) , де $\sigma = -\frac{I}{MR} \sigma_{\theta_0}$, $l^* = \frac{l}{1+l}$. При цьому суцільні криві проведені для значень $b=0.1$, $m=3$ при $\Theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, а пунктирні — для значень $m=3$, $\Theta = \frac{\pi}{2}$ при $b=0.05; 0.1; 0.3$, $\alpha=1, 0, 3$.

Примітка. Для значень $l=\infty$ ($\mu \gg \mu$) $\sigma=0.5, 0, 0.87, 2.0$ при Θ відповідно рівних $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М., Гостехиздат, 1951.
2. Г. М. Савін, Н. П. Флейшман. Вплив пружних кілець, впаяних у круговий отвір неоднорідно напруженого плоского поля. Доповіді АН УРСР, № 5, 1948.
3. В. О. Ліхачов. Деформація пружної безмежної пластинки з впаяним циліндром. Вид-во Львів. ун-ту, 1959.

УДК 539.385

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, В. Б. РУДНИЦЬКИЙ

ДО ЗАДАЧІ ПРО КРУЧЕННЯ ПІВПРОСТОРУ КІЛЬЦЕВИМ ШТАМПОМ

Задача про кручення ізотропного півпростору кільцевим штампом розглянута в двох варіантах в роботі М. М. Бородачова і Ф. М. Бородачової [1], при цьому істотно використані перший та другий методи J. C. Cooke [2]. У даній роботі, користуючись ідеєю Z. Olesiak [3], ми наводимо інший, надзвичайно простий розв'язок цієї задачі.

Отже, розглянемо осесиметричну задачу теорії пружності про визначення напружень і зміщень в ізотропному півпросторі, який скручується внаслідок повороту навколо осі симетрії кільцевого штампа з плоскою основою. Вважаємо, що жорсткий штамп своєю основою припаяний до пружного середовища, поверхня якого зовні і всередині штампа вільна від зовнішніх напружень.

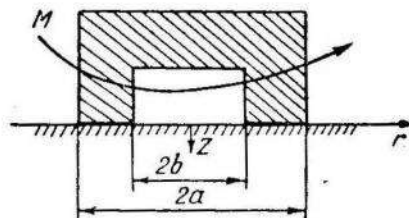


Рис. 1.

Через M позначимо величину крутного моменту, прикладеного до кільцевого штампа, зовнішній і внутрішній радіуси якого позначимо через a та b . При розв'язуванні поставленої задачі будемо користуватися циліндричною системою координат (r, θ, z) так, щоб площина $z=0$ співпала з поверхнею півпростору, початок системи координат — з центром штампа, а вісь z направимо всередину півпростору (рис. 1).

У даному випадку, внаслідок осової симетрії задачі, відмінною від нуля буде лише компонента вектора переміщення $U_\theta(r, z)$, яка в області пружного середовища задовольняє диференціальне рівняння [4]

$$\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r^2} = 0 \quad (1)$$

і такі граничні умови при $z=0$:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} &= 0; & (0 \leq r < b) \\ U_\theta &= \varepsilon r; & (b \leq r \leq a) \\ \tau_{\theta z} &= 0, & (r > a) \end{aligned} \quad (2)$$

де ε — кут повороту штампа.

Відмінні від нуля компоненти тензора напружень визначаються за формулами

$$\tau_{\theta z} = \mu \frac{\partial U_\theta}{\partial z}; \quad \tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right), \quad (3)$$

де μ — модуль зсуву.

Розв'язок рівняння (1) при умовах (2) повинен бути таким, щоб переміщення U_θ та напруження $\tau_{\theta z}$ і $\tau_{r\theta}$ прямували до нуля, коли $z \rightarrow \infty$.

Для визначення кута повороту штамп ε в залежності від величини прикладеного моменту M існує співвідношення

$$M = 2\pi \int_b^a r^2 \tau_{\theta z}(r) dr. \quad (4)$$

Наслідуючи Z. Olesiak [3], наближений розв'язок поставленої задачі одержимо шляхом накладання розв'язків двох задач:

1. Кручення півпростору внаслідок повороту суцільного штамп радіусом a . При цьому маємо такі граничні умови:

$$\begin{aligned} U_\theta &= \varepsilon r; & (r \leq a) \\ \tau_{\theta z} &= 0. & (r > a) \end{aligned} \quad (5)$$

Ця задача вперше розв'язана Е. Reissner і Н. Sagoci [5] в 1944 році. Формули для напруження під штампом і зміщень граничних точок півпростору зовні штамп мають вигляд [6]

$$\tau_{\theta z}(r, 0) = -\mu \frac{4\varepsilon}{\pi} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}; \quad (r \leq a) \quad (6)$$

$$U_\theta(r, 0) = \frac{2\varepsilon}{\pi} \left(r \cdot \arcsin \frac{a}{r} - \frac{a}{r} \sqrt{r^2 - a^2} \right). \quad (r > a) \quad (7)$$

2. Кручення півпростору тангенціальними зусиллями при таких граничних умовах:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} &= \mu \frac{4\varepsilon}{\pi} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}; & (0 \leq r < b) \\ U_\theta &= 0. & (r > b) \end{aligned} \quad (8)$$

Як бачимо, величина і характер розподілу дотичних напружень у цій задачі на ділянці $0 \leq r < b$ взяті з першої задачі, але з оберненим знаком. Частина границі півпростору при $r > b$ нерухомо закріплена.

Шляхом накладання розв'язків вказаних двох задач перші дві умови (2) будуть виконуватися точно, третя умова (2) наближено і, отже, буде вказувати на похибку, яку при цьому ми допускаємо. Слід зазначити, що перша і друга задачі допускають точні розв'язки, накладаючи які, дістанемо наближений розв'язок вихідної задачі.

Розв'язок другої задачі являє самостійний інтерес. Однак через брак місця ми не будемо зупинятися на ході рішення її, а лише вкажемо, що, як і в першій задачі [6], за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля вона зводиться до дуальних інтегральних рівнянь, з яких знаходимо, застосувавши формулу обернення, шукану функцію, яка і дає можливість визначити всі основні характеристики задачі.

Пропускаючи проміжні обчислення, запишемо остаточний результат для вихідної задачі:

$$\tau_{\theta z} = -\frac{4\varepsilon\mu}{\pi} \begin{cases} 0 & (0 \leq r < b), \\ \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{2r}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{r^2 - b^2}} \right) - \frac{ab}{\pi r \sqrt{r^2 - b^2}} + \\ \quad + \frac{a^2 - b^2 + 2r^2}{2\pi r \sqrt{r^2 - b^2}} \ln \frac{a+b}{a-b} & (b < r < a), \\ -\frac{2r}{\pi \sqrt{r^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \left(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{r^2 - a^2}{r^2 - b^2}} \right) - \frac{ab}{\pi r \sqrt{r^2 - b^2}} + \\ \quad + \frac{a^2 - b^2 + 2r^2}{2\pi r \sqrt{r^2 - b^2}} \ln \frac{a+b}{a-b} & (r > a). \end{cases} \quad (9)$$

$$U_{\theta} = \frac{4\epsilon}{\pi} \begin{cases} \frac{\pi r}{4} - \frac{a^2 \sqrt{b^2 - r^2}}{2\pi b r} \ln \frac{a+b}{a-b} + \frac{a \sqrt{a^2 - r^2}}{2\pi r} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 - r^2} + \sqrt{b^2 - r^2}}{\sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{b^2 - r^2}} \right| - \\ - \frac{r}{2\pi} \int_{r/b}^1 \left(\eta^2 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \ln \frac{a + \eta b}{a - \eta b} d\eta & (0 \leq r < b) \\ \frac{\pi r}{4} & (b < r < a) \\ \frac{r}{2} \arcsin \frac{a}{r} - \frac{1}{2} \frac{a \sqrt{r^2 - a^2}}{r} & (r > a) \end{cases} \quad (10)$$

Інтеграл, що входить у формулу (10), не вдається точно обчислити, а тому замінимо його наближеним виразом

$$\begin{aligned} \int_{r/b}^1 \left(\eta^2 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \ln \frac{a + \eta b}{a - \eta b} d\eta \approx & \frac{2}{a} \sqrt{b^2 - r^2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{3^2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{5^2} \frac{b^4}{a^4} + \dots \right) + \right. \\ & + \frac{2r^2}{a^2} \left(\frac{1}{1 \cdot 3^2} + \frac{2}{3 \cdot 5^2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{5 \cdot 7^2} \frac{b^4}{a^4} + \dots \right) + \\ & \left. + \frac{2^2 r^4}{a^4} \left(\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 5^2} + \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7^2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 9^2} \frac{b^4}{a^4} + \dots \right) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Наприклад, для випадку $a=2$, $b=1$ одержуємо

$$\begin{aligned} \int_{r/b}^1 \left(\eta^2 - r^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \ln \frac{2 + \eta}{2 - \eta} d\eta \approx & \sqrt{1 - r^2} (1,058 + 0,059 r^2 + \\ & + 0,007 r^4 + 0,001 r^6 + \dots). \end{aligned} \quad (12)$$

Напруження $\tau_{r\theta}(r, 0)$ обчислюються на основі формул (3) і (10):

$$\tau_{r\theta} = \frac{4\epsilon\mu}{\pi} \begin{cases} \frac{a^2 (2b^2 - r^2)}{\pi r^2 \sqrt{b^2 - r^2}} \ln \frac{a+b}{a-b} - \frac{a (2a^2 - r^2)}{2\pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 - r^2} + \sqrt{b^2 - r^2}}{\sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{b^2 - r^2}} \right| - \\ - \frac{a}{\pi \sqrt{b^2 - r^2}} - \frac{b r^2}{2\pi} \int_{r/b}^1 \left(\eta^2 b^2 - r^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \ln \frac{a + \eta b}{a - \eta b} d\eta, & (r < b) \\ 0, & (b < r < a) \\ - \frac{a^3}{r^2 \sqrt{r^2 - a^2}}, & (r > a). \end{cases} \quad (13)$$

Підставляючи значення напруження $\tau_{\theta z}$ із формули (9) в (4), одержимо

$$M = -\frac{16}{3} \mu \epsilon a^3 \cdot f, \quad (14)$$

де

$$f = \frac{2}{\pi} \arccos \delta - \frac{\delta}{2\pi} \sqrt{1 - \delta^2} + \frac{(5 + \delta^2) \sqrt{1 - \delta^2}}{4\pi} \ln \frac{1 + \delta}{1 - \delta}. \quad (15)$$

У співвідношенні (15) введено позначення $\frac{b}{a} = \delta$. Отже, формули (9), (10), (13), (14) і (15) повністю розв'язують поставлену задачу, послідовно визначаючи напруження під штампом, зміщення граничних точок півпростору і кут повороту штампа в залежності від величини прикладеного крутного моменту.

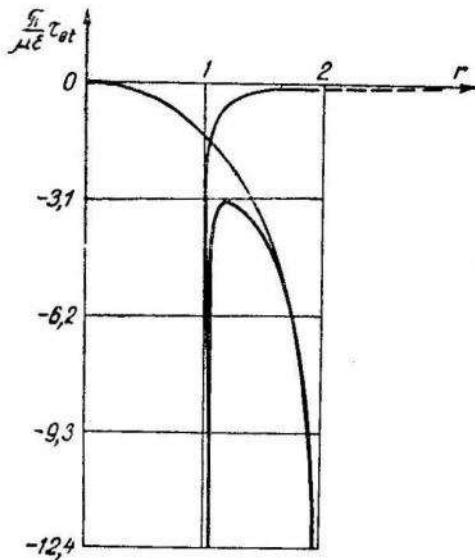


Рис. 2.

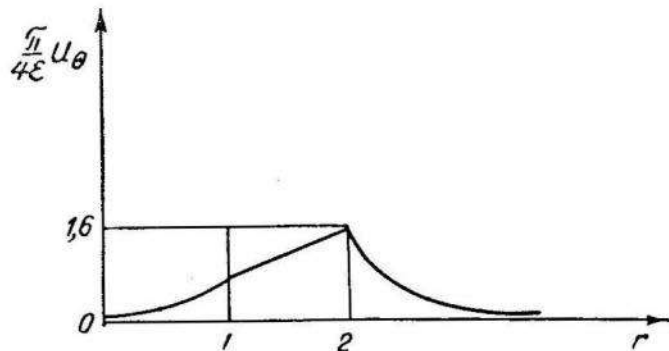


Рис. 3.

