УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Сингулярно збурені задачі досліджені у багатьох працях. Найбільше вивчений випадок звичайного примежового шару, найменше – ситуація, коли примежовий шар описується рівняннями у частинних похідних.

Розглянемо подібний випадок для псевдопараболічного рівняння. А саме, в області $\mathcal{D}=\{(x,t): 0\le x\le l, 0<t\le T\}$ маємо задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,t)u=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ u(x,0)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t)$, $f(x,t)$ – достатньо гладкі у $\mathcal{D}$ функції;

2/ $a(x,t)>0$ у $\mathcal{D}$.

За цих припущень існує єдиний класичний розв"язок задачі /1/–/2/ [4].

Побудуємо асимптотику до деякого порядку N розв"язку задачі /1/, /2/ за степенями малого параметра ε, при цьому використаємо метод примежового шару [1]. Асимптотичне розвинення шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\tau=t/\varepsilon$.

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у співвідношення /3/. Їх визначаємо стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ є розв"язками граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь / t входить як параметр/:

$$-\frac{\partial^2\bar{u}_i}{\partial x^2}+a(x,t)\bar{u}_i=f_i(x,t); \qquad /4/$$

$$\bar{u}_i(0,t)=0,\ \bar{u}_i(l,t)=0, \qquad /5/$$

де $f_0(x,t)\equiv 0,\ f_i(x,t)=-\left(\frac{\partial u_{i-1}}{\partial t}-\frac{\partial^3\bar{u}_{i-1}}{\partial x^2\partial t}\right)\ (i=1,\dots,N)$. Як бачимо, вони визначаються рекурентно. Існування та єдиність розв"язку задач /4/, /5/ за наших припущень випливає з праці [3].

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)\,(i=0,\dots,N)$ в околі $t=0$ є розв"язками змішаних задач:

$$\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}-\frac{\partial^3\Pi_i}{\partial x^2\partial\tau}-\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial x^2}+a(x,0)\Pi_i=g_i(x,\tau); \qquad /6/$$

$$\Pi_i(0,\tau)=0,\ \Pi_i(l,\tau)=0; \qquad /7/$$

$$\Pi_i(x,0)=-\bar{u}_i(x,0), \qquad /8/$$

де $g_0(x,\tau)\equiv 0$, $g_i(x,\tau)\ (i=1,\dots,N)$ легко виписуються явним чином і лінійно залежать від $\Pi_j(x,\tau)\ (j<i)$.

Функції $\Pi_i(x,\tau)(i=0,\dots,N)$ визначаємо рекурентно як розв"язки змішаних задач /6/–/8/ для псевдопараболічних рівнянь. Доведемо, що вони дійсно є функціями примежового шару, тобто експоненціально спадають при $\tau\to\infty$. Покажемо наявність відповідної оцінки тільки для функції $\Pi_0(x,\tau)$, оцінки для $\Pi_i(x,\tau)\,(i=1,\dots,N)$ одержуємо аналогічно.

Виходимо з тотожності

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\Pi_0^2-2\Pi_0\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2\right]+2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\Pi_0}{\partial\tau}\,\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}-\right. \qquad /9/$$
$$\left.-\Pi_0\cdot\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right]+2\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2+2a(x,0)\,\Pi_0^2=0.$$

Інтегрування /9/ по x від 0 до l з урахуванням граничних умов /7/ дає

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^l\left[\Pi_0^2-2\Pi_0\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2\right]dx+2\int_0^l\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2dx+ \qquad /10/$$
$$+2\int_0^l a(x,0)\Pi_0^2\,dx=0.$$

Звідси одержуємо диференціальну нерівність

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^l\left[\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2+\Pi_0^2\right]dx+2\alpha\int\limits_0^l\left[\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2+\Pi_0^2\right]dx\leq 0, \qquad /11/$$

де $\alpha=\min\left[1,\min\limits_{x\in[0,l]}a(x,0)\right]$.

Розв"язуючи диференціальну нерівність /11/, одержуємо

$$\int\limits_0^l\left[\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2+\Pi_0^2\right]dx\leq ce^{-2\alpha\tau}, \qquad /12/$$

де $c>0$ – константа, звідки, очевидно, випливає

$$\int\limits_0^l\Pi_0^2\,dx\leq ce^{-2\alpha\tau},\quad \int\limits_0^l\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2dx\leq ce^{-2\alpha\tau}. \qquad /13/$$

З цього і випливає потрібна оцінка

$$|\Pi_0(x,\tau)|\leq c_1e^{-\alpha\tau}, \qquad /14/$$

де c_1 – константа.

Застосування методу інтегралів енергії [2] дає

$$\|R_N\|_{L_2(\mathcal{D})}\leq K\varepsilon^{N+1}, \qquad /15/$$

де константа K не залежить від ε.

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Припустимо, що в області $\mathcal{D}$ виконуються умови /1/, /2/. Тоді розв"язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичне зображення /3/, де $\bar{u}_i(x,t)\ (i=0,\ldots,N)$ – розв"язок двоточкових задач /4/, /5/; функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)\ (i=0,\ldots,N)$ – розв"язки задач /6/–/8/; залишковий член допускає оцінку /15/.

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3–122. 2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 4. Bohm M., Showalter R.E. A nonliner pseudoparabolic diffusion equation // SIAM J. Math. Anal. 1985. Vol.16. P. 980-999.

Стаття надійшла до редколегії 18.01.93