УДК 517.946

В.В.Волошин, В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

У прямокутнику $\mathcal{D}:\{0<x<l,\ 0<t\le T\}$, $(0<l<\infty,\ 0<T<\infty)$ розглянемо задачу для системи інтегродиференціальних рівнянь з малим дійсним параметром $\varepsilon>0$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\varepsilon\Lambda(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+A(x,t)u(x,t)+\int_0^t B(x,\tau)u(x,\tau)d\tau=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u_i|_{x=0}=0,\ i=\overline{1,K},\quad u_i|_{x=l}=0,\ i=\overline{K+1,n}, \qquad /2/$$

$$u|_{t=0}=0, \qquad /3/$$

де $\Lambda(t)=diag\{\lambda_1(t),\lambda_2(t),\dots,\lambda_n(t)\}$, $A(x,t)$ – $n\times n$ матриця, $f(x,t)=colcn\{f_1(x,t), f_2(x,t),\dots,f_n(x,t)\}$, $B(x,t)$ – $n\times n$ матриця задані в $\bar{\mathcal{D}}$. Нехай у кожній точці $t\in[0,T]$ перші $K(0\le K\le n)$ з величин $\lambda_i(t)$ додатні, решта $n-K$ від"ємні.

Нехай $N\ge 1$ – задане ціле число і виконані такі умови:

1/ функції $a_{ij}(x,t), f_i(x,t), b_{ij}(x,t),\lambda_i(t)$ достатньо гладкі;

2/ умови узгодженості $f_i(0,0)=0,\ i=\overline{1,K}$, $f_i(l,0)=0,\ i=\overline{K+1,n}$.

Користуючись методом Вішика-Люстерніка [2], побудуємо асимптотичний розклад розв"язку задачі /1/–/3/ за малим параметром ε.

Зауважимо, що при довільному $\varepsilon>0$ задача однозначно розв"язальна [1].

Розв"язок шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i u^i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi^i(\xi,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q^i(\eta,t)+\varepsilon^{N+1}R_N, \qquad /4/$$

де $\xi=\dfrac{x}{\varepsilon}$, $\eta=\dfrac{l-x}{\varepsilon}$, функції $u^i(x,t),\Pi^i(\xi,t),Q^i(\eta,t), R_N$ визначаються з процедури, що наведена нижче.

Функції $u^i(x,t)\ (i=\overline{0,N})$ визначаємо з рівнянь, які знаходимо, якщо в систему /1/ підставляємо перший з рядів /4/ і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Отримуємо задачі

$$\frac{\partial u^i(x,t)}{\partial t} + A(x,t)\, u^i(x,t) + \int_0^t B(x,\tau)\, u^i(x,\tau)\, d\tau = F^i(x,t), \quad /5/$$

$$u^i\big|_{t=0} = 0, \qquad /6/$$

де $F^0(x,t) = f(x,t)$, $F^i(x,t) = -\Lambda(t)\dfrac{\partial u^{i-1}(x,t)}{\partial x}$ $(i=\overline{1,N})$.

Як відомо, задача /5/–/6/ для кожного i має єдиний розв"язок, який можна побудувати методом послідовних наближень.

Розв"язок потрібно підправити в околі $x=0$. Для цього служать функції $\Pi^i(\xi,t)$. Виконуємо заміну $\xi = x/\varepsilon$, розкладаємо $A(x,t)$ та $B(x,t)$ у скінченну стрічку Тейлора, підставляємо в однорідну систему /1/. Отримуємо задачі для визначення $\Pi^i(\xi,t)$:

$$\frac{\partial \Pi^i(\xi,t)}{\partial t} + \Lambda(t)\frac{\partial \Pi^i(\xi,t)}{\partial \xi} + A(0,t)\Pi^i(\xi,t) + \int_0^t B(0,\tau)\Pi^i(\xi,\tau)\, d\tau = \psi^i(\xi,t), \quad /7/$$

$$\Pi^i_s\big|_{\xi=0} = -u^i_s\big|_{x=0}, \quad s=\overline{1,K}, \qquad /8/$$

$$\Pi^i\big|_{t=0} = 0, \qquad /9/$$

де $\psi^0(\xi,t)=0$, $\psi^i(\xi,t)$ лінійно виражаються через $\Pi^j(\xi,t)$, $\dfrac{\partial \Pi^j(\xi,t)}{\partial \xi}$ та інтеграли від цих функцій $(j=\overline{0,i-1})$.