Слід зазначити, що наведені вище формули дають прекрасні результати для параметра $\delta \leq 0,7$. Покладаючи в попередніх формулах $b=0$, одержимо випадок суцільного штампа.

Числові розрахунки показали, що для значень параметра $\delta \div 0,5; 0,6; 0,7$ величина моменту M , обчисленого за формулами (14) і (15), з точністю до 0,1% збігається з результатами роботи [1].

Графіки розподілу напружень $\tau_{\theta z}$ і переміщень U_{θ} на границі півпростору для значень $a=2$ і $b=1$ показані на рис. 2 і 3. Жирна лінія на рис. 2 характеризує величину і характер розподілу напруження під кільцевим штампом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. М. Бородачев, Ф. Н. Бородачева. Кручение упругого полупространства, вызванное поворотом кольцевого штампа. Инж. журн., Механика твердого тела, № 1, 1966.
2. J. C. Cooke. Some further triple integral equation solution. Proc. of the Edinburgh. Math. Soc., vol. 13, № 4, 1963.
3. Z. Olesiak. Annular punch on elastic semi-space. Archiwum Mechaniki Stosowanej, t. 17, № 4, 1965.
4. Н. Х. Арутюнян, Б. А. Абрамян. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
5. E. Reissner, H. Sagoci. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. Journal of Applied Physics, vol. 15, № 9, 1944.
6. И. Снеддон. Преобразования Фурье. Изд-во иностр. л-ры, 1955.

УДК 539.311

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ НЕСИМЕТРИЧНОЇ ПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

Рівняння рівноваги при несиметричному тензорі напружень $(\tau_{xy} \neq \tau_{yx})$ в комплексних змінних $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$ мають вигляд [1, 3]

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial T}{\partial z} + (X + iY) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \mathfrak{M} + \operatorname{Re} \frac{\partial M}{\partial z} + \tau_{\omega} = 0. \quad (2)$$

Рівновага елементарної трикутної призми з врахуванням моментних напружень зводиться до справдження таких співвідношень:

$$Sdz - Td\bar{z} = 2i(X_n + iY_n)ds; \quad (3)$$

$$\bar{M}dz - Md\bar{z} = 2i\mu_n ds. \quad (4)$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned} S &= \sigma_x + \sigma_y + 2i\tau_{\omega}; \quad T = \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{\gamma}; \\ \tau_{\gamma} &= \frac{1}{2}(\tau_{xy} + \tau_{yx}); \quad \tau_{\omega} = \frac{1}{2}(\tau_{xy} - \tau_{yx}); \\ M &= \mu_x + i\mu_y; \end{aligned} \quad (5)$$

X, Y — компоненти об'ємних сил; $\mathfrak{M}$ — об'ємний момент; X_n, Y_n — компоненти вектора зовнішніх зусиль; μ_n — моментне напруження на похилій грані призми з нормаллю n . При малій деформації пружного середовища кінематичні співвідношення Коші в комплексній формі набувають вигляду

$$\begin{aligned} U &= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + 2i\omega_z; \\ V &= 2 \frac{\partial}{\partial z}(u + iv) = \varepsilon_x - \varepsilon_y + 2i\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (6)$$

В позначеннях (6) рівняння сумісності деформації теорії несиметричної пружності в комплексній формі зводиться до співвідношення

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (7)$$

З рівностей (6) одержимо

$$Udz + Vd\bar{z} = 2d(u + iv). \quad (8)$$

Залежність між статичними і кінематичними характеристиками деформованого середовища прийемо лінійною, поклавши

$$\begin{aligned} S &= a_1 U + a_2 \bar{U} + a_3 V + a_4 \bar{V}; \\ T &= b_1 U + b_2 \bar{U} + b_3 V + b_4 \bar{V}. \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, фізичні співвідношення (9) повинні бути розв'язні відносно функцій U і V

$$\begin{aligned} U &= A_1 S + A_2 \bar{S} + A_3 T + A_4 \bar{T}; \\ V &= B_1 S + B_2 \bar{S} + B_3 T + B_4 \bar{T}. \end{aligned} \quad (10)$$

Причому, згідно з першим законом термодинаміки,

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{a}_1, \quad a_3 = \bar{b}_1, \quad a_4 = b_2, \quad b_3 = \bar{b}_3; \\ A_1 &= \bar{A}_1, \quad A_3 = \bar{B}_1, \quad A_4 = B_2, \quad B_3 = \bar{B}_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Величини a_j, b_j , або A_j, B_j (взагалі комплексні) характеризують пружні властивості середовища. Для ортотропного тіла, якщо напрями осей x і y збігаються з головними напрямками пружності, всі сталі a_j, b_j, A_j і B_j — величини дійсні.

Зокрема, для ізотропного середовища

$$\begin{aligned} a_3 &= 0, \quad a_4 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_4 = 0; \\ A_3 &= 0, \quad A_4 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_4 = 0. \end{aligned}$$

Далі переходимо до побудови загального розв'язку задачі при відсутності масових сил ($X=0, Y=0$).

Скористувавшись законом Гука (10), умову сумісності деформації (7) запишемо в функціях напружень S і T

$$\begin{aligned} (A_1 + B_3) \frac{\partial S}{\partial z} - (A_4 + B_2) \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} + A_3 \frac{\partial T}{\partial z} - B_1 \frac{\partial S}{\partial z} - B_4 \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + A_2 \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Система (12) в нових незалежних змінних

$$z_1 = z + \lambda_1 \bar{z}, \quad z_2 = z + \lambda_2 \bar{z}, \quad (13)$$

де λ_1, λ_2 — сталі, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$, набуде вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \left\{ [(A_1 + B_3) \lambda_j - B_1] \frac{\partial S}{\partial z_j} - [(A_4 + B_2) - A_2 \lambda_j] \frac{\partial \bar{S}}{\partial z_j} + \right. \\ \left. + A_3 \lambda_j \frac{\partial T}{\partial z_j} - B_4 \frac{\partial \bar{T}}{\partial z_j} + [(A_1 + B_3) - B_1 \bar{\lambda}_j] \frac{\partial S}{\partial \bar{z}_j} - \right. \\ \left. - [(A_4 + B_2) \bar{\lambda}_j - A_2] \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{z}_j} + A_3 \frac{\partial T}{\partial \bar{z}_j} - B_4 \bar{\lambda}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}_j} \right\} = 0; \\ \sum_{j=1}^2 \left\{ \lambda_j \frac{\partial S}{\partial z_j} + \frac{\partial S}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial T}{\partial z_j} + \bar{\lambda}_j \frac{\partial T}{\partial \bar{z}_j} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Загальний розв'язок диференціальних рівнянь (14) має вигляд

$$S = \sum_{j=1}^2 [\Phi_j(z_j) + \bar{\lambda}_j \overline{f(\lambda_j)} \overline{\Phi_j(z_j)}]; \quad (15)$$

$$T = - \sum_{j=1}^2 [\lambda_j \Phi_j(z_j) + \overline{f(\lambda_j)} \overline{\Phi_j(z_j)}],$$

де $\Phi_j(z_j)$ ($j=1, 2$) — довільні аналітичні функції своїх аргументів. Тут

$$f(\lambda_j) = \frac{A_3 \lambda_j^2 - (A_1 + B_3) \lambda_j + B_1}{A_2 \lambda_j^2 - (A_4 + B_2) \lambda_j + B_4};$$

λ_1, λ_2 — корні характеристичного рівняння

$$[A_3 \lambda^2 - (A_1 + B_3) \lambda + B_1][\bar{B}_1 \lambda^2 - (\bar{A}_1 + \bar{B}_3) \lambda + \bar{A}_3] - \\ - [A_2 \lambda^2 - (A_4 + B_2) \lambda + B_4][\bar{B}_4 \lambda^2 - (\bar{A}_4 + \bar{B}_2) \lambda + \bar{A}_2] = 0. \quad (16)$$

У випадку ортотропного тіла, якщо головні напрями пружності прийняті за напрями осей x і y , величини A_j і B_j дійсні і рівняння (16) шляхом заміни [2]

$$\lambda = \frac{1 + i\mu}{1 - i\mu}, \quad \mu = i \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \quad (17)$$

зведеться до вигляду

$$(2a - 2b + c)\mu^4 + 2(c - 6a)\mu^2 + (2a + 2b + c) = 0, \quad (18)$$

де

$$a = A_3 B_1 - A_2 B_4;$$

$$b = (A_2 + B_4)(A_4 + B_2) - (A_3 + B_1)(A_1 + B_3);$$

$$c = A_3^2 + (A_1 + B_3)^2 + B_1^2 - A_2^2 - (A_4 + B_2)^2 - B_4^2.$$

Крайова умова (3) з врахуванням (15) набуде такого вигляду:

$$\sum_{j=1}^2 [\Phi_j(z_j) + \overline{f(\lambda_j)} \overline{\Phi_j(z_j)}] = 2i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \text{const}, \quad (19)$$

причому

$$\Phi_j'(z_j) = \Phi_j(z_j).$$

Для визначення функцій U і V скористаємося законом Гука (10) з врахуванням формул (15). Будемо мати

$$U = \sum_{j=1}^2 [F(\lambda_j) \Phi_j(z_j) + \bar{\lambda}_j \overline{H(\lambda_j)} \overline{\Phi_j(z_j)}]; \quad (20)$$

$$V = \sum_{j=1}^2 [\lambda_j F(\lambda_j) \Phi_j(z_j) + \overline{H(\lambda_j)} \overline{\Phi_j(z_j)}],$$

де

$$F(\lambda) = A_1 + \lambda f(\lambda) A_2 - \lambda A_3 - f(\lambda) A_4;$$

$$H(\lambda) = \bar{B}_2 + \lambda f(\lambda) \bar{B}_1 - \lambda \bar{B}_4 - f(\lambda) \bar{B}_3.$$

Підставимо вирази (20) у формулу (8) і проведемо інтегрування, дістанемо

$$2(u+iv) = \sum_{j=1}^2 [F(\lambda_j) \Phi_j(z_j) + \overline{H(\lambda_j)} \overline{\Phi_j(z_j)}] + \text{const.} \quad (21)$$

Неважко переконатися в тому, що вирази (20) задовольняють рівняння рівноваги (1) ($X=0$, $Y=0$), записане у функціях U і V , при умові

$$[a_3 \lambda^2 + (a_1 + b_3) \lambda + b_1] [\bar{b}_1 \lambda^2 + (\bar{a}_1 + \bar{b}_3) \lambda + \bar{a}_3] - \\ - [a_2 \lambda^2 + (a_4 + b_2) \lambda + b_4] [\bar{b}_4 \lambda^2 + (\bar{a}_4 + \bar{b}_2) \lambda + \bar{a}_2] = 0. \quad (22)$$

Рівність (22) являє другий вигляд характеристичного рівняння (16), записаного через коефіцієнти a_j , b_j формули (9). Для дійсних a_j і b_j рівняння (22) шляхом заміни (17) зводиться до вигляду (18), причому в даному випадку коефіцієнти a , b і c дорівнюють

$$a = a_3 b_1 - a_2 b_4; \\ b = (a_3 + b_1)(a_1 + b_3) - (a_2 + b_4)(a_4 + b_2); \\ c = a_3^2 + (a_1 + b_3)^2 + b_1^2 - a_2^2 - (a_4 + b_2)^2 - b_4^2.$$

Моментні напруження $M = \mu_x + i\mu_y$ визначаються після того, коли розв'язана основна крайова задача (19) або (21) і знайдена величина τ_ω .

Загальний розв'язок рівняння (2) можна, очевидно, подати у вигляді

$$M = \overline{\Omega(z)} + \chi(z) - z\overline{\chi'(z)} + M_0, \quad (23)$$

де $\Omega(z)$, $\chi(z)$ — довільні аналітичні функції в області D ; M_0 — частковий розв'язок рівняння (2). Функції $\Omega(z)$ і $\chi(z)$ задовольняють крайову умову (4), яка з врахуванням (23) набуде вигляду

$$\Omega(t) + \overline{\chi(t)} - t\overline{\chi'(t)} + [\overline{\Omega(t)} + \chi(t) - t\overline{\chi'(t)}] e^{-2i\alpha} = \\ = 2\mu_n e^{-i\alpha} - M_0 e^{-2i\alpha} - \overline{M_0}, \quad (24)$$

де α — кут, який утворює нормаль n з віссю x ; t — афікс точки границі L .

