цього, розраховане нестаціонарне теплове поле в обоймі роликового підшипника опори шарошки бурового долота. Отримані результати узгоджуються з експериментальними даними.

I. К у т а т е л а д з е С.С. Основы теории теплообмена. М., 1979. 2. С а м а р с к и й А.А. Теория разностных схем. М., 1982. 3. Я р ы ш е в М.И. Теоретические основы измерения нестационарных процессов. М., 1976.

Стаття надійшла до редколегії I7.03.93

УДК 5I7.947

Л.І.Комарницька

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ, НЕ РОЗВ"ЯЗАНОГО ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ

У деяких задачах гідродинаміки виникають лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними, не розв"язані відносно старшої похідної по часу:

$$D_t^l L_0(x;D_x)u+\sum_{k=0}^{l-1} D_t^k L_{l-k}(x;D_x)u=f(t,x). \qquad /1/$$

Велике прикладне значення цих рівнянь пояснює численність досліджень з питань постановок крайових задач, якісного вивчення розв"язків, спектральних властивостей операторів L_0 . Зокрема, у праці [4] розглянуті змішані крайові задачі для рівнянь вигляду /1/, де $L_0(x;D_x)$ – еліптичний оператор порядку $2m$ відносно змінних $x=(x_1,\dots,x_p)$.

У даній статті досліджується задача з нелокальними умовами по часу для рівняння вигляду /1/ зі змінними по x коефіцієнтами у випадку однієї просторової змінної. Тут продовжені дослідження, розпочаті у праці [2].

1. Розглянемо в області $Q=[0,T]\times G, G=[0,\pi]$ задачу

$$L(u)\equiv\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathcal{L}^m u+\sum_{\substack{\beta\le m\\ l\le n-1}} a_{\beta l}\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathcal{L}^\beta u=f(t,x), \qquad /2/$$

$$M_r(u)\equiv\sum_{\substack{\beta\le m\\ l\le n-1}} A^r_{\beta l}\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathcal{L}^\beta u\Big|_{t=0}-\mu\sum_{\substack{\beta\le m\\ l\le n-1}} A^r_{\beta l}\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathcal{L}^\beta u\Big|_{t=T}=0\ (r=\overline{1,n}), \qquad /3/$$

$$\mathcal{L}^i u\big|_{x=0}=\mathcal{L}^i u\big|_{x=\pi}=0\quad (i=\overline{0,m-1}), \qquad /4/$$

де $a_{\beta l}, A^{\tau}_{\beta l} \in \mathbb{R}$, $a_{m,0} \neq 0$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$\mathcal{L} \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + q(x)$, $\mathcal{L}^0 u \equiv u$, $\mathcal{L}^i u = \mathcal{L}\mathcal{L}^{i-1} u$,

функції $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ – достатньо гладкі на $[0, \pi]$.

Розв"язок задачі шукаємо в гільбертовому просторі $C^n([0,T], W_2^{2m}(G))$ $(m,n \in \mathbb{Z}_+, n \geq 2)$ функцій $u(t,x)$ таких, що функції $\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}$ $(j = \overline{0,n})$ для кожного $t \in [0,T]$ належать простору $W_2^{2m}(G)$ і неперервні по t в нормі $W_2^{2m}(G)$.

Норма в просторі $C^n([0,T], W_2^s(G))$ задається формулою

$$\|u(t,x)\|^2_{C^n([0,T], W_2^s(G))} = \int_0^T \sum_{j=0}^{n} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} \right\|^2_{W_2^s(G)} dt. \qquad /5/$$

При $s = 2m$ шуканий розв"язок буде розв"язком майже всюди, а при $s \geq 2m+1$, згідно з теоремою вкладення Соболева, – класичним.

2. Розв"язок задачі /2/–/4/ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \qquad /6/$$

де $X_k(x)$ – власні функції задачі Штурма–Ліувілля:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(p(x)X'(x)\right) + q(x)X(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad /7/$$

Зауважимо, що згідно з лемою [1, розд. 5], $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора $\mathcal{L}$.

Відомо, що всі власні значення λ_k задачі /7/ дійсні, різні і невід"ємні, а власні функції $\{X_k(x)\}$ утворюють ортогональну систему, яка є повною в просторі $L_2[0,\pi]$, причому справедливі оцінки

$$d_1 k^2 \leq \lambda_k \leq d_2 k^2 \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad /8/$$

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} \left| X_k^{(j)}(x) \right| \leq \tilde{c}_j k^j \qquad (j = \overline{0,2m}), \qquad /9/$$

де $d_1, d_2, \tilde{c}_j$ – додатні сталі.

