УДК 517.946

М.І.Іванчов

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

У даній праці для оберненої задачі визначення коефіцієнта температуропровідності з'ясована можливість задання як умови перевизначення нелокальної умови зі змінними коефіцієнтами.

В області $\mathcal{D}=\{(x,t): 0<x<h,\ 0<t<T\}$ розглянемо задачу знаходження пари функцій $\{a(t),\ u(x,t)\}$ з умов

$$u_t = a(t)u_{xx} \qquad (x,t)\in\mathcal{D}, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\leq x\leq h, \tag{2}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t), \qquad 0\leq t\leq T, \tag{3}$$

$$u(h,t)=\mu_2(t), \qquad 0\leq t\leq T, \tag{4}$$

$$\nu_1(t)u_x(0,t)-\nu_2(t)u_x(h,t)=\varkappa(t),\ 0\leq t\leq T, \tag{5}$$

де $a(t)$ – додатна і неперервна на $[0,T]$ функція, а $u(x,t)\in C^{2,1}(\mathcal{D})\cap C^{1,0}(\overline{\mathcal{D}})$ [1].

Припускаючи, що значення

$$u_x(h,t)=p(t) \tag{6}$$

відоме, з умови /5/ визначаємо

$$u_x(0,t)=(\nu_2(t)p(t)+\varkappa(t))\nu_1^{-1}(t). \tag{7}$$

Використовуючи функцію Гріна, знаходимо розв'язок задачі /1/, /2/, /6/, /7/, підставляємо його в умови /3/, /4/, звідки отримуємо систему рівнянь відносно $a(t)$ і $p(t)$:

$$\mu_1(t)+\mu_2(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^h\varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{a(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$
$$\times\frac{p(\tau)(\nu_1(\tau)-\nu_2(\tau))-\varkappa(\tau)}{\nu_1(\tau)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau, \tag{8}$$

$$\mu_1(t)-\mu_2(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^h\varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{a(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$
$$\times\frac{p(\tau)(\nu_1(\tau)+\nu_2(\tau))+\varkappa(\tau)}{\nu_1(\tau)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau. \tag{9}$$

Визначаючи з рівняння /9/ $p(t)$ і підставляючи її в /8/, шляхом диференціювання отримуємо рівняння відносно $a(t)$:

$$a(t)=\Big((1+\beta(t))\mu_1'(t)+(1-\beta(t))\mu_2'(t)\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^{h/2}(\varphi''(\xi)+\varphi''(h-\xi))\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\alpha(t)}\Big)d\xi-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\Big(\frac{\varkappa(\tau)}{\nu_1(\tau)+\nu_2(\tau)}\Big)'\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\Big)d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{\beta'(\tau)d\tau}{\sqrt{\alpha(\tau)(\alpha(t)-\alpha(\tau))}}\int_0^{h/2}(\varphi'(\xi)+\varphi'(h-\xi))\times$$

$$\times\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}-\frac{(\xi+mh)^2}{4\alpha(\tau)}\Big)d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\frac{\beta(\tau)a(\tau)d\tau}{\sqrt{\alpha^3(\tau)(\alpha(t)-\alpha(\tau))}}\int_0^{h/2}(\varphi''(\xi)-$$

$$-\varphi''(h-\xi))\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(\xi+mh)\exp\Big(-\frac{(\xi+mh)^2}{4\alpha(\tau)}-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\Big)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{\mu_2'(\sigma)-\mu_1'(\sigma)}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}d\sigma\int_\sigma^t\beta'(\tau)\sqrt{\frac{\alpha(\tau)-\alpha(\sigma)}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}-$$

$$-\frac{m^2h^2}{4(\alpha(\tau)-\alpha(\sigma))}\Big)d\tau+\frac{h^2}{4\pi}\int_0^t\frac{\mu_2'(\sigma)-\mu_1'(\sigma)}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}d\sigma\int_\sigma^t\frac{\beta(\tau)a(\tau)}{\sqrt{(\alpha(t)-\alpha(\tau))(\alpha(\tau)-\alpha(\sigma))}}\times$$

$$\times\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{n^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}+\frac{m^2}{\alpha(\tau)-\alpha(\sigma)}\Big)\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}-\frac{m^2h^2}{4(\alpha(\tau)-\alpha(\sigma))}\Big)d\tau\Big)^{-1}, \quad /10/$$

де $$\beta(t)=\frac{\nu_1(t)-\nu_2(t)}{\nu_1(t)+\nu_2(t)}. \quad /11/$$

Застосовуючи до рівняння /10/ принцип Шаудера, приходимо до існування розв"язку $a(t)$ рівняння /10/. Підставляючи його в рівняння /1/ і розв"язуючи задачу /1/-/4/, знаходимо $u(x,t)$. Отже, справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1/ $\varphi(x)\in C^2[0,h]$, $\mu_i(t)\in C^1[0,T]$, $\nu_i(t)\in C^1[0,T]$, $(i=1,2)$; $\varkappa(t)\in C^1[0,T]$;

2/ $(1+\beta(t))\mu_1'(t)+(1-\beta(t))\mu_2'(t)>0$, $\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\geq 0$,