Якщо об'ємні сили і об'ємний момент відсутні, то частковий розв'язок M_0 можна, зокрема, взяти таким:

$$M_0 = \frac{i}{4} \sum_{j=1}^2 \left\{ [1 - \lambda_j f(\lambda_j)] \Phi_j(z_j) - \frac{1}{\lambda_j} [1 - \bar{\lambda}_j \bar{f}(\bar{\lambda}_j)] \overline{\Phi_j(z_j)} \right\}. \quad (25)$$

Для визначеності розв'язку рівняння (24) потрібна додаткова умова. В моментній теорії Коссера [3] такою умовою служить рівність

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial \overline{M}}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \mu_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu_y}{\partial x} \right),$$

яку вважатимемо справедливою і в нашому випадку.

Якщо вважати, що моментні напруження мають природу масових моментів $\mathfrak{M}$ (обертання), то для їх визначення достатньо одного рівняння статки (2) ($\mu_x \equiv 0$, $\mu_y \equiv 0$)

$$\mathfrak{M} = -2\tau_\omega.$$

З умови розв'язності задачі [1] випливає, що

$$a_2 = \bar{a}_2, a_3 = \bar{a}_4; A_2 = \bar{A}_2, A_3 = \bar{A}_4.$$

Випадок класичної теорії анізотропного середовища дістанемо шляхом граничного переходу, прямуючи жорсткості, що стосуються локального обертання елемента ω_z , до нуля. Тоді в границі дістанемо $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Якщо пластинка ортотропна і головні напрями пружності збігаються з напрямками осей x, y , то закон Гука у звичайній формі у технічних сталих набуде вигляду

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_x + \nu_2 \varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= 2G \gamma_{xy}; \quad \tau_{\omega} = 2g \omega_z,\end{aligned}\tag{26}$$

де g — додаткова стала матеріалу.

У цьому випадку коефіцієнти A_j, B_j, a_j й b_j , що входять у фізичні співвідношення (9) і (10), дорівнюють

$$\begin{aligned}A_1 &= k\beta + \frac{1}{4g}, \quad A_2 = k\beta - \frac{1}{4g}, \quad B_3 = k\alpha + \frac{1}{4G}; \\ B_4 &= k\alpha - \frac{1}{4G}, \quad A_3 = A_4 = B_1 = B_2 = -k\gamma; \\ a_1 &= \alpha + g, \quad a_2 = \alpha - g, \quad b_3 = \beta + G, \quad b_4 = \beta - G; \\ a_3 &= a_4 = b_1 = b_2 = \gamma,\end{aligned}\tag{27}$$

де

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{E_1 + 2\nu_1 E_2 + E_2}{4(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad \beta = \frac{E_1 - 2\nu_1 E_2 + E_2}{4(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad \gamma = \frac{E_1 - E_2}{4(1 - \nu_1 \nu_2)}; \\ k &= \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1 E_2}, \quad \nu_1 E_2 = \nu_2 E_1, \quad k(\alpha + \beta) = \frac{E_1 + E_2}{2E_1 E_2}.\end{aligned}$$

Характеристичне рівняння (18) з врахуванням (27) зведеться до такого:

$$\mu^4 + \frac{E_1}{g + G} \left[1 + \frac{2\nu_1}{E_1} (g - G) + \frac{4gG(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 E_2} \right] \mu^2 + \frac{E_1}{E_2} = 0.\tag{28}$$

При $g=0$ характеристичне рівняння (28) переходить в рівняння класичної теорії пружності [2].

На закінчення відзначимо, що методи, які застосовуються до розв'язування задач класичної теорії анізотропного середовища, переносяться на даний варіант теорії несиметричної пружності, оскільки ці задачі математично аналогічні.

Узагальнення теорії на випадок тривимірного пружного середовища буде викладено окремо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Т. Л. Мартинович. Основні рівняння плоскої задачі несиметричної пружності. Вісник Львів. ун-ту, сер. фіз., хім. і мех-матем., 1968.
2. С. Г. Лехницький. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
3. Р. Д. Миндлин. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений. Сб. переводов, Механика, № 4, 1964.
4. В. А. Пальмов. Плоская задача теории несимметричной упругости. ПММ, т. XXVIII, в. 6, 1964.
5. Г. Н. Савин. Основы плоской задачи моментной теории упругости (конспект лекций). Изд-во Киев. гос. ун-та, 1965.
6. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 539.311

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, І. О. НІЩЕНКО

ВПЛИВ НЕСИМЕТРИЧНОСТІ ТЕНЗОРА НАПРУЖЕНЬ НА КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ОТВОРІВ

1. Розв'язок плоскої задачі несиметричної теорії пружності $\left(\tau_{xy} \neq \tau_{yx}, \frac{\partial \mu_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu_y}{\partial x}\right)$ зводиться, згідно з роботою [1], до визначення аналітичних в області S , зайнятій пружним середовищем, функцій $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ і $\Omega_1(z)$, що задовольняють граничні умови

$$\alpha_g \varphi_1(t) + i \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = 2i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \text{const}; \quad (1.1)$$

$$\Omega_1(t) + \overline{\Omega_1(t)} e^{-2ia} = 2\mu_n e^{-ia} - M_0 e^{-2ia} - \overline{M_0}. \quad (1.2)$$

де

$$M_0 = \frac{i(\alpha_g - 1)}{4} [\varphi_1(z) - z \overline{\varphi_1'(z)}];$$

$$\alpha_g = \frac{g(2\lambda + 3\mu) + \mu(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + \mu - g)} = \frac{(3 - 2\nu)\eta + 1}{1 - \eta(1 - 2\nu)}; \quad (1.3)$$

λ, μ — пружні сталі Ламе; g — додаткова стала матеріалу; $\eta = \frac{g}{\mu}$;
 α — кут, що утворює нормаль n з віссю ox .

У випадку нескінченної області функції $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$ мають вигляд

$$\varphi_1(z) = -\frac{X + iY}{\pi(\alpha_g + \kappa_g)} \ln z + (B + iC)z + \varphi_0(z);$$

$$\psi_1(z) = \frac{\kappa_g(X - iY)}{\pi(\alpha_g + \kappa_g)} \ln z + (B' + iC')z + \psi_0(z),$$

де $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функції, голоморфні в області, зайнятій пружним середовищем, включаючи нескінченно далеку точку; $X = \sum_{k=1}^m X_k$; $Y =$

$= \sum_{k=1}^m Y_k$; X_k, Y_k — компоненти головного вектора зусиль, прикладених до контура L_k :

$$B = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{1 + \alpha_g}; \quad C = -\frac{2\tau_\infty^\infty}{1 - \alpha_g}; \quad B' = \sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty;$$

$$C' = 2\tau_\infty^\infty; \quad \alpha_g = \frac{\lambda + 3\mu + g}{\lambda + \mu - g} = \frac{3 - 4\nu + \eta(1 - 2\nu)}{1 - \eta(1 - 2\nu)}.$$

Якщо область S конформно відображається на область Σ за допомогою функції $z = \omega(\zeta)$, то граничні умови (1.1), (1.2) в перетвореній області матимуть вигляд

$$\alpha_g \Phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\Psi(\sigma)} = 2i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \text{const}; \quad (1.4)$$

$$\Omega(\sigma) + \overline{\Omega(\sigma)} \frac{\sigma^2 \overline{\omega'(\sigma)}}{\rho^2 \omega'(\sigma)} = 2\mu_n \frac{\overline{\sigma \omega'(\sigma)}}{\rho |\omega'(\sigma)|} - M_0 \frac{\overline{\sigma^2 \omega'(\sigma)}}{\rho^2 \omega'(\sigma)} - \overline{M_0}; \quad (1.5)$$

$$\Phi_1[\omega(\zeta)] = \Phi(\zeta); \quad \Psi_1[\omega(\zeta)] = \Psi(\zeta); \quad \Omega_1[\omega(\zeta)] = \Omega(\zeta).$$

Компоненти напружень у криволінійній системі координат виражаються через комплексні потенціали таким чином:

$$\sigma_r + \sigma_\theta + 2i\tau_\omega = \overline{\Phi(\zeta)} + \alpha_g \Phi(\zeta);$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_r = -[\omega(\zeta) \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)} \Psi(\zeta)] \frac{\overline{\zeta}^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)}; \quad (1.6)$$

$$\mu_r + i\mu_\theta = [M_0(\zeta) + \overline{\Omega(\zeta)}] \frac{\overline{\zeta \omega'(\zeta)}}{\rho |\omega'(\zeta)|};$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad \Psi(\zeta) = \frac{\Psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

Виходячи з даної постановки задачі несиметричної теорії пружності, розглянемо задачі про концентрацію напружень біля криволінійного отвору в пружній площині, що розтягується на нескінченності зусиллями p , які утворюють кут β з віссю ox . У цьому випадку напруження на нескінченності дорівнюють

$$\sigma_x^\infty = p \cos^2 \beta; \quad \sigma_y^\infty = p \sin^2 \beta; \quad \tau_{xy}^\infty = p \sin \beta \cos \beta;$$

$$\tau_\omega^\infty = 0; \quad \mu_x^\infty = \mu_y^\infty = 0. \quad (1.7)$$

Для спрощення викладок будемо вважати, що край отвору вільний від зовнішніх зусиль. Враховуючи (1.7), комплексні потенціали матимуть вигляд

$$\Phi_1(z) = \frac{p}{1 + \alpha_g} z + \Phi_0(z); \quad \Psi_1(z) = -p e^{-2i\beta} z + \Psi_0(z). \quad (1.8)$$

2. Еліптичний отвір. У цьому випадку скористуємось відображенням зовнішності одиничного кола на зовнішність еліптичного отвору за допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right); \quad R = \frac{a+b}{2}; \quad m = \frac{a-b}{a+b}. \quad (2.1)$$

Підставивши формули (1.8) і (2.1) в (1.4) і враховуючи, що функції $\varphi_0(\zeta)$ і $\psi_0(\zeta)$ голоморфні при $|\zeta| > 1$, за допомогою інтегралів типу Коші одержимо

$$\begin{aligned}\varphi_0(\zeta) &= -\frac{pR}{\alpha_g} (m - e^{2i\beta}) \frac{1}{\zeta}; \\ \psi_0(\zeta) &= \frac{pR(m - e^{2i\beta})}{\alpha_g} \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta(m - \zeta^2)} - pR(1 - me^{-2i\beta}) \frac{1}{\zeta}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Згідно з формулою (1.8), функції напружень дорівнюватимуть

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \frac{pR}{1 + \alpha_g} \left[\zeta + \frac{(1 + \alpha_g)e^{2i\beta} - m}{\alpha_g} \frac{1}{\zeta} \right]; \\ \psi(\zeta) &= \frac{pR(m - e^{2i\beta})}{\alpha_g} \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta(m - \zeta^2)} - pR \left(\frac{1}{\zeta} + e^{-2i\beta} \zeta \right).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Знаючи $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$, з граничної умови (1.5) за допомогою інтегралів типу Коші легко знайти

$$\Omega(\zeta) = \frac{pRm(\alpha_g - 1)}{2\alpha_g} \cdot \frac{\zeta \sin 2\beta}{m - \zeta^2}. \quad (2.4)$$

Компоненти напружень визначаються за формулами (1.6), і поблизу контурних точок отвору для них одержуються такі вирази:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= p \left[1 - \frac{1 + \alpha_g}{\alpha_g} \frac{m(\cos 2\beta - \cos 2\theta + m) + \cos 2(\theta - \beta)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \right]; \quad \sigma_r = 0 \\ \tau_{\theta r} &= \frac{p(\alpha_g - 1)}{\alpha_g} \frac{m(\sin 2\theta - \sin 2\beta) + \sin 2(\beta - \theta)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2}; \quad \tau_{r\theta} = 0. \\ \mu_\theta &= -\frac{pR(\alpha_g - 1)}{2\alpha_g} \frac{m \cos 2\theta - \cos 2(\beta - \theta)}{\sqrt{1 - 2m \cos 2\theta + m^2}}. \quad \mu_r = 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

Якщо $\beta = 0$, то σ_θ досягають максимального значення при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$:

$$\sigma_{\theta \max} = p \left(1 + \frac{1 + \alpha_g}{\alpha_g} \frac{b}{a} \right) = Kp. \quad (2.6)$$

Найбільші за абсолютною величиною дотичні напруження будуть при $\theta = \frac{1}{2} \arccos \frac{2m}{1 + m^2}$:

$$\tau_{\theta r} = p \frac{1 - \alpha_g}{\alpha_g(1 + m)} = K_1 p. \quad (2.7)$$

Коефіцієнти концентрації K і K_1 залежать від пружних сталих матеріалу, і при зміні $0 \leq \eta < \infty$ вони лежать в межах *

$$1 + \frac{2}{3 - 2\nu} \frac{b}{a} \leq K \leq 1 + 2 \frac{b}{a}; \quad 0 \leq K_1 \leq \frac{4(1 - \nu)}{(3 - 2\nu)(1 + m)}. \quad (2.8)$$

* Тут і далі наведені результати для плоскої деформації, а у випадку узагальненого плоского напруженого стану треба скрізь замінити коефіцієнт Пуассона ν на $\frac{\nu}{1 + \nu}$.