Кожна з функцій $u_k(t)$ $(k \in \mathbb{N})$ визначається як розв"язок задачі

$$L_k(u_k) \equiv \lambda_k^m u_k^{(n)}(t) + \sum_{\substack{\beta \leq m \\ l \leq n-1}} a_{\beta l} \lambda_k^{\beta} u_k^{(l)}(t) = f_k(t), \qquad /10/$$

$$M_{k\tau}(u_k) \equiv \sum_{\substack{\beta \leq m \\ l \leq n-1}} A^{\tau}_{\beta l} \lambda_k^{\beta} \left[u_k^{(l)}(0) - \mu u_k^{(l)}(T)\right] = 0 \quad (\tau = \overline{1,n}), \qquad /11/$$

де $f_k(t) = \int_0^{\pi} f(t,x) X_k(x)\, dx$.

Припустимо, що корені $\nu_j(\lambda_k)(j=\overline{1,n})$ характеристичного рівняння

$$p(\nu) \equiv \nu^n + \sum_{\substack{\beta\le m\\ l\le n-1}} a_{\beta l} \frac{\lambda_k^\beta}{\lambda_k^m} \nu^l = 0 \qquad /12/$$

попарно різні і не дорівнюють нулю. Зауважимо, що $|\nu_j(\lambda_k)|\le C(j=\overline{1,n})$, де стала C не залежить від k

Для кожного $k\in N$ однорідне рівняння

$$L_k(u_k)=0 \qquad /13/$$

має фундаментальну систему розв"язків

$$u_{kj}(t) = e^{\nu_j(\lambda_k)t} \quad (j=\overline{1,n};\ k\in N).$$

Розв"язок задачі /13/-/11/ має вигляд

$$u_k(t)=\sum_{j=1}^{n} C_j(k) e^{\nu_j(\lambda_k)t} \quad (k\in N), \qquad /14/$$

де сталі $C_j(k)$ визначаються зі системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(k) \sum_{\substack{\beta\le m\\ l\le n-1}} A_{\beta l}^{r} \lambda_k^\beta \nu_j^l(\lambda_k)\ (1-\mu e^{\nu_j(\lambda_k)T})=0 \ (r=\overline{1,n}), \qquad /15/$$

визначник якої

$$\Delta(\lambda_k)=A(\lambda_k)\prod_{j=1}^{n}(1-\mu e^{\nu_j(\lambda_k)T})\prod_{n\ge i>j\ge 1}(\nu_i(\lambda_k)-\nu_j(\lambda_k)), \qquad /16/$$

$$A(\lambda_k)=\det\Big\| \sum_{\beta\le m} A_{\beta l}^{r} \lambda_k^\beta \Big\|_{\substack{r=\overline{1,n}\\ l=\overline{0,n-1}}}.$$

На основі попереднього згаданого і теореми про єдиність розвинення функції в ряд Фур"є отримаємо твердження.

<u>Теорема 1.</u> Для єдиності розв"язку задачі /2/-/4/ в просторі $C^n([0,T],W_2^{2m}(G))$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\Delta(\lambda_k)\neq 0, \quad k\in N. \qquad /17/$$

Доведення аналогічне доведенню теореми с.3 [3, розд. 2].

3. Розглянемо питання про існування розв"язку задачі /2/-/4/ з простору $C^n([0,T],W_2^{2m}(G))$. Нехай виконується умова /17/. Тоді для кожного $\lambda_k\ (k\in N)$ існує функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі /13/-/11/, за допомогою якої розв"язок задачі /10/-/11/ зображається у вигляді

$$u_k(t)=\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau. \qquad /18/$$

У квадраті $K_T=\{(t,\tau):\ 0\le t;\ \tau\le T\}$ крім сторін $\tau=0$ і $\tau=T$ функція $G_k(t,\tau)$ визначається формулою

$$G_K(t,\tau)=g_K(t,\tau)+\frac{1}{2(n-1)A(\lambda_K)}\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta\le m}(-1)^{r+s}\times$$

$$\times A_{\beta l}^{r}\lambda_K^{\beta}\nu_\alpha^l(\lambda_K)e^{\nu_\gamma(\lambda_K)t-\nu_\alpha(\lambda_K)\tau}A_{r,s}(\lambda_K)S_{n-s}[\nu_\gamma(\lambda_K)]\times$$

$$\times(1+\mu e^{\nu_\alpha(\lambda_K)T})(1-\mu e^{\nu_\gamma(\lambda_K)T})^{-1}\prod_{\substack{j=1\\j\ne\alpha}}^{n}(\nu_j(\lambda_K)-\nu_\alpha(\lambda_K))^{-1}\times$$

$$\times\prod_{\substack{j=1\\j\ne\gamma}}^{n}(\nu_j(\lambda_K)-\nu_\gamma(\lambda_K))^{-1}, \qquad /19/$$