Якщо $\lambda = \min\limits_j \{\lambda_j(t)\}$, $j=\overline{1,K}$, то з огляду на скінченність області залежності для гіперболічних рівнянь $\Pi^i(\xi,t)$ $(i=\overline{0,N})$ не дорівнює нулю лише у граничній смузі F між $0t$ і крайньою правою характеристикою системи /7/, що виходить з точки $(0,0)$.

Аналогічно потрібно підправити розв"язок в околі $x=l$. Виконуємо заміну $\eta = \dfrac{l-x}{\varepsilon}$, розкладаємо $A(x,t), B(x,t)$ в скінченну стрічку Тейлора в околі $x=l$ і підставляємо в однорідну систему /1/.

Зрівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, отримаємо задачі для визначення $Q^i(\eta,t)$:

$$\frac{\partial Q^i(\eta,t)}{\partial t} + \Lambda(t)\frac{\partial Q^i(\eta,t)}{\partial \eta} + A(l,t)Q^i(\eta,t) + \int_0^t B(l,\tau)Q^i(\eta,\tau)\, d\tau = \psi^{*i}(\eta,t), \quad /10/$$

$$Q^i_s\big|_{\eta=0} = -u^i_s\big|_{x=l}, \quad s=\overline{K+1,n}, \qquad /11/$$

$$Q^i\big|_{t=0} = 0, \qquad /12/$$

де $\psi^{*0}(\eta,t)=0$, $\psi^{*i}(\eta,t)$ лінійно виражаються через $Q^j(\eta,t)$, $\dfrac{\partial Q^j}{\partial \eta}$ та інтеграли від цих функцій $(j=\overline{0,i-1})$.

З аналогічних міркувань, функції $Q^i(\eta,t)$ також не дорівнюють нулю лише у граничній смузі.

Для доведення асимптотичної коректності розкладу потрібно отримати оцінку залишкового члена R_N, що є розв"язком задачі

$$\frac{\partial R_N}{\partial t}+\varepsilon\Lambda(t)\frac{\partial R_N}{\partial x}+A(x,t)R_N+\int_0^t B(x,\tau)R_N(x,\tau)d\tau=F(x,t,\varepsilon), \qquad /13/$$

$$R_{N_i}\Big|_{x=0}=0,\ i=\overline{1,k},\quad R_{N_i}\Big|_{x=l}=0,\ i=\overline{k+1,n}, \qquad /14/$$

$$R_N\Big|_{t=0}=0, \qquad /15/$$

де $F(x,t,\varepsilon)$ отримується після підстановки /4/ в /1/, причому до кожного доданка /4/ застосовуємо оператор з урахуванням відповідного регуляризуючого перетворення.

Відповідну оцінку можна отримати, використовуючи метод інтегралів енергії [3]:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}}\sum_{i=1}^{n}R_{N_i}^2\,dxdt\le C\iint\limits_{\mathcal{D}}\sum_{i=1}^{n}F_i^2\,dxdt, \qquad /16/$$

де константа C не залежить від ε.

Таким чином, доведена така теорема.

Теорема. Нехай виконуються умови 1/, 2/. Тоді розв"язок задачі /1/-/3/ зображається у вигляді /4/, функції $\Pi^i(\xi,t)$ і $Q^i(\eta,t)$ типу примежового шару, що ліквідують нев"язку в околах $x=0,\ x=l$ відповідно, R_N задовольняє /16/.

Зауваження 1. Аналогічна асимптотика справедлива у випадку залежності Λ не тільки від t, а й від x, але у цьому випадку слід вимагати додаткових умов узгодження у точках $(0,0)$ і $(l,0)$.

Зауваження 2. Аналогічний випадок сингулярного збурення для гіперболічної системи першого порядку розглянутий у праці [4].

1. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Ученые зап. Латв. гос.ун-та. Т.20. № 3. С.87-104.1958. 2. Вишик М.И. Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. Т.12. № 5. С.3-122, 1957. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 4. Цымбал В.Н. Смешанная задача для гиперболической системы первого порядка с малым параметром // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1976. Т.4. С.7-11.

Стаття надійшла до редколегії 10.04.93