Зокрема, при $\frac{b}{a} = 1$ одержимо випадок кругового отвору ($\nu=0$)

$$\frac{5}{3} \leq K \leq 3.$$

Дане співвідношення, яке встановлює межі можливої зміни коефіцієнта концентрації напружень біля кругового отвору в задачі Кірша, збігається з співвідношенням, одержаним В. А. Пальмовим на базі моментної теорії типу Косера. Значення K і K_1 для деяких значень η при $\nu=0,3$, $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ такі:

η	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	∞
K	2,333	2,168	2,087	1,914	1,788	1,689	1,618	1,558
K_1	0	0,188	0,315	0,530	0,686	0,803	0,897	0,972

На рис. 1 зображено розподіл величини $\frac{\sigma_\theta}{p}$ вздовж четверті контура еліптичного отвору. Пунктирна лінія відповідає класичній, а суцільна — несиметричній теоріям пружності при $\eta=0,15$; $\nu=0,3$, $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

3. Квадратний отвір. Функцію, яка конформно відображає зовнішність квадратного отвору з заокругленими кутами, візьмемо у вигляді

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta - \frac{1}{6\zeta^3} \right). \quad (3.1)$$

Опускаючи проміжні викладки, аналогічні викладкам п. 2, випишемо вирази для комплексних потенціалів:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= pR \left[6 \left(\frac{\cos 2\beta}{6\alpha_g + 1} + i \frac{\sin 2\beta}{6\alpha_g - 1} \right) \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{1 + \alpha_g} + \frac{1}{6\alpha_g(1 + \alpha_g)} \frac{1}{\zeta^3} \right]; \\ \psi(\zeta) &= pR \left[-e^{-2i\beta} \zeta + \frac{1 - \alpha_g}{\alpha_g} \frac{1}{\zeta} + \frac{78\alpha_g \left(\frac{\cos 2\beta}{6\alpha_g + 1} + i \frac{\sin 2\beta}{6\alpha_g - 1} \right) \zeta - 13\zeta^3}{6\alpha_g(2\zeta^4 + 1)} \right] \\ \Omega(\zeta) &= \frac{ipR(\alpha_g - 1)}{2} \frac{4 \left(\frac{\cos 2\beta}{6\alpha_g + 1} + i \frac{\sin 2\beta}{6\alpha_g - 1} \right) \zeta^2 + \frac{1}{3\alpha_g}}{\zeta(2\zeta^4 + 1)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поблизу контурних точок отвору напруження виражаються формулами ($\beta=0$)

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= p \left[1 - \frac{1 + \alpha_g}{\alpha_g(6\alpha_g + 1)} \frac{18 \cos 2\theta + (6\alpha_g + 1)(2 \cos 4\theta + 1)}{5 + 4 \cos 4\theta} \right]; \quad \sigma_p = 0 \\ \tau_{\theta p} &= \frac{2p(1 - \alpha_g)}{\alpha_g(6\alpha_g + 1)} \frac{6\alpha_g \sin 2\theta + (6\alpha_g + 1) \sin 4\theta}{5 + 4 \cos 4\theta}; \quad \tau_{p\theta} = 0 \\ \mu_\theta &= \frac{pR(\alpha_g - 1)}{6\alpha_g(6\alpha_g + 1)} \frac{30\alpha_g \cos 2\theta + (6\alpha_g + 1) \cos 4\theta}{\sqrt{5 + 4 \cos 4\theta}}. \quad \mu_p = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Напруження σ_θ досягають максимальних значень поблизу заокруглених кутів квадрата

$$\sigma_{\theta \max} = \left(1 + \frac{1 + \alpha_g}{\alpha_g} \right) p = Kp. \quad (3.4)$$

Коефіцієнт K при $0 \leq \eta < \infty$ може змінюватися в межах

$$\frac{5-2\nu}{3-2\nu} \leq K \leq 3.$$

Величини коефіцієнтів K для деяких значень η і $\nu=0,3$ будуть такими:

η	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	∞
K	3	2,774	2,621	2,363	2,147	2,034	1,923	1,833

На рис. 2 наведений графік розподілу величини $\frac{\sigma_\theta}{p}$ вздовж чверті квадратного отвору при $\eta=0,15$, $\nu=0,3$.

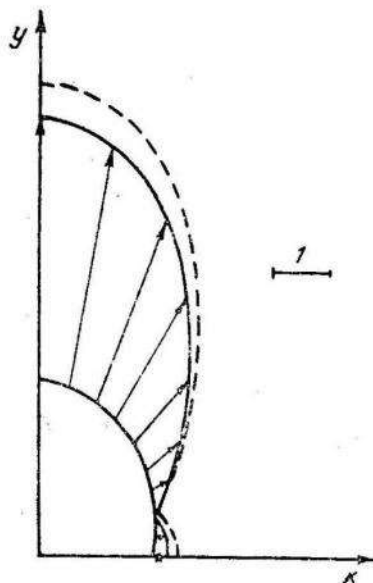


Рис. 1.

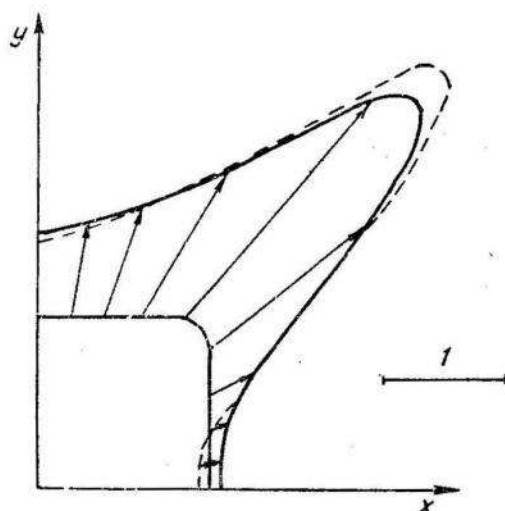


Рис. 2.

4. Трикутний отвір. Для трикутного отвору з заокругленими кутами візьмемо відображаючу функцію у вигляді

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{1}{3\zeta^3} \right). \quad (4.1)$$

Не зупиняючись на ході розв'язування задачі, наведемо готові вирази для комплексних потенціалів:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= pR \left[-\frac{1}{3\alpha_g(1+\alpha_g)} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{e^{2i\beta}}{\alpha_g} \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{1+\alpha_g} \right]; \\ \Psi(\zeta) &= \frac{pR}{\alpha_g} \left[\frac{11\zeta^2 - 3e^{2i\beta}\zeta^3 - 9e^{2i\beta}}{3(2-3\zeta^3)} - \alpha_g e^{-2i\beta} \zeta + \frac{1-\alpha_g}{\zeta} \right]; \\ \Omega(\zeta) &= \frac{ipR(\alpha_g-1)}{4\alpha_g} \frac{3e^{-2i\beta}\zeta^2 + 1}{\zeta(2-3\zeta^3)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для напружень на контурних точках отвору при $\beta = \frac{\pi}{2}$ одержуємо формули

$$\sigma_\theta = p \left[1 - \frac{1+\alpha_g}{\alpha_g} \frac{6(\cos \theta - \cos 3\theta) - 9 \cos 2\theta + 4}{13 - 12 \cos 3\theta} \right]; \quad \sigma_r = 0.$$

$$\begin{aligned}\tau_{\theta\rho} &= \frac{3p(\alpha_g - 1)}{\alpha_g} \frac{2(\sin \theta + \sin 3\theta) + 3 \sin 2\theta}{13 - 12 \cos 3\theta}; \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \\ \mu_\theta &= - \frac{pR(\alpha_g - 1)}{2\alpha_g} \frac{\cos 3\theta + \sin \theta - 3 \sin 2\theta}{\sqrt{13 - 12 \cos 3\theta}}. \quad \mu_\rho = 0.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Напруження σ_θ і $\tau_{\theta\rho}$, обчислені за формулами (4.3), досягають максимальних значень біля вершин трикутного отвору: перші при $\theta = 0$, а другі при $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \left[1 + \frac{5(1 + \alpha_g)}{\alpha_g} \right] p = Kp; \\ \tau_{\theta\rho} &= \frac{3\sqrt{3}(\alpha_g - 1)}{2\alpha_g} p = K_1 p.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Коефіцієнти концентрації напружень K , K_1 в залежності від значень η ($0 \leq \eta \leq \infty$) можуть змінюватися в межах

$$\frac{13 - 2\nu}{3 - 2\nu} \leq K \leq 11; \quad 0 \leq K_1 \leq \frac{6\sqrt{3}(1 - \nu)}{3 - 2\nu}. \quad (4.5)$$

Значення цих коефіцієнтів для деяких η і $\nu = 0,3$ наступні:

η	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	∞
K	11	9,870	9,108	7,818	6,882	6,472	5,615	5,166
K_1	0	0,586	0,980	2,051	2,136	2,505	2,793	3,025

На рис. 3 показано розподіл вздовж половини контура трикутного отвору величини $\frac{\sigma_\theta}{p}$, обчисленої за формулою (4.3) при $\eta = 0,15$, $\nu = 0,3$ (суцільна лінія) і за даними роботи [5] (пунктирна лінія).

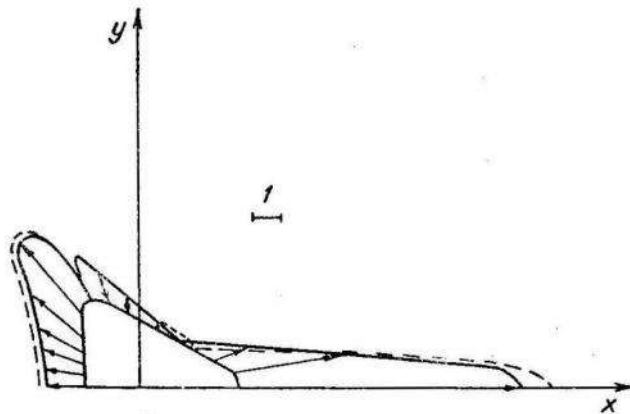


Рис. 3.

Розв'язки розглянутих задач при двоосьовому розтягу пластинки одержимо шляхом накладання розв'язків при $\beta = 0$ і $\beta = \frac{\pi}{2}$.

У постановці моментної теорії несиметричної пружності типу Косера розв'язані задачі про всесторонній розтяг пружної площини з криволінійним отвором у роботі [4] за допомогою наближеного метода збурення

форми границі з врахуванням другого наближення. Характер розподілу величини $\frac{\sigma_\theta}{p}$, порахованої на основі одержаних тут результатів, якісно близький до аналогічних графіків роботи [4].

На закінчення слід відзначити, що при $\alpha_g = 1$ ($g = 0$) наведені вище розв'язки задач переходять у відомі розв'язки класичної теорії [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. Т. Л. Мартинович. Основні рівняння плоскої задачі несиметричної пружності. Вісник Львів. ун-ту, сер. фіз.-хім.-мат., 1968.
 2. Р. Д. Миндлин. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений. Сб. переводов «Механика», № 4 (86), 1964.
 3. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
 4. Н. Ю. Немиш. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости. «Прикладная механика», т. 2, в. 4, 1966.
 5. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехиздат, 1951.
 6. В. А. Пальмов. Плоская задача теории несимметричной упругости. ПММ, т. 28, в. 6, 1964.
-

УДК 539.311

Є. І. ЛУНЬ

ДО ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КРУГОВОГО ОТВОРУ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ

Розглядається один із шляхів дослідження концентрації напружень біля кругового отвору в циліндричній оболонці на основі уточненої теорії оболонок типу Тимошенка [2, 7], яка враховує деформації поперечних зсувів і дає можливість задовольняти п'ять граничних умов на контурі отвору.