де $A_{r,s}(\lambda_K)$ – визначник, отриманий з визначника $A(\lambda_K)$ викреслюванням r-го рядка і s-го стовпця; $S_{n-s}[\nu_\gamma(\lambda_K)]$ – сума всеможливих добутків чисел $\nu_1(\lambda_K),\dots,\nu_{\gamma-1}(\lambda_K),\ \nu_{\gamma+1}(\lambda_K),\dots,\nu_n(\lambda_K)$, взятих у кількості $n-s$ штук; $S_0[\nu_\gamma(\lambda_K)]\equiv 1$;

$$g_K(t,\tau)=\frac{sgn(t-\tau)}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{n-1}e^{\nu_\alpha(\lambda_K)(t-\tau)}\prod_{\substack{j=1\\j\ne\alpha}}^{n}(\nu_j(\lambda_K)-\nu_\alpha(\lambda_K))^{-1}$$

На сторонах $\tau=0$ $(\tau=T)$ квадрата K_T функція $G_K(t,\tau)$ дооэначується за неперервністю справа /зліва/.

<u>Теорема 2.</u> Нехай існують сталі $M_i>0$ і $\gamma_i\in\mathbb{N}$, $i=1,2,3$ такі, що для всіх /крім скінченного числа/ значень λ_K $(k\in\mathbb{N})$ виконуються нерівності

$$|A(\lambda_k)|\ge M_1\lambda_K^{-\gamma_1-\varepsilon/8}, \qquad /20/$$

$$|1-\mu e^{\nu_\alpha(\lambda_K)T}|\ge M_2\lambda_K^{-\gamma_2-\varepsilon/8}\quad(\alpha=\overline{1,n}), \qquad /21/$$

$$\prod_{\substack{j=1\\j\ne\alpha}}^{n}|\nu_j(\lambda_K)-\nu_\alpha(\lambda_K)|\ge M_3\lambda_K^{-\gamma_3-\varepsilon/8}\quad(\alpha=\overline{1,n}),\ 0<\varepsilon<1, \qquad /22/$$

і нехай $p(x)\in C^{2\psi-1}[0,\pi]$, $q(x)\in C^{2\psi-2}[0,\pi]$, $f(t,x)\in C^0([0,T],W_2^{2\psi}(G))$ $(\psi=m+mn+\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_3+1)$ задовольняє умови

$$\mathcal{L}^i f|_{x=0}=\mathcal{L}^i f|_{x=\pi}=0\quad(i=\overline{0,\psi-1}). \qquad /23/$$

Тоді існує розв"язок задачі /2/-/4/, який належить простору $C^n([0,T],W_2^{2m}(G))$ і неперервно залежить від $f(t,x)$.

<u>Доведення.</u> Розв"язок задачі /2/-/4/ формально зображається у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T G_K(t,\tau)f_K(\tau)d\tau X_K(x). \qquad /24/$$

Якщо $f(t,x)$ задовольняє умови теореми, то

$$\max_{0\le t\le T}|f_K(t)|\le\frac{M_4}{\lambda_K^{\psi}}\|f(t,x)\|_{C^0([0,T],W_2^{2\psi}(G))}. \qquad /25/$$

З оцінок /8/, /9/, /20/–/22/, /25/ і формул /I8/, /I9/, /24/ випливає оцінка для норми функції $u(t,x)$:

$$\|u(t,x)\|_{C^n([0,T],W_2^{2m}(G))} \leq T\cdot C(n)\cdot M_4 \|f(t,x)\|_{C^0([0,T],W_2^{2\psi}(G))} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2+\varepsilon}. \quad /26/$$

З нерівності /26/ випливає доведення теореми.

4. З'ясуємо, коли виконуються оцінки /20/–/22/. Розглянемо нерівність /20/. Визначник $A(\lambda_k)$ є поліномом степеня не вище mn відносно λ_k, який можна зобразити у вигляді

$$A(\lambda_k) = \sum_{j \leq mn} A_j \lambda_k^j, \quad /27/$$

де кожний з коефіцієнтів A_j є сумою добутків, складених з коефіцієнтів $A_{\beta l}^{z}$ в умовах /3/.

