УДК 517.956

Г.І.Берегова, В.М.Кирилич

ГІПЕРБОЛІЧНА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА В КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ

В області $G := \{(x,t)\in \mathbb{R}^2 : a(t) < x < b(t),\ a(0) = b(0) = 0,\ a(t), b(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)\}$ розглянемо гіперболічну систему рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x,t;u) f_i(t), \quad i=\overline{1,n}; \qquad /1/$$

причому $\lambda_i(a(t),t) - a'(t) > 0, \quad i = \overline{1,p+q},$

$$\lambda_i(b(t),t) - b'(t) < 0, \quad i=\overline{p+1,n},\ t\in\mathbb{R}_+ \qquad /2/$$
$$0\le p\le n, \quad 0\le q\le n.$$

Тут крім функцій $u_i(x,t)$ невідомими вважаються також $f_i(t)(i=\overline{1,n})$. Для системи /1/ задаються граничні та додаткові умови:

$$u_i(a(t),t) = h_i^a(t), \quad i=\overline{1,p+q},$$
$$u_i(b(t),t) = h_i^b(t), \quad i=\overline{p+1,n}, \quad t\in\mathbb{R}_+; \qquad /3/$$
$$u_i(0,t) = \omega_i(t), \quad i=\overline{1,n}; \quad t\in\mathbb{R}_+. \qquad /4/$$

Припускаємо, що $\lambda_i(x,t)\in C^1(\mathbb{R}_+)\ (i=\overline{1,n})$, а $F_i, F_{ix}', F_{iu}' \in C(G_t\times\mathbb{R}^n), F_i(0,0;\omega(0))\ne 0\ (i=\overline{1,n})$. Звідси, зокрема, випливає, що $F_i(x,t;u)\ne 0$ для всіх $(x,t)\in G_\varepsilon$. Крім цього, вважаємо, що $h_i^a\ (i=\overline{1,p+q})$, $h_i^b\ (i=\overline{p+1,n})$, $\omega_i(i=\overline{1,n})\in C^1(G_t)$ і виконуються умови узгодження $h_i^a(0)=h_i^b(0)=\omega_i(0), \quad i=\overline{p+1,p+q}$.

Усі величини вважаються дійснозначними.

Для гіперболічних систем і рівнянь вивчено багато обернених задач. Докладний аналіз та огляд літератури містить, зокрема, праця [3]. Література з обернених гіперболічних задач у криволінійному секторі нам невідома.

Справедлива така теорема.

<u>Теорема.</u> Якщо виконуються згадані вище припущення, то задача /1/-/4/ має в G_ε єдиний класичний $(u\in C^1(G_\varepsilon), f\in C(\mathbb{R}_+))$ розв'язок.

Доводимо теорему за такою схемою [1, 2].

Через $\varphi_i(\tau;x,t)$ позначаємо розв"язок диференціального рівняння $d\xi/d\tau = \lambda_i(\xi,\tau)$ з умовою $\varphi_i(t;x,t)=x$ $(i=\overline{1,n})$. Припускаючи, що в системі /1/ функції $f_i(t)$ неперервно диференційовні та інтегруючи вздовж характеристик, приходимо до системи інтегрофункціональних рівнянь

$$u_i(x,t)=h_i(t_i(x,t))+\int_{t_i(x,t)}^{t} F_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u)\,f_i(\tau)\,d\tau, \qquad /5/$$

$$i=\overline{1,n},\quad (x,t)\in G_t,$$

де $t_i(x,t):=\min\{\tau;(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\in G_t\}$;

$$h_i(t_i(x,t))=\begin{cases} h_i^a(t_i(x,t)), & i=\overline{1,p+q},\\ h_i^b(t_i(x,t)), & i=\overline{p+1,n}. \end{cases} \qquad /6/$$

Враховуючи умови /4/, маємо

$$\omega_i(t)=h_i(t_i(0,t))+\int_{t_i(0,t)}^{t} F_i(\varphi_i(\tau;0,t),\tau;u)\,f_i(\tau)\,d\tau,\ i=\overline{1,n},\ t\in R_+. \qquad /7/$$

Вводимо функції $W_i(x,t)=\dfrac{\partial u_i}{\partial x}$ $(i=\overline{1,n})$.