1. Як показано в роботі [5], додатковий напружений стан, викликаний наявністю отвору в оболонці, можна знаходити, використовуючи ключову систему однорідних рівнянь теорії пологих оболонок і певні граничні умови на контурі отвору і на «нескінченності». У випадку циліндричної оболонки відповідна ключова система рівнянь, що одержується з основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка, має вигляд [1]

$$\begin{aligned}\Delta\Delta w + \frac{1+\nu}{Ehr} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta\varphi + \frac{1}{RD} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 0; \\ \Delta\Delta\varphi - \frac{2Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0; \\ \Delta\psi - \frac{3}{h^2} \psi &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

де невідомими функціями є $w(x, y)$ — прогин в напрямі нормалі до середньої поверхні оболонки; $\varphi(x, y)$ — функція напружень; $\psi(x, y)$ — функція, через яку виражаються кути повороту нормалі до середньої поверхні оболонки.

В далішому для знаходження додаткового напруженого стану використовуватимемо систему рівнянь, яка одержується із системи (1) нехтуванням підкресленого члена, що спрощує розв'язок задачі і практично не впливає на результати.

Як відомо [5], перші два рівняння системи (1) (без підкресленого члена) введенням комплексної функції

$$\sigma(x, y) = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} w - i\varphi\tag{2}$$

зводяться до рівняння

$$\Delta\Delta\sigma + \frac{2ik^2}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0,\tag{3}$$

де

$$k^4 = 3(1-\nu^2) \frac{R^2}{4h^2}.\tag{4}$$

Отже, задача зводиться до знаходження функцій ψ та σ із третього рівняння системи (1) та рівняння (3).

Зусилля і моменти, віднесені до півгеодезичної системи координат (ρ, λ) , пов'язані з функціями ψ і σ співвідношеннями

$$\begin{aligned} T_\rho &= -\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right) \operatorname{Im} \sigma; \quad T_\lambda = -\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \operatorname{Im} \sigma; \\ S_{\rho\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \operatorname{Im} \sigma; \\ N_\rho &= -\frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \rho} (f-w)\right]; \\ N_\lambda &= \frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \lambda} (f-w)\right]; \\ G_\rho &= -D \left\{ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right) + \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \nu \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right)\right] f \right\}; \\ G_\lambda &= D \left\{ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right) - \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right] f \right\}; \\ H_{\rho\lambda} &= D(1-\nu) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right) \psi - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \lambda}\right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} f &= w + \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta w - \frac{2h(1+\nu)}{3ER(1-\nu)} \left[\cos^2 \lambda \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \lambda \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right) - \sin 2\lambda \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \right] \Phi. \end{aligned} \quad (6)$$

2. У випадку, коли пружний стан оболонки без отвору задається зусиллями $T_x=p$, $T_y=q$, розв'язок рівняння (3) має вигляд [3, 4]

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\alpha \rho) J_n(\alpha \rho) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos 2m\lambda \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\alpha \rho) [J_{n-2m}(\alpha \rho) + I_{n+2m}(\alpha \rho)], \end{aligned} \quad (7)$$

де C_n — комплексні сталі; $J_n(\alpha \rho)$ — функція Бесселя першого роду; $H_n^{(1)}(\alpha \rho)$ — функція Ганкеля; $\alpha = \frac{k}{2R} (1+i)$. Розв'язок третього рівняння системи (1) в цьому випадку можна записати у вигляді

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} K_{2m} \left(\frac{\sqrt{3}}{h} \rho \right) \sin 2m\lambda, \quad (8)$$

де $K_{2m} \left(\frac{\sqrt{3}}{h} \rho \right)$ — модифікована функція Бесселя другого роду; D_{2m} — дійсні сталі.

Підставляючи вирази (7) та (8) в формули (5), одержимо вирази для зусиль та моментів у вигляді рядів

$$\begin{aligned}
 T_{\rho}^* &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\rho) \cos 2m\lambda; \\
 S_{\rho\lambda}^* &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\rho) \sin 2m\lambda; \\
 T_{\lambda}^* &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\rho) \cos 2m\lambda; \\
 N_{\rho}^* &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m(\rho) \cos 2m\lambda; \\
 N_{\lambda}^* &= \sum_{m=1}^{\infty} e_m(\rho) \sin 2m\lambda; \\
 G_{\rho}^* &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\rho) \cos 2m\lambda; \\
 H_{\rho\lambda}^* &= \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\rho) \sin 2m\lambda; \\
 G_{\lambda}^* &= \sum_{m=0}^{\infty} k_m(\rho) \cos 2m\lambda,
 \end{aligned} \tag{9}$$

де $a_m(\rho), \dots, k_m(\rho)$ — ряди, які містять сталі $C_k = A_k + iB_k$ та D_{2m} . Загальні члени цих рядів не наводимо через їх громіздкість.

Граничні умови, які повинні задовольнятися на контурі отвору, мають вигляд:

у випадку вільного контуру

$$T_{\rho}^* = 0; \quad S_{\rho\lambda}^* = 0; \quad N_{\rho}^* = 0; \quad G_{\rho}^* = 0; \quad H_{\rho\lambda}^* = 0 \quad \text{при } \rho = \rho_0; \tag{10}$$

у випадку, коли отвір закритий кришкою, яка передає лише перерізуючі зусилля, у виразі (10) потрібно лише замість умови $N_{\rho}^* = 0$ взяти умову [6]

$$\varpi = \varpi_0 \cos\left(\frac{\rho_0}{R} \sin \lambda\right), \tag{11}$$

де ϖ_0 — нормальне переміщення центра кришки.

Із умов (10) одержуємо таку нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих A_k, B_k, D_{2m} :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} (a_{mk}^{(f)} A_k + b_{mk}^{(f)} B_k) + \tau_m^{0'} (\delta_t^3 + \delta_t^4 + \delta_t^5) d_m^{(f)} D_{2m} = \\
 = -hp (\delta_m^0 + \delta_m^1) (\delta_t^1 + \delta_t^2),
 \end{aligned} \tag{12}$$

де $t=1, 2, 3, 4, 5$; $m=0, 1, 2, \dots, \infty$ для $t=1, 3, 4$; $m=1, 2, \dots, \infty$ для $t=2, 5$;

$$\delta_m^p = \begin{cases} 1 & \text{при } m = p; \\ 0 & \text{при } m \neq p; \end{cases} \quad \tau_m^p = \begin{cases} 0 & \text{при } m = p; \\ 1 & \text{при } m \neq p; \end{cases}$$

$a_{mk}^{(t)}$, $b_{mk}^{(t)}$, $d_m^{(t)}$ — сталі, одержувані з формули (10) при врахуванні (9).

Із системи рівнянь (12) знаходяться всі сталі, які входять у розв'язок поставленої задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Е. І. Лунь. Спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 3, 1967.
2. Б. Л. Пелех. Кандидатская диссертация. Львов. гос. ун-т, 1965.
3. К. А. Приварников, В. М. Чехов. Концентрація напружень навколо кругового отвору в циліндричній оболонці. ДАН УРСР, № 12, 1965.
4. Г. М. Савін, О. М. Гузь. До питання про концентрацію напружень навколо отворів у циліндричній оболонці. ДАН УРСР, № 1, 1964.
5. Г. М. Савін. Про концентрацію напружень навколо отворів у тонких пружних оболонках. Прикладна механіка, т. VII, вип. 1, 1961.
6. К. Ф. Черных. К проблеме определения концентраций напряжений возле отверстия в оболочке. Сб. «Концентрация напряжений», вып. 1, 1965.
7. М. П. Шереметьев, Е. И. Лунь. Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, 1964.

УДК 539.377

І. М. ОСІВ

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В БЕЗМЕЖНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ

Розглядається безмежна ізотропна пластинка з еліптичним отвором. На краю пластинки задана температура

$$T(t) = \begin{cases} T_0 & \text{для } t \in [t_1, t_2], \\ 0 & \text{для } t \notin [t_1, t_2], \end{cases} \quad t \in L. \quad (1)$$

Зовнішнє навантаження на краю і на безмежності пластинки відсутнє. Пластинка вважається теплоізованою, віддача тепла відбувається лише на безмежності «ребрами» пластинки. Джерела тепла відсутні. Потрібно визначити температурне поле і температурні напруження в пластинці.

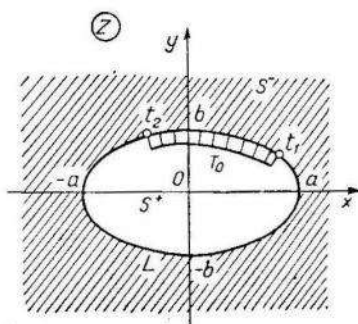


Рис. 1.

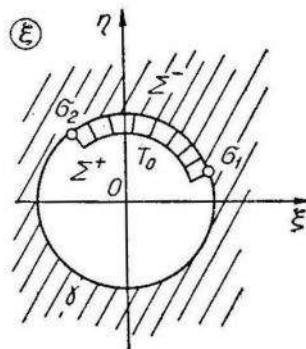


Рис. 2.

Відоображаємо площину S^- (рис. 1) на зовнішність Σ^- одиничного кола γ (рис. 2) в площині $\zeta = \xi + i\eta$ за допомогою функції $z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)$. Нехай σ_1 і σ_2 — точки на контурі γ , які відповідають точкам t_1 і t_2 на контурі L . Тоді гранична умова (1) перепишеться так:

$$T(\sigma) = \begin{cases} T_0 & \text{для } \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2], \\ 0 & \text{для } \sigma \notin [\sigma_1, \sigma_2], \end{cases} \quad \sigma \in \gamma. \quad (2)$$

Як показав Н. Н. Лебедев [1], напружений стан площини S^- визначається в полярних координатах за формулами

$$\begin{aligned} \hat{r}r + \hat{\theta}\theta &= 4\operatorname{Re}\Phi(\zeta) - AT(\zeta); \\ \hat{r}r + i\hat{\theta}\theta &= \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \frac{\bar{\zeta}^2}{r^2\omega'(\zeta)} [\omega(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)}\overline{\Psi(\zeta)}] + f(\zeta), \end{aligned} \quad (3)$$

де $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ — голоморфні в Σ^- функції;

$$f(\zeta) = -\frac{A}{2} T(\zeta) + \frac{A}{2} \cdot \frac{\bar{\zeta}^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)} \int \frac{\partial T(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \omega'(\zeta) d\bar{\zeta}; \quad (4)$$

$A = \frac{\alpha E}{1-\nu}$ — для плоскої деформації; $A = \alpha E$ — для узагальненого плоского напруженого стану; α — коефіцієнт температурного лінійного розширення матеріалу; E, ν — модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона; $T(\zeta)$ — температурне поле, яке знаходиться із рівняння Лапласа

$$\Delta_{\xi, \eta} T(\zeta) = 0 \quad (5)$$

при граничних умовах (2).

Розв'язком рівняння (5) з граничними умовами (2) є гармонічна функція

$$T(\zeta) = \frac{T_0 \theta_1}{2\pi} - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{T(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{T_0}{2\pi} \left[\theta_1 - i \left(\ln \frac{\bar{\zeta} - \bar{\sigma}_2}{\bar{\zeta} - \bar{\sigma}_1} + \ln \frac{\zeta - \sigma_1}{\zeta - \sigma_2} \right) \right]; \quad (6)$$

$$\theta_1 = \arg \sigma_2 - \arg \sigma_1.$$

Так знайдене температурне поле на безмежності набуває сталого значення $\frac{T_0 \theta_1}{2\pi}$.