<u>Теорема 3.</u> Для майже всіх /відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{mn+1}$/ векторів $(A_0, A_1, \dots, A_{mn})$ нерівність /20/ виконується при $\gamma_1 \geq 1$ для всіх /крім скінченного числа/ значень λ_k.

<u>Доведення.</u> Розрізнятимемо два випадки: $A_0 \neq 0$ і $A_0 = A_1 = \dots = A_p = 0 \; (0 \leq p \leq mn-1)$.

У першому випадку доведення аналогічне доведенню теореми 4.4 [3, розд. 2], у другому – доведення випливає з теореми 2.4 [3, розд. I].

Позначимо через a вектор, компонентами якого є коефіцієнти $a_{\beta 0}$ рівняння /I2/, тобто $a = (a_{m,0}, a_{m-1,0}, \dots, a_{0,0})$.

<u>Теорема 4.</u> Для майже всіх /відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^2$/ векторів $(\ln|\mu|, T)$ або $\left(\frac{\varphi}{\pi}, \frac{T}{\pi}\right)$, де $\varphi = \arg \mu$, або для майже всіх /відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{m+1}$/ векторів a нерівності /2I/ виконуються при $\gamma_2 \geq 1$ для всіх значень λ_k ($\lambda_k > \mathcal{K}$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\varphi, T, \ln|\mu|, a_{\beta 0})$).

<u>Доведення.</u> Позначимо $a_\alpha(\lambda_k) = \mathrm{Re}\, \nu_\alpha(\lambda_k)$, $b_\alpha(\lambda_k) = \mathrm{Im}\, \nu_\alpha(\lambda_k)$. Оцінюючи ліву частину нерівності /2I/, отримуємо

$$\begin{aligned} |1-\mu e^{\nu_\alpha(\lambda_k)T}| &= |1-|\mu| e^{a_\alpha(\lambda_k)T}\cos(\varphi + b_\alpha(\lambda_k)T) - i|\mu| e^{a_\alpha(\lambda_k)T}\sin(\varphi + b_\alpha(\lambda_k)T)| = \\ &= \sqrt{1-2|\mu| e^{a_\alpha(\lambda_k)T}\cos(\varphi+b_\alpha(\lambda_k)T)+|\mu|^2 e^{2a_\alpha(\lambda_k)T}} > |1-|\mu| e^{a_\alpha(\lambda_k)T}| > \quad /28/ \\ &> C_1 |\ln|\mu| + a_\alpha(\lambda_k)T|, \quad C_1 = \max\{1; e^{-CT+\ln|\mu|}\}. \end{aligned}$$

Якщо в /28/ $a_\alpha(\lambda_k) \neq 0$, то доведення теореми аналогічне доведенню теореми 4.4 [3, розд. 2] при $|\mu| \neq 1$ або теореми 2.6 [3, розд. 3] при $|\mu| = 1$.

Якщо ж в /28/ $a_\alpha(\lambda_k) = 0$, $|\mu| = 1$, то враховуючи, що $b_\alpha(\lambda_k) \neq 0$, маємо

$$|1-\mu e^{\nu_\alpha(\lambda_k)T}| > |\sin(\varphi + b_\alpha(\lambda_k)T)| \geq 2\left|\frac{\varphi + b_\alpha(\lambda_k)T}{\pi} - d(\lambda_k)\right|, \quad /29/$$

де $d(\lambda_K)\in \mathbb{Z}$ задовольняє нерівність $\left|\frac{\varphi+\theta_\alpha(\lambda_K)T}{\pi}-d(\lambda_K)\right|\le\frac{1}{2}$. Далі доведення аналогічне доведенню теореми 4.4 [3, розд. 2] при $\mu\neq\pm 1$ або теореми 2.6 [3, розд. 3] при $\mu=\pm 1$.

В усіх інших випадках $|1-\mu e^{\nu_\alpha(\lambda_K)T}|\ge K>0$.