$\beta(t)\geq 0$, $\beta'(t)\geq 0$, $\left(\dfrac{\varkappa(t)}{\nu_1(t)+\nu_2(t)}\right)'\leq 0$ на $[0,T]$;

$\varphi'(x)\geq 0$ на $[0,h]$; $\varphi''(x)+\varphi''(h-x)\geq 0$, $\varphi''(x)-\varphi''(h-x)\leq 0$

на $[0,h/2]$; $(1+\beta(t))\varphi''(x)+(1-\beta(t))\varphi''(h-x)\geq 0$ на $[0,h/2]\times[0,T]$;

3/ $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(h)=\mu_2(0)$, $\nu_1(0)\varphi'(0)-\nu_2(0)\varphi'(h)=\varkappa(0)$.

Тоді при досить малому $T>0$ існує хоча б один розв"язок задачі /1/-/5/.

Справедлива також теорема єдиності розв"язку задачі /1/-/5/.

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

$\varphi(x)\in C^2[0,h]$, $\mu_i(t),\nu_i(t)\in C^1[0,T]$, $(i=1,2)$, $\nu_1^2(t)+\nu_2^2(t)>0$ на $[0,T]$, $\nu_1(t)\mu_1'(t)+\nu_2(t)\mu_2'(t)\neq 0$ на $[0,T]$. Тоді задача /1/-/5/ не може мати більше як один розв"язок.

Доведення. Для різниці двох розв"язків $u_i(x,t),(i=1,2)$ задачі /1/-/5/ отримуємо:

$$v_t=a_1(t)v_{xx}+q(t)\omega(x,t),\quad (x,t)\in\mathcal{D}; \qquad /12/$$

$$v(x,0)=0,\quad 0\leq x\leq h; \qquad /13/$$

$$v(0,t)=0,\quad v(h,t)=0,\quad 0\leq t\leq T; \qquad /14/$$

$$\nu_1(t)v_x(0,t)-\nu_2(t)v_x(h,t)=0,\quad 0\leq t\leq T, \qquad /15/$$

де $q(t)=a_1(t)-a_2(t)$, $\omega(x,t)=u_{2xx}(x,t)$.

Розв"язуючи задачу /12/-/14/ і підставляючи її розв"язок в /15/, після деяких стандартних перетворень приходимо до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду відносно функції $q(t)$:

$$q(t)+\int_0^t K(t,\tau)q(\tau)d\tau=0 \qquad /16/$$

з неперервним ядром $K(t,\tau)$:

$$K(t,\tau)=\frac{a_1(t)}{\omega(0,t)+\nu(t)\omega(h,t)}\int_\tau^t\frac{d\sigma}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}\int_0^h\omega(\xi,\tau)\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\left(\frac{\xi+2nh}{(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{3/2}}\right.\right.-$$

$$-\frac{3a(\sigma)(\xi+2nh)}{2(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{5/2}}+\frac{a(\sigma)(\xi+2nh)^3}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{7/2}}\Bigg)\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)+\Bigg(\frac{-\nu'(\sigma)(\xi+(2n-1)h)}{(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{3/2}}+$$

$$+\frac{3a(\sigma)\nu(\sigma)(\xi+(2n-1)h)}{2(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{5/2}}-\frac{a(\sigma)\nu(\sigma)(\xi+(2n-1)h)^3}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{7/2}}\Bigg)\exp\left(\frac{(\xi+(2n-1)h)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)\Bigg)d\xi,$$

де $\nu(t)=\dfrac{\nu_2(t)}{\nu_1(t)}$, $\alpha(t)=\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau$.

З /16/ маємо, що $q(t)\equiv 0$ на $[0,T]$, а звідси і $v(x,t)\equiv 0$ в $\mathfrak{D}$. Теорема доведена.

Зауважимо, що в теоремі 2 з"ясована також єдиність розв"язку оберненої задачі знаходження невідомих функцій $\{q(t), v(x,t)\}$ з рівняння /12/ та умов /2/-/5/.

1. Л а д ы ж е н с к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 2. М и х л и н С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959.

Стаття надійшла до редколегії 17.02.93

УДК 517.957:519.642.8

М.М.Бокало, В.М.Флюд

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ В ПІДШИПНИКУ КОЧЕННЯ

Метою нашої публікації є описання математичної моделі нестаціонарного теплового поля, яке виникає в роликовому підшипнику внаслідок тертя між роликами й біговою доріжкою. Вважаємо, що внутрішня обойма підшипника нерухома, а зовнішня — рухається з постійною кутовою швидкістю ω та у фіксованому відносно внутрішньої обойми радіальному напрямі на зовнішню обойму діє постійна сила F. Крім цього, припускаємо, що підшипник охолоджується потоком повітря /рідини/. Обмежимось розглядом розподілу температури по перетині внутрішньої обойми площиною, яка пролягає через серединне коло бігової доріжки. У полярній системі координат даний процес моделюється таким чином: знайти функцію $u(r,\varphi,t)$, яка є розв"язком рівняння