Продовжуємо $\omega'(\zeta) \Phi(\zeta)$ з Σ^- в Σ^+ через незавантажені ділянки границі γ :

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta) \Phi(\zeta) = & -\bar{\Phi}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \cdot \omega'(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\zeta^2} \cdot \bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + \\ & + \frac{1}{\zeta^2} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \cdot \bar{\Psi}'\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) - \frac{\omega(\zeta)}{2\zeta^2} \cdot \frac{AT_0}{2\pi i} \left(\frac{\sigma_2 \zeta}{\sigma_2 - \zeta} - \frac{\sigma_1 \zeta}{\sigma_1 - \zeta} \right), \quad \zeta \in \Sigma^+ \end{aligned} \quad (7)$$

Визначивши з виразу (7) комбінацію $\omega'(\zeta) \Psi(\zeta)$ і підставивши в друге співвідношення (3), одержуємо вираз для напружень через одну функцію $\Phi(\zeta)$

$$\begin{aligned} r\hat{r} + ir\hat{\theta} = & \Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\omega'\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}{\omega'(\zeta)} \left[\bar{\Phi}(\bar{\zeta}) + \Phi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \right] - \\ & - \frac{AT(\zeta)}{2} - \frac{\bar{\zeta}^2}{r^2} \cdot \frac{\omega(\zeta) - \omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}{\omega'(\zeta)} \left[\bar{\Phi}'(\bar{\zeta}) - \frac{AT_0}{4\pi i} \left(\frac{1}{\bar{\zeta} - \sigma_2} - \frac{1}{\bar{\zeta} - \sigma_1} \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

який на γ набуде вигляду

$$[\omega'(\sigma) \Phi(\sigma)]^+ - [\omega'(\sigma) \Phi(\sigma)]^- = -\frac{\omega'(\sigma) AT(\sigma)}{2}, \quad \sigma \in \gamma \quad (9)$$

Методика рішення задачі (9) подана М. І. Мусхелішвілі. Використовуючи її, знаходимо комплексний потенціал $\Phi(\zeta)$.

$$\Phi(\zeta) = -\frac{AT_0}{4\pi i} \ln \frac{\zeta - \sigma_2}{\zeta - \sigma_1} + \frac{\bar{\gamma}' \zeta}{\zeta^2 - m} + \Gamma, \quad \zeta \in \Sigma^+, \Sigma^- \quad (10)$$

Тут

$$\Gamma = \frac{AT_0 \theta_1}{8\pi}; \quad m = \frac{a-b}{a+b}; \quad \gamma' = \frac{\kappa AT_0 (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)}{4\pi i (1+\kappa)}; \quad (11)$$

κ — константа Колосова—Мусхелішвілі.

На основі першої залежності (3) і співвідношення (8) знаходимо напруження

$$\begin{aligned}\hat{r}r &= -CP \sin \frac{\theta_1}{2} [r^2 \cos(\theta - \theta_2) - m \cos(\theta + \theta_2)]; \\ \hat{r}\theta &= -CP \sin \frac{\theta_1}{2} [r^2 \sin(\theta - \theta_2) + m \sin(\theta + \theta_2)]; \\ \hat{\theta}\theta &= -CP_1 \sin \frac{\theta_1}{2} [r^2 \cos(\theta - \theta_2) - m \cos(\theta + \theta_2)],\end{aligned}\quad (12)$$

де позначено

$$\begin{aligned}P &= \frac{r(r^2 - 1)(r^2 - m^2)}{(r^4 - 2mr^2 \cos 2\theta + m^2)^2}; \\ P_1 &= \frac{r[(r^2 + 1)(r^2 + m^2) - 4mr^2 \cos 2\theta]}{(r^4 - 2mr^2 \cos 2\theta + m^2)^2}; \\ C &= \frac{\kappa AT_0}{\pi(1 + \kappa)}, \quad \theta_2 = \frac{\arg \sigma_2 + \arg \sigma_1}{2}.\end{aligned}\quad (13)$$

На контурі γ напруження $\hat{\theta}\theta$ мають вигляд:

$$\hat{\theta}\theta|_{\gamma} = -2C \sin \frac{\theta_1}{2} \cdot \frac{\cos(\theta - \theta_2) - m \cos(\theta + \theta_2)}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}. \quad (14)$$

Розглянемо частинні випадки.

1. Нескінченна пластинка з круговим отвором ($m=0$)

$$\hat{\theta}\theta|_{\gamma} = -2C \sin \frac{\theta_1}{2} \cos(\theta - \theta_2). \quad (15)$$

2. Безмежна пластинка з горизонтальною прямолінійною тріщиною довжиною $2a$ ($m=1$)

$$\hat{\theta}\theta|_{\gamma} = \sigma_x|_L = -C \sin \frac{\theta_1}{2} \cdot \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} = \mp \frac{aC \sin \frac{\theta_1}{2} \cdot \sin \theta_2}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (16)$$

3. Безмежна пластинка з вертикальною прямолінійною тріщиною висотою $2b$ ($m=-1$)

$$\hat{\theta}\theta|_{\gamma} = \sigma_y|_L = -C \sin \frac{\theta_1}{2} \cdot \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta} = \mp \frac{bC \sin \frac{\theta_1}{2} \cdot \cos \theta_2}{\sqrt{b^2 - y^2}}.$$

Співвідношення (14), (15), (16) і (17) відображають розподіл температурних напружень $\hat{\theta}\theta$ на контурі пластинки.

Висловлюю подяку І. О. Прусову за постановку цієї задачі та за цінні вказівки при її розв'язанні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лебедев. Температурные напряжения в теории упругости. М., 1937.
2. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.

УДК 539.311

І. О. ПРУСОВ, О. В. ХИЖНЯКОВ

ДО ПИТАННЯ ПРО ЗГИН АНІЗОТРОПНИХ ПЛИТ

1. Основні рівняння. Розглянемо пружну рівновагу плоскої плити постійної товщини $2h$ із анізотропного однорідного матеріалу під дією тиску $q(x, y)$, нормального до її середньої площини, і навантаження на контурі L (вважаємо, що середня площина є горизонтально розташована координатна площина xy , причому координатна вісь z направлена вертикально вниз).

Дотичні напруження τ_{xz} і τ_{yz} на площинах $z = \pm h$ приймаємо рівними нулевим; будемо вважати, що напруження σ_z малі порівняно з σ_x і σ_y . Будемо вважати також, що матеріал плити має в кожній точці хоча б одну площину пружної симетрії, а саме: площину, паралельну до серединної площини. Позначивши пружні переміщення точок плити через u, v, w_0 , будемо шукати їх у вигляді

$$u = h \left(\lambda a - \frac{1}{3} \delta^3 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + h \lambda_0 \frac{\partial \Omega}{\partial y}; \quad (1.1)$$

$$v = h \left(\lambda b - \frac{1}{3} \delta^3 \frac{\partial w}{\partial y} \right) - h \lambda_0 \frac{\partial \Omega}{\partial x}; \quad (1.2)$$

$$w_0 = w + \lambda' \delta^2 (c_1 + c_2 \delta^2), \quad (1.3)$$

де $\lambda = \delta - \frac{1}{3} \delta^3$; $\lambda' = 1 - \delta^2$; $\lambda_0 = \frac{5}{2} \lambda$; $\delta = \frac{z}{h}$; a, b, C_k, Ω — довільні функції від координат x, y ; $w(x, y)$ — прогини точок серединної площини плити.

Поклавши

$$a = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad b = -\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \sigma_z = 0, \quad (1.4)$$

на основі добре відомих формул [6] і закону Гука, розв'язаного відносно напружень, маємо

$$\sigma = -B_{1j} h \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - 2B_{j6} h \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - B_{2j} h \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + h \lambda_0 L_j \Omega; \quad (1.5)$$

$$\tau = B_{k4} \left(\frac{\partial E}{\partial y} + \lambda_0' \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + B_{k5} \left(\frac{\partial E}{\partial x} - \lambda_0' \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right), \quad (1.6)$$

де модулі пружності B_{ij} визначаються через коефіцієнти деформації a_{ij} [5]. Крім того, тут введені позначення

$$R = \lambda F + \delta w; \quad \lambda'_0 = \frac{5}{2} \lambda; \quad E = \lambda' (-F + c_1 \delta^2 + c_2 \delta^4);$$

$$L_j = (B_{1j} - B_{2j}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - B_{j6} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (1.7)$$

Зауважимо, що $j=1$ відповідає значення σ_x ; $j=2$ — σ_y , і $j=6$ — τ_{xy} ; також $k=4$ відповідає значення τ_{yz} , а $k=5$ — τ_{xz} .

Як наслідок закону Гука при $\sigma_z = 0$ отримаємо

$$(2\delta - 4\delta^3) c_1 + (4\delta^3 - 6\delta^5) c_2 = -h^2 \left[c_1^0 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + 2c_3^0 \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + c_2^0 \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + (c_2^0 - c_1^0) \lambda_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \lambda_0 c_3^0 \nabla_1 \Omega \right], \quad (1.8)$$

де

$$\nabla_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad c_j^0 = a_{13} B_{1j} + a_{23} B_{2j} + a_{36} B_{j6}.$$

Рівняння (1.8) служить для визначення функцій c_k ($k=1, 2$), котрі знаходяться, як в роботі [3]. Наведемо готовий результат:

$$c_1 = \frac{h^2}{12} \left[c_1^0 \frac{\partial^2 R'}{\partial x^2} + 2c_3^0 \frac{\partial^2 R'}{\partial x \partial y} + c_2^0 \frac{\partial^2 R'}{\partial y^2} + \frac{195}{2} \left\{ (c_2^0 - c_1^0) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + c_3^0 \nabla_1 \Omega \right\} \right];$$

$$c_2 = -\frac{7h^2}{12} \left[c_1^0 \frac{\partial^2 R_0}{\partial x^2} + 2c_3^0 \frac{\partial^2 R_0}{\partial x \partial y} + c_2^0 \frac{\partial^2 R_0}{\partial y^2} + \frac{25}{2} \left\{ (c_2^0 - c_1^0) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + c_3^0 \nabla_1 \Omega \right\} \right],$$

де

$$R' = 48w + 39F, \quad R_0 = 6w + 5F. \quad (1.9)$$

Враховуючи рівності (1.5) — (1.6) та (1.9), маємо

$$M = -D_{1j} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - D_{2j} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - 2D_{j6} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} + 2L_j^* \Omega; \quad (1.10)$$

$$N = -K_{4k} \left(\frac{\partial E^*}{\partial y} + \frac{5}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) - K_{5k} \left(\frac{\partial E^*}{\partial x} - \frac{5}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right), \quad (1.11)$$

де позначено

$$\bar{w} = w + \frac{4}{5} F; \quad D_{ij} = \frac{2}{3} h^3 B_{ij}; \quad K_{ij} = \frac{4}{3} h B_{ij};$$

$$M_x = h^2 \int_{-1}^1 \sigma_x \delta d\delta; \quad H_{xy} = h^2 \int_{-1}^1 \tau_{xy} \delta d\delta; \quad N_x = h \int_{-1}^1 \tau_{xz} d\delta;$$

$$E^* = F - \frac{h^2}{2} \left[c_1^0 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + 2c_3^0 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} + c_2^0 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + 2 \left\{ (c_2^0 - c_1^0) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + c_3^0 \nabla_1 \Omega \right\} \right]; \quad (1.12)$$

$$L_j^* = (D_{1j} - D_{2j}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - D_{j6} \nabla_1.$$

При $j=1, 2, 6$ знаходимо відповідно M_x, M_y, H_{xy} ; при $k=4, 5$ знаходимо N_y, N_x .

Задовольняючи рівняння рівноваги, які повинні задовольнятися в кожній точці пластинки, отримуємо на основі виразів (1.10) — (1.11), що функції $\bar{w}$, F і Ω задовольняють умови:

$$D_{11} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^3 \partial y} + 2D_3 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} = q_1; \quad (1.13)$$

$$K_{55} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - K_{44} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f(x, y); \quad (1.14)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \frac{5}{2} \eta \Omega, \quad (1.15)$$

причому

$$q_1 = q + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[(D_{11} - D_3) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + (D_3 - D_{22}) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right] - \\ - 2 \left[D_{16} \frac{\partial^4 \Omega}{\partial x^4} + 3(D_{26} - D_{16}) \frac{\partial^4 \Omega}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{26} \frac{\partial^4 \Omega}{\partial y^4} \right];$$

$$D_3 = D_{13} + 2D_{66}; \quad 2\eta = K_{44} + K_{55}; \quad \nabla_2 = \nabla_1 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};$$

$$\epsilon_1 = D_{11} - D_{12} - D_{55} (c_2^0 - c_1^0); \quad \epsilon_2 = D_{22} - D_{12} + D_{44} (c_2^0 - c_1^0); \quad (1.16)$$

$$f(x, y) = (D_{11} + D_{55} c_1^0) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} - (D_{22} + D_{44} c_2^0) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} + (D_{55} c_2^0 - D_{44} c_1^0) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - \frac{5}{2} K_{45} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Omega + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla_2 \Omega (D_{16} + c_3^0 D_{55}) - 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla_2 \Omega (D_{26} + c_3^0 D_{44}).$$

Знайдемо явний вираз функцій $\Omega(x, y)$ та $\bar{w}(x, y)$, задовольняючи три граничні умови на контурі плити, тобто умови, коли задані моменти та перерізуючі сили M_n , H_n , N_n або прогини точок середньої площини $w(x, y)$ та похідна по нормалі від w , або похідна по параметру δ від переміщень u , v при $\delta=0$.

