Чернівці, 1990. С.86-95. 3. П т а ш н и к Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 264 с. 4. У с п е н с к и й С.В., Д е м и д е н к о Г.В. О смешанных краевых задачах для одного класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной // Дифференц. уравнения с частн. производными // Тр. семинара акад. С.Л.Соболева. Новосибирск, 1980. № 2. С.92-115.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.93

УДК 517.956.47

Г.П.Лопушанська, А.І.Сошко

ПРО ЗАДАЧУ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ

Нехай $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – задані функції з $L_{1,loc}(R_+)$ [1]. Розглянемо задачу знаходження регулярного розв"язку $u(x,t)$ рівняння

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad /1/$$

в області $\Omega = \{(x,t): x\in(h;0),\, t>0\}$, який задовольняє умови

$$u(0,t)=\alpha(t),\ u(h,t)=\beta(t),\ u_x(0,t)=\gamma(t), \qquad /2/$$

і невідомих функцій $\varphi(x)$, $\omega(t)$ таких, що

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_x(h,t)=\omega(t). \qquad /3/$$

Як у праці [2], розв"язком задачі /1/-/3/ називаємо таку функцію $u(x,t)$, що $\tilde{u}(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & (x,t)\in\Omega\\ 0, & (x,t)\notin\Omega\end{cases}$ задовольняє у просторі $D'(R^2)$ рівняння

$$\tilde{u}_t - a^2\tilde{u}_{xx} = F(x,t), \qquad /4/$$

де $F(x,t)=\theta(-x)\theta(x-h)\varphi(x)\cdot\delta(t)+a^2\theta(t)[\alpha(t)\cdot\delta'(x)-$
$-\beta(t)\delta'(x-h)+\gamma(t)\cdot\delta(x)-\omega(t)\cdot\delta(x-h)]$,

а невідомі функції визначаємо з умови $\tilde{u}=0$ поза Ω.

Згідно з [1], узагальнена функція

$$\tilde{u}(x,t)=\mathcal{E}(x,t) * F(x,t) \qquad /5/$$

є єдиним у просторі $D'_+(R^2)$ узагальнених функцій, що дорівнюють нулю при $t<0$, розв"язком рівняння /4/ /тут $\mathcal{E}(x,t)$ – фундаментальна функція оператора $\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$. При $\alpha,\beta,\gamma,\omega\in L_{1,loc}(R_+)$ і $\varphi(x)$ обмеженій або із $L_2(h;0)$ функція /5/ інтегрована у кожній скінченній області $(h;0)\times[t_1;t_2]$ і має вигляд

$$\tilde{u}(x,t)=a^2\int_0^t[\alpha(\tau)\mathcal{E}_x(x,t-\tau)-\beta(\tau)\mathcal{E}_x(x-h,t-\tau)+\gamma(\tau)\mathcal{E}(x,t-\tau)-\omega(\tau)\mathcal{E}(x-h,t-\tau)]d\tau+\int_h^0\varphi(\xi)\mathcal{E}(x-\xi,t)d\xi. \quad /6/$$

Застосовуємо умову $\tilde{u}(x,t)=0$ при $x<h$ та $x>0$. Із єдиності розв"язків основних граничних задач для рівняння /I/ в областях $(-\infty;h)\times(0;+\infty)$ та $(0;+\infty)\times(0;+\infty)$ випливає, що ця умова рівносильна тому, що

$$\lim_{x\to h-}\tilde{u}(x,t)=\lim_{x\to 0+}\tilde{u}(x,t)=0,\ \lim_{t\to 0+}\tilde{u}(x,t)=0,\ x<h,x>0.$$

Використовуючи властивості одновимірних параболічних потенціалів, отримуємо систему інтегральних рівнянь I-го роду для знаходження невідомих $\varphi(x)$ та $\omega(t)$:

$$\frac{1}{a^2}\int_h^0\varphi(\xi)\mathcal{E}(-\xi,t)d\xi-\int_0^t\omega(\tau)\mathcal{E}(-h;t-\tau)d\tau=\frac{1}{2a^2}\alpha(t)+\int_0^t[\beta(\tau)\mathcal{E}_x(-h,t-\tau)-\gamma(\tau)\mathcal{E}(0,t-\tau)]d\tau,$$

$$\frac{1}{a^2}\int_h^0\varphi(\xi)\mathcal{E}(h-\xi,t)d\xi-\int_0^t\omega(\tau)\mathcal{E}(0,t-\tau)d\tau=\frac{1}{2a^2}\beta(t)-\int_0^t[\alpha(\tau)\mathcal{E}_x(h,t-\tau)-\gamma(\tau)\mathcal{E}(h,t-\tau)]d\tau.$$