Розглянемо нерівність /22/. Для дискримінанта $\mathcal{D}(P)$ характеристичного многочлена

$$P(\nu)=\nu^n+\sum_{i=0}^{n-1}\nu^i p_i(\lambda_K, a_{\beta i})$$

Можливі два наступних зображення:

$$\mathcal{D}(P)=\prod_{n\ge\alpha>\beta\ge 1}[\nu_\alpha(\lambda_K)-\nu_\beta(\lambda_K)]^2, \qquad /30/$$

$$\mathcal{D}(P)=\pm n^n p_0^{n-1}+F, \qquad /31/$$

де p_0 лінійно залежить від $a_{m,0}$, F містить степені p_0 менші, ніж $n-1$.

З формули /31/ для кожного $\lambda_K (K\in\mathbb{N})$ маємо

$$\left|\frac{\partial^{n-1}\mathcal{D}(P)}{\partial a_{m,0}^{n-1}}\right|=n^n(n-1)!\ge 1. \qquad /32/$$

З нерівності /32/ і лем 2.1 і 2.2 [3 розд. 1] випливає, що для майже всіх /відносно міри Лебега/ чисел $a_{m,0}$ справедлива оцінка

$$|\mathcal{D}(P)|\ge C_1\lambda_K^{-(n-1)-\varepsilon} \quad (0<\varepsilon<1) \qquad /33/$$

для всіх /крім скінченного числа/ значень λ_K

З формули /30/, оцінки /33/ і нерівності

$$|\nu_\alpha(\lambda_K)-\nu_\beta(\lambda_K)|\le C_2 \quad (\alpha,\beta=\overline{1,n};\ \alpha\neq\beta)$$

випливає наступна теорема.

Теорема 5. Для майже всіх /відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$ / чисел $a_{m,0}$ нерівності /22/ виконуються при $\gamma_3\ge(n-1)/2$ для всіх /крім скінченного числа/ значень $\lambda_K (K\in\mathbb{N})$.

Зауваження. 1. Результати роботи переносяться на випадок, коли корені рівняння /12/ кратні. 2. Результати роботи переносяться на випадок багатьох просторових змінних, коли $\mathcal{L}\equiv -div(k(x)\nabla)+a(x)$.

1. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. М., 1971. 512 с. 2. К о м а р н и ц ь к а Л.І., П т а ш н и к Б.Й. Задача з нелокальними умовами для диференціального рівняння з частинними похідними, яке не розв"язане відносно старшої похідної по часу // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями.

Чернівці, 1990. С.86-95. 3. П т а ш н и к Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 264 с. 4. У с п е н с к и й С.В., Д е м и д е н к о Г.В. О смешанных краевых задачах для одного класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной // Дифференц. уравнения с частн. производными. // Тр. семинара акад. С.Л.Соболева. Новосибирск, 1980. № 2. С.92-115.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.93

УДК 517.956.47

Г.П.Лопушанська, А.І.Сошко

ПРО ЗАДАЧУ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ

Нехай $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – задані функції з $L_{1,loc}(R_+)$ [1]. Розглянемо задачу знаходження регулярного розв"язку $u(x,t)$ рівняння

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad /1/$$

в області $\Omega = \{(x,t) : x \in (h;0), t>0\}$, який задовольняє умови

$$u(0,t)=\alpha(t),\ u(h,t)=\beta(t),\ u_x(0,t)=\gamma(t), \qquad /2/$$

і невідомих функцій $\varphi(x)$, $\omega(t)$ таких, що

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_x(h,t)=\omega(t). \qquad /3/$$

Як у праці [2], розв"язком задачі /1/-/3/ називаємо таку функцію $u(x,t)$, що $\tilde{u}(x,t)=\begin{cases}u(x,t), (x,t)\in\Omega\\ 0, (x,t)\bar{\in}\Omega\end{cases}$ задовольняє у просторі $D'(R^2)$ рівняння

$$\tilde{u}_t - a^2\tilde{u}_{xx} = F(x,t), \qquad /4/$$

де $F(x,t)=\theta(-x)\theta(x-h)\varphi(x)\cdot\delta(t)+a^2\theta(t)[\alpha(t)\cdot\delta'(x)-$
$-\beta(t)\delta'(x-h)+\gamma(t)\cdot\delta(x)-\omega(t)\cdot\delta(x-h)]$,

а невідомі функції визначаємо з умови $\tilde{u}=0$ поза Ω.

Згідно з [1], узагальнена функція

$$\tilde{u}(x,t)=\mathcal{E}(x,t) * F(x,t) \qquad /5/$$

є єдиним у просторі $D'_+(R^2)$ узагальнених функцій, що дорівнюють нулю при $t<0$, розв"язком рівняння /4/ /тут $\mathcal{E}(x,t)$ – фунда-