Відзначимо, що N_x та N_y можна знаходити, користуючись рівняннями

$$N_x = -D_{11} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} - D_3 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x \partial y^2} - 3D_{16} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} - D_{26} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + 2 \left(\frac{\partial L_1^*}{\partial x} + \frac{\partial L_6^*}{\partial y} \right) \Omega; \\ N_y = -D_{16} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} - D_3 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} - 3D_{26} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + 2 \left(\frac{\partial L_6^*}{\partial x} + \frac{\partial L_2^*}{\partial y} \right) \Omega. \quad (1.17)$$

Рівняння (1.11) використовуються при практичному розв'язку задач для знаходження граничної умови для функції $F(x, y)$.

2. Зв'язок теорії з комплексним змінним. Наслідуючи С. Г. Лехницького [2], запишемо загальний вигляд прогинів:

а) у випадку різних комплексних параметрів ($\mu_1 \neq \mu_2$)

$$\bar{w} = w^* + 2 \operatorname{Re} [w_1(z_1) + w_2(z_2)]; \quad (2.1)$$

б) у випадку однакових комплексних параметрів ($\mu_1 = \mu_2$)

$$\bar{w} = w^* + 2 \operatorname{Re} [w_1(z_1) + \bar{z}_1 w_2(z_1)]. \quad (2.2)$$

Тут $w_1(z_1)$, $w_2(z_2)$ — довільні аналітичні функції комплексних змінних $z_1 = x + \mu_1 y$, $z_2 = x + \mu_2 y$; w^* — будь-який частковий розв'язок рівняння (1.13), а μ_1, μ_2 — корені рівняння

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2D_{33}\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0, \quad (2.3)$$

дослідженням якого займався С. Г. Лехницький [1, 2].

На основі виразів (1.10), (1.17) із врахуванням (2.1), (2.3) (випадок попарно рівних коренів не розглядаємо) отримуємо

$$M_x = M_x'' - 2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi(z_1) + p_2 \Psi(z_2)]; \quad (2.4)$$

$$M_y = M_y'' - 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi(z_1) + q_2 \Psi(z_2)];$$

$$H_{xy} = H_{xy}'' - 2 \operatorname{Re} [r_1 \Phi(z_1) + r_2 \Psi(z_2)];$$

$$N_x = N_x'' - 2 \operatorname{Re} [\mu_1 s_1 \Phi'(z_1) + \mu_2 s_2 \Psi'(z_2)]; \quad (2.5)$$

$$N_y = N_y'' + 2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi'(z_1) + s_2 \Psi'(z_2)],$$

де

$$p_k = D_{11} + D_{12}\mu_k^2 + 2D_{16}\mu_k; \quad M_x'' = M_x' + 2L_1^* \Omega;$$

$$q_k = D_{12} + D_{22}\mu_k^2 + 2D_{26}\mu_k; \quad M_y'' = M_y' + 2L_2^* \Omega;$$

$$r_k = D_{16} + D_{26}\mu_k^2 + 2D_{66}\mu_k; \quad H_{xy}'' = H_{xy}' + 2L_6^* \Omega;$$

$$s_k = D_{11}\mu_k^{-1} + 3D_{16} + D_{33}\mu_k + D_{26}\mu_k^2; \quad N_x'' = N_x' + 2 \left(\frac{\partial L_1^*}{\partial x} + \frac{\partial L_6^*}{\partial y} \right) \Omega; \quad (2.6)$$

$$\Phi(z_1) = \frac{d^2}{dz_1^2} w_1(z_1); \quad \Psi(z_2) = \frac{d^2}{dz_2^2} w_2(z_2); \quad N_y'' = N_y' + 2 \left(\frac{\partial L_6^*}{\partial x} + \frac{\partial L_2^*}{\partial y} \right) \Omega,$$

причому $M_x', \dots, N_y'$ обчислюються за формулами (1.10), (1.17), де потрібно замінити w на w^* , а Ω (1.15) знаходиться незалежно від w (1.13).

Як бачимо, формули (2.4) — (2.5) збігаються з аналогічними формулами С. Г. Лехницького з точністю до перших доданків, які і містять уточнення; тому всі дослідження, що стосуються даного питання, можна знайти в роботах [1, 2, 4].

Необхідно зауважити, що в майбутньому будемо вважати, що для будь-якої багатозв'язної області S , яку займає плита, функція $\Omega(x, y)$ однозначна і прямує до нуля на безмежності.

3. Приклад. Розглядаючи шарнірно оперту по всьому контуру ортотропну прямокутну пластинку, яка згинається нормально прикладеним навантаженням, розподіленим за законом $q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ (q — інтенсивність навантаження в центрі пластинки), аналогічно роботі [5] отримуємо

$$w = \left(1 + \frac{4Q_1}{5Q_2} \right) \frac{q}{Q} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (3.1)$$

де

$$Q = D_{11} \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 + 2D_{33} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\pi}{b} \right)^4; \quad Q_2 = K_{55} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 - K_{44} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2;$$

$$Q_1 = (D_{11} - D_{55}c_1^0) \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 + (D_{44}c_1^0 - D_{55}c_2^0) \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \\ + (D_{44}c_2^0 - D_{22}) \left(\frac{\pi}{b} \right)^4.$$

Цікаво відзначити, що у випадку трансверсально ізотропної пластинки маємо рівняння

$$w = w_0 \left[1 + \frac{2}{5} \frac{\pi^2 h^2}{1 - \nu} \left(2 \frac{G}{G'} - \nu' \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{E}{E'} \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right], \quad (3.2)$$

де w_0 [7] має вигляд

$$w_0 = \frac{3a^4 b^4 (1 - \nu^2)}{2\pi^4 E h^3 (a^2 + b^2)^2} q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

При $\nu=0$ рівняння (3.2) збігається з аналогічним рівнянням [5], для якого наведені розрахунки ($\nu=0$) для двох співвідношень $2ha^{-1}$ в центрі пластинки. З таблиць видно, що найбільше уточнення дає врахування поперечних зсувів (для ізотропії при $2ha^{-1}=1/5$ і при $\nu=0,3$ це уточнення становить 22%).

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницький. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
2. С. Г. Лехницький. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ, новая серия, т. II, вып. 2, 1938.
3. И. А. Прусов. Об одном представлении изгиба пластин. В сб. «Концентрация напряжений», вып. 2. К., «Наукова думка», 1968.
4. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., 1951.
5. С. С. Амбарцумян. Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.
6. А. Ляв. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
7. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. М., 1948.

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА

Т. В. Строчик. Про конформне відображення одного класу півсмуг	3
У. А. Мишковець. Про деякі властивості спектральної функції	10
Г. Л. Буймола. Проективна геометрія в працях радянських вчених	12
Г. П. Губанов, Б. В. Ковальчук. Про лінійні процеси наближення класів функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок	17
Л. М. Лісевич і І. М. Германюк. Деякі властивості SP -диференційовних функцій	22
О. С. Кованько і Л. М. Лісевич. Деякі граничні співвідношення для SP -обмежених функцій	25
Я. Г. Притула. Про абсолютну збіжність рядів Фур'є майже-періодичних функцій Бора	29
І. І. Чулик. До визначення класів рядів Лорана в методах локалізації нулів за модулями	34
А. І. Кардаш. Необхідні та достатні умови наявності правильних вершин діаграм Ньютона функцій багатьох змінних	37
Є. С. Дорожовський. Розрахунок траєкторій лінз з порушеною осью симетрії	40
И. В. Людкевич. Про уточнення одного методу розрахунку електростатичного поля системи електродів малої товщини	43
М. І. Іванчов. Деякі апріорні оцінки розв'язків квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях	46
Г. Г. Цегелик. Умова найкращого вибору параметрів в методі параметричної локалізації нулів функцій	52
Г. С. Гупало. Про узагальнену задачу Неймана для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу	57
Г. С. Гупало. Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу	59
А. І. Кардаш, І. І. Чулик. Про області збіжності степеневих рядів та його мажоранти Ньютона для функції двох комплексних змінних	62
А. І. Пилипович. Площини та сфери в конструктивних задачах простору Лобачевського	66
Г. Л. Буймола, М. Й. Владика, А. О. Копистянський. Про використання перфокарт для приймання заліків (колоквіумів)	68

МЕХАНІКА

Д. В. Грилицький, Р. М. Луцишин. Пружна рівновага анізотропної пластинки з впаяною ізотропною шайбою при наявності розрізу на спаї	70
Р. М. Луцишин. Про пружну рівновагу кусочно-неоднорідної пластинки з абсолютно жорсткою прокладкою	79
В. О. Ліхачов. Згин балки, підкріпленої коловим циліндром	85
Д. В. Грилицький, В. Б. Рудницький. До задачі про кручення півпростору кільцевим штампом	91
Т. Л. Мартинович. Плоска задача теорії несиметричної пружності анізотропного середовища	95
Т. Л. Мартинович, І. О. Ніщенко. Вплив несиметричності тензора напружень на концентрацію напружень біля криволінійних отворів	100
Є. І. Лунь. До визначення концентрації напружень біля кругового отвору в циліндричній оболонці	107
І. М. Осів. Температурні напруження в безмежній пластинці з еліптичним отвором	111
І. О. Прусов, О. В. Хижняков. До питання про згин анізотропних плит	114

Редактор Ф. О. Гріншпoн
Технічний редактор Т. В. Саранюк
Коректор С. Я. Михайленко

*Вестник Львовского ордена Ленина
государственного университета им. Ивана Франко.*

Серия механико-математическая, выпуск 4.

(На украинском языке).

БГ 08554. Здано до набору 25. IX 1968 р. Підписано до друку 6. VI 1969 р. Формат $70 \times 108^{11/16}$. Папір № 2. Паперов. арк. 4. Умовн. друк. арк. 11,2. Обл.-вид. арк. 10. Тираж 600. Ціна 67 коп. Зам. 3072

Видавництво Львівського університету.
Львів, Університетська, 1.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління по пресі. Львів, Стефаника, 11.

Выводится асимптотическая формула для функции, осуществляющей конформное однолистное отображение полуполос некоторого класса на прямолинейные полуполосы.

К рассматриваемому классу принадлежат полуполосы, состоящие из счетного множества трапеций $T_0, T_1, T_2, \dots$, причем T_n и T_{n+1} имеют общие боковые стороны, высоты всех T_n равны 1 и в T_n можно вписать прямоугольник с высотой 1 и основаниями длиной $d_n \geq d > 0$, лежащими на основаниях T_n . Пусть $b_n = \min(d_{n-1}, d_n)$, β_n — угол между ориентированными основаниями трапеций T_{n-1} и T_n . Если выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| < \infty, \quad (1)$$

то для нахождения асимптотической формулы применимы результаты С. Е. Варшавского. В статье асимптотические формулы выведены для случая, когда условие (1) заменено более слабым: для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| e^{-b_n \left(\frac{\pi}{3} - \varepsilon \right)} < \infty.$$

Библиографий 4.

Рассматривается пространство комплекснозначных функций на действительной прямой с нормой

$$\|f\| = \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty,$$

для которых спектральная функция

$$A_f(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

определена для всех действительных чисел $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Доказывается теорема: Спектральная функция $A_f(\lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$|A_f(\lambda) - A_f(\lambda_0)| \leq \sqrt{2} \|f\|,$$

где λ_0 — произвольно фиксировано.

Перечисляются некоторые следствия теоремы, в частности такое: для того чтобы ряды Фурье—Бора функций $f(x)$ и $g(x)$ не совпадали, необходимым условием является выполнение неравенства $\|f-g\| > 0$.

УДК 513.015.2

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ТРУДАХ СОВЕТСКИХ УЧЕНЫХ. Буймола Г. Л. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 12.

В статье дан краткий обзор работ советских ученых по классической проективной геометрии за 1917—1966 годы.

Библиографий 7.

УДК 517.512

О ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ, НАИЛУЧШИМИ В ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ТОЧЕК. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 17.

В работе получены асимптотически точные оценки приближений на классах функций H_ω и H_{ω_1, ω_2} (соответственно на $KH^{(\alpha)}$ и $K_1K_2H^{(\alpha, \beta)}$), осуществляемых линейными процессами, построенными на базе тригонометрических полиномов, наилучших в заданной системе равноотстоящих точек. Библиографий 5.