Тоді $u_i(x,t)=h_i^a(t)+\int_{a(t)}^{x} W_i(\xi,t)\,d\xi$, $i=\overline{1,p+q}$, /8/

$$u_i(x,t)=h_i^b(t)+\int_{b(t)}^{x} W_i(\xi,t)\,d\xi,\quad i=\overline{p+1,n}.$$

Диференціюємо тепер /5/ по x, /7/ по t. У результаті з урахуванням /8/ маємо

$$W_i(x,t)=\{h_i^{a\prime}(t_i(x,t))-F_i(a(t_i(x,t)),t_i(x,t);h_1^a(t_i(x,t)),\dots,$$

$$h_{p+q}^a(t_i(x,t)),u_{p+q+1}(a(t_i(x,t)),t_i(x,t)),\dots,u_n(a(t_i(x,t)),$$

$$t_i(x,t)))\cdot f_i(t_i(x,t))\}\cdot t'_{ix}(x,t)+$$

$$+\int_{t_i(x,t)}^{t}\{F'_{ix}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))+$$

$$+F'_{iu}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))\cdot W_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\}\times \qquad /9/$$

$$\times\varphi'_{ix}(\tau;x,t)\,f_i(\tau)\,d\tau,\qquad i=\overline{1,p+q},$$

$$W_i(x,t)=\{h_i^{b\prime}(t_i(x,t))-F_i(b(t_i(x,t)),t_i(x,t);$$

$$u_1(b(t_i(x,t),t_i(x,t)),\dots,u_p(b(t_i(x,t),t_i(x,t)),$$

$$h^b_{p+1}(t_i(x,t)),\dots,h^b_n(t_i(x,t))\}\cdot t'_{i_x}(x,t)+$$

$$+\int_{t_i(x,t)}^{t}\{F'_{ix}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))+$$

$$+F'_{iu}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau);u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\times$$

$$\times W_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\}\cdot\varphi'_{ix}(\tau;x,t)f_i(\tau)d\tau,$$

$$i=\overline{p+1,n};$$

$$f_i(t)=\frac{1}{F_i(0,t;\omega(t))}\{F_i(a(t_i(0,t),t_i(0,t);u(a(t_i(0,t),t_i(0,t)))\times$$

$$\times t'_{i_t}(0,t)f_i(t_i(0,t))-\int_{t_i(0,t)}^{t}(F'_{ix}+F'_{iu}W_i(\varphi_i(\tau;0,t),\tau))\times$$

$$\times\varphi'_{i_t}(\tau;0,t)f_i(\tau)d\tau+\omega'_i(t)-h^a_i(t_i(0,t))\,t'_{i_t}(0,t)\}\qquad /10/$$

$$i=\overline{1,p+q};$$

$$f_i(t)=\frac{1}{F_i(0,t;\omega(t))}\{F_i(b(t_i(0,t),t_i(0,t);u(b(t_i(0,t),t_i(0,t)))\times$$

$$\times t'_{i_t}(0,t)f_i(t_i(0,t))-\int_{t_i(0,t)}^{t}(F'_{ix}+F'_{iu}W_i(\varphi_i(\tau;0,t),\tau))\times$$

$$\times\varphi'_{i_t}(\tau;0,t)f_i(\tau)d\tau+\omega'_i(t)-h^b_i(t_i(0,t))\cdot t'_{i_t}(0,t)\},\ i=\overline{p+1,n}.$$

Таким чином, для визначення функцій u_i, u'_{ix}, f_i ($i=\overline{1,n}$) одержуємо систему інтегрофункціональних рівнянь типу Вольтерра /5/, /9/–/10/, яка в G_ε розв"язується методом ітерацій [2].

1. К и р и л и ч В.М. Задача про визначення правої частини одновимірної гіперболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.36. С.92-97. 2. О р л о в с к и й Д.Г. К задаче определения правой части гиперболической системы // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19. № 8. С.137-146. 3. Р о м а н о в В.Г. Обратные задачи математической физики. М., 1984. 263 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.04.93