УДК 517.514

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА S^p -ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. Лісевич Л. М. і Германюк І. М. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 22.

Рассматриваются некоторые свойства обобщенных производных функций в метрике Степанова

$$D_{S_e^p}\{f(x), g(x)\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \frac{1}{e} \int_x^{x+e} |f(t) - g(t)|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Определение. Функция $f'_s(x)$ называется S^p -производной функции $f(x)$, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} D_{S_e^p} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, f'_s(x) \right\} = 0.$$

Если функция $f(x)$ имеет S^p -производную, то $f(x)$ будем называть S^p -дифференцируемой. Доказаны следующие свойства S^p -дифференцируемых функций:

Свойство 1. Если функция $f(x)$ имеет S^p -ограниченную S^p -производную, то она S -равномерно непрерывна.

Свойство 2. Сумма S^p -дифференцируемых функций есть также S^p -дифференцируема функция.

Свойство 3. Если $f'_s(x)$ есть S^p -производная функции $f(x)$, а функция

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

имеет обыкновенную производную $f'_h(x)$, то

$$f'_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f'_s(t) dt.$$

УДК 517.514

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ
ДЛЯ S^p -ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ. Ко-
ванько О. С. і Лісевич Л. М. Вісник Львів-
ського ордену Леніна державного університету
ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 25.

Рассматриваются некоторые предельные соотношения для функций из класса $L_p(-\infty, +\infty)$, удовлетворяющих условию S^p -ограниченности.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и для произвольного числа $\tau > 0$ существует конечный предел

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_{x_n}^{x_n+\tau} [f(t+\tau) - f(t)] dt = A,$$

то

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} \int_{x_n}^{x_n+1} f(t) dt = A.$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$ со строго положительным интегралом удовлетворяет условиям теоремы 1 и для произвольного числа $\tau > 0$ существует положительный конечный предел

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{x_n}^{x_n+1} f(t+\tau) dt : \int_{x_n}^{x_n+1} f(t) dt \right\}^{\frac{1}{\tau}} = \sim A,$$

то

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{x_n}^{x_n+1} f(t) dt \right\}^{\frac{1}{x_n}} = \sim A.$$

Библиографий 1.

УДК 517.512

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ
ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
БОРА. Пригула Я. Г. Вісник Львівського орде-
на Леніна державного університету ім. Ів. Фран-
ка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 29.

В работе обобщаются известные признаки абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Бора, основанные на свойствах показателей Фурье и аргументов коэффициентов Фурье функции. Библиографий 2.

УДК 517.54

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КЛАССОВ РЯДОВ ЛОРА-
НА В МЕТОДАХ ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ ПО
МОДУЛЯМ. Чулик І. І. Вісник Львівського ор-
дена Леніна державного університету ім. Ів. Фран-
ка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 34.

Рассматриваются ряды Лорана функций одной комплексной переменной. Устанавливается более широкий класс рядов Лорана, для которых верны теоремы о локализации нулей по модулям. Библиографий 1.

УДК 517.55

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРАВИЛЬНЫХ ВЕРШИН ДИАГРАММ НЬЮТОНА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. Кардаш А. І. Вісник Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 37.

Устанавливается критерий существования правильных вершин диаграмм Ньютона целой рациональной функции двух комплексных переменных непосредственно через коэффициенты этой функции. Библиографий 1.

УДК 517.9 : 621.3.032.26

РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИЙ ЛИНЗ С НАРУШЕННОЙ ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ. Дорожовський Є. С. Вісник Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 40.

Рассматривается один из возможных методов расчета движения электронов в осесимметрическом пространстве электростатических линз с нарушенной осевой симметрией.

УДК 517.9 : 621.3.032.26

ОБ УТОЧНЕНИИ ОДНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОДОВ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ. Людкевич Й. В. Вісник Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 43.

Определение осесимметричного потенциала электронно-оптической системы сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. При приближенном решении этого уравнения неизвестная плотность представляется в виде кусочно-непрерывных функций с нелинейными параметрами, что значительно сокращает время расчета на ЭВМ. Указывается метод подбора нелинейных параметров. Библиографий 2.

УДК 517.946

НЕКОТОРЫЕ АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ. Іванчов М. І. Вісник Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 46.

В пространствах с весом рассматриваются оценки первых производных решений задачи Дирихле для эллиптических систем вида

$$a_{ij}(x, u) u_{x_i}^e x_j + a^e(x, u, u_x) = 0, \quad (e=1, \dots, N)$$

в неограниченных областях.

УДК 512.39

УСЛОВИЕ НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ В МЕТОДЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ ФУНКЦИЙ. Цегелик Г. Г. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 52.

В статье исследуется условие наилучшего выбора параметров в методе параметрической локализации нулей рядов Лорана (в частности, степенных рядов или многочленов), а также возможность с помощью параметров расширять области, в которых нет нулей, или сужать области, в которых есть определенное число нулей. Библиографий 3.

УДК 517.946

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА. Гу п а л о Г. С. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 57.

Рассмотрена обобщенная (в определенном смысле; РЖ Мат., 1963, 10Б237; 1967, 8Б291) задача Неймана для однородного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в ограниченной области n -мерного евклидова пространства с бесконечно дифференцируемой границей. Доказана теорема о представлении решения этой задачи, теорема единственности. Библиографий 6.

УДК 517.946

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА. Гу п а л о Г. С. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 59.

Пусть Ω — ограниченная область в E^n с бесконечно дифференцируемой границей, $\mathcal{M}$ — дифференциальный оператор второго порядка эллиптического типа с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в Ω . В области Ω ищется функция u , удовлетворяющая уравнению $\mathcal{M}u=0$, граничное значение которой (понимаемое в определенном смысле, РЖ Мат., 1963, 10Б237; 1967, 1Б160) является обобщенной функцией. Доказана теорема о представлении решения этой задачи, теорема единственности, необходимое и достаточное условие того, чтобы решение уравнения $\mathcal{M}u=0$ принимало обобщенные граничные значения.

УДК 517.55

ОБ ОБЛАСТЯХ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА И ЕГО МАЖОРАНТЫ НЬЮТОНА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. Кардаш А. І., Чулик І. І. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 62.

Рассматривается функция $f(z, w)$ двух комплексных переменных, степенной ряд которой абсолютно сходится в области D . Исследуется форма диаграммы Ньютона функции и область сходимости ее мажоранты Ньютона. Устанавливаются результаты:

- 1) диаграмма Ньютона функции — открытая выпуклая вниз поверхность.
- 2) области сходимости степенного ряда функции и ее мажоранты Ньютона совпадают. Библиографий 4.

УДК 513.812

ПЛОСКОСТИ И СФЕРЫ В КОНСТРУКТИВНЫХ ЗАДАЧАХ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО. Пилипович А. І. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 66.

Рассматриваются два класса конструктивных задач пространства Лобачевского, для разрешимости которых необходимо проводить плоскости, сферы, ориисферы и плоскости, сферы, гиперсферы (эквидистантные поверхности), используя такие комплексы инструментов: P, C, O (плоскограф, сферограф, ориисферограф) и P, C, G (плоскограф, сферограф, гиперсферограф). Доказывается теорема о том, что всякая конструктивная задача, разрешимая комплексами инструментов P, C, O или P, C, G , разрешима также и комплексом P, C (плоскограф, сферограф). Библиографий 3.

УДК 613.07

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПЕРФОКАРТ ДЛЯ ПРИЕМА ЗАЧЕТОВ (КОЛЛОКВИУМОВ). Буймола Г. Л., Владика М. И., Копистянский А. О. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 68.

В статье дается краткая характеристика методики приема зачетов и коллоквиумов с использованием перфокарт и дешифраторов. Приводится анализ результатов приема зачетов и коллоквиумов. Указывается на ряд преимуществ нового способа приема зачетов и коллоквиумов.

УДК 539.311

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ВПАЯННОЙ ИЗОТРОПНОЙ ШАЙБОЙ ПРИ НАЛИЧИИ РАЗРЕЗА НА СПАЕ. Гриліцький Д. В., Луцишин Р. М. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 70.

В работе исследуется упругое равновесие анизотропной пластинки с впаянной круговой изотропной шайбой и разрезом на линии спая под действием заданных напряжений на бесконечности.

В качестве числового примера исследуется напряженное состояние вдоль линии раздела материалов для случая ортотропной плоскости с абсолютно жесткой круговой шайбой.

УДК 539.311

ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНКИ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ ПРОКЛАДКОЙ. Луцишин Р. М. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 79.

В статье исследуется напряженное состояние ортотропной пластинки с впаянной круглой изотропной шайбой и абсолютно жесткой прокладкой на части линии спая. Предполагается, что прокладка и заданные напряжения на бесконечности симметричны относительно одного из главных направлений упругости пластинки. Определены функции напряжений в шайбе и в пластинке.

Работа проиллюстрирована графиками распределения напряжений вдоль линии раздела материалов для случаев одноосного и всестороннего растяжения пластинки. Рисунков 6. Библиографий 6.

УДК 539.311

ИЗГИБ БАЛКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ЦИЛИНДРОМ. Ліхачов В. О. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 85.

Решается контактная задача теории упругости о чистом изгибе изотропной балки с круговым отверстием, край которого подкреплён упругим цилиндром. Упругое равновесие пластинки описывается уравнениями плоской теории упругости, цилиндра — уравнениями пространственной теории упругости. В области контакта принимается равенство компонентов смещения и напряжения. Задача доведена до числового результата. Приведены графики. Рисунков 1. Библиографий 3.

УДК 539.385

К ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА КОЛЬЦЕВЫМ ШТАМПОМ. Грилицький Д. В., Рудницький В. Б. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 91.

В работе приводится приближенное решение осесимметричной задачи теории упругости об определении напряжений и перемещений в изотропном полупространстве, скручиваемом вследствие поворота около оси симметрии жесткого кольцевого штампа с плоским основанием, связанного с упругой средой с помощью сцепления. Рисунков 3. Библиографий 6.

УДК 539.311

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ. Мартинювич Т. Л. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 95.

В работе предложен один вариант двумерной теории несимметричной упругости анизотропной среды, отличный от варианта моментной теории типа Коссера. Выведены основные уравнения и граничные условия задачи в аналитических функциях соответствующих комплексных переменных. Библиографий 6.

УДК 539.311

ВЛИЯНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОСТИ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНЦЕНТРАЦИЮ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ОТВЕРСТИЙ. Мартинювич Т. Л., Ніщенко І. О. Вісник Львівського ордену Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 100.

Исследуется влияние несимметричности тензора напряжений на концентрацию напряжений около эллиптического, а также квадратного и треугольного с закругленными углами отверстий в плоской задаче. Рассматривается одноосное растяжение на бесконечности усилиями P , составляющими угол β с осью ox , упругой плоскости с вышеупомянутыми типами отверстий. Получены в замкнутом виде выражения для напряжений, приводятся графики распределения величины $\frac{\sigma_{\theta}}{P}$ вдоль контуров. Полученные результаты сравниваются с решениями аналогичных задач в постановках классической и моментной типа Коссера теорий упругости. Рисунков 3. Библиографий 6.

УДК 539.311

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ. Лунь Є. І. Вісник Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 107.

Задача о концентрации напряжений около кругового отверстия в цилиндрической оболочке рассматривается в постановке, предложенной Г. Н. Савиным. При этом используется разрешающая система уравнений, получаемая из основных уравнений уточненной теории оболочек типа Тимошенко, что дает возможность учитывать деформации поперечных сдвигов и удовлетворять пяти граничным условиям на контуре отверстия. Библиографий 6.

УДК 539.377

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ. Осів І. М. Вісник Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 111.

Решена статическая стационарная задача о распределении температурных напряжений в бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием, на границе которой задана кусочно-постоянная температура. Методом линейного сопряжения получены конечные выражения для напряжений. Как частные решения получены выражения для напряжений в случае бесконечной плоскости с круговым отверстием и плоскости с горизонтальной и соответственно вертикальной прямолинейной щелью. Рисунков 2. Библиографий 2.

УДК 539.311

К ВОПРОСУ ОБ ИЗГИБЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ. Прусов І. О., Хижняков О. В. Вісник Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969, стр. 114.

Пренебрегая напряжением σ_z сравнительно с другими компонентами напряжения, путем задания перемещений u , v , w в произвольных функциях получены основные уравнения изгиба анизотропных плит, позволяющие удовлетворять трем краевым условиям. Полученные соотношения преобразованы путем введения комплексных потенциалов. Библиографий 7.

67 коп.