Якщо зробити перетворення Лапласа за змінною t, вважаючи, що $\alpha(t)\doteqdot A(p),\ \beta(t)\doteqdot B(p),\ \gamma(t)\doteqdot \Gamma(p),\ \omega(t)\doteqdot M(p)$, то отримуємо

$$-\frac{1}{a^2}\int_h^0\varphi(\xi)e^{-(\xi-h)\frac{\sqrt{p}}{a}}d\xi+M(p)=$$

$$=(A(p)e^{-\frac{|h|\sqrt{p}}{a}}-B(p))\frac{\sqrt{p}}{a}+\Gamma(p)e^{-\frac{|h|\sqrt{p}}{a}}, \quad /7/$$

$$-\frac{1}{a^2}\int_h^0\varphi(\xi)e^{(\xi-h)\frac{\sqrt{p}}{a}}d\xi+M(p)=(-A(p)\frac{\sqrt{p}}{a}+\Gamma(p)e^{-\frac{h\sqrt{p}}{a}}+B(p)\frac{\sqrt{p}}{a},$$

а звідси

$$\frac{1}{a\sqrt{p}}\int_h^0\varphi(\xi)\,sh\frac{\sqrt{p}}{a}(\xi-h)d\xi=A\,ch\frac{\sqrt{p}|h|}{a}-B-\frac{a}{\sqrt{p}}\Gamma\cdot sh\frac{\sqrt{p}}{a}|h|. \quad /8/$$

Нехай $\frac{\sqrt{p}}{a}|h|=b+k\pi i,\ b>0,\ i=\sqrt{-1}$. Функції $\omega_k(\xi)=$ $=\mathrm{Im}\frac{a}{\sqrt{p}}sh\frac{\sqrt{p}}{a}(\xi-h)\Big|_{\frac{\sqrt{p}}{a}=\frac{b+k\pi i}{|h|}}=\frac{1}{b^2+k^2\pi^2}[b\,ch\frac{b(\xi-h)}{|h|}\sin\frac{k\pi(\xi-h)}{|h|}-k\pi\,sh\frac{b(\xi-h)}{|h|}\cos\frac{k\pi(\xi-h)}{|h|}]$ утворюють лінійно незалежну в $L_2(h;0)$ систему. Будуємо за нею ортонормовану систему

$$\psi_K(\xi)=\sum_{l=1}^{K} A_{Kl}\,\omega_l(\xi), \quad \omega_K(\xi)=\sum_{l=1}^{K} B_{Kl}\,\psi_l(\xi), \qquad /9/$$

де A_{Kl}, B_{Kl} – певні сталі. Тоді з /8/ знаходимо коефіцієнти

$$c_K=\int_h^0 \varphi(\xi)\psi_K(\xi)d\xi = a^2\sum_{l=1}^{K} A_{Kl}\,\mathrm{Im}\Big[A((b+l\pi i)^2\frac{a^2}{h^2})(-1)^l ch\, b - \qquad /10/$$

$$-B((b+l\pi i)^2\frac{a^2}{h^2})-\frac{a(b-l\pi i)}{b^2+l^2\pi^2}\Gamma((b+l\pi i)^2\frac{a^2}{h^2})(-1)^l sh\, b\Big]$$

розвинення функції $\varphi(\xi)$ в ряд Фур"е

$$\varphi(\xi)=\sum_{K=1}^{\infty} c_K\psi_K(\xi), \quad \xi\in(h;0) \qquad /11/$$

за системою $\psi_K(\xi)$. Якщо

$$\sum_{l=1}^{K} A_{Kl}\,R((b+l\pi i)^2\frac{a^2}{h^2})=o(\frac{1}{K}), \quad K\to\infty \qquad /12/$$

при заміні $R(p)$ на $A(p)$, $B(p)$ та $\Gamma(p)$, то збігається ряд $\sum_{K=1}^{\infty} c_K^2$, і, за теоремою Ріса-Фішера, /11/ визначає функцію $\varphi(\xi)\in L_2(h;0)$. Тепер із /7/ знаходимо

$$M(p)=-B\frac{\sqrt{p}}{a}+(A\frac{\sqrt{p}}{a}+\Gamma)e^{-|h|\frac{\sqrt{p}}{a}}+\frac{1}{a^2}\int_h^0\varphi(\xi)e^{-(\xi-h)\frac{\sqrt{p}}{a}}d\xi. \qquad /13/$$

Згідно з /10/–/12/, інтегральний вираз у /13/ є $O(\frac{1}{\sqrt{p}})$ при $p\to\infty$. При $\beta\in L_{1,loc}(R_+)$ $\lim\limits_{t\to 0}\beta*\frac{1}{\sqrt{t}}=2\lim\limits_{t\to 0}\int_0^{\sqrt{t}}\beta(t-u^2)du=0$, тому $B\sqrt{p}=p\frac{B}{\sqrt{p}}$ є зображенням $\beta(t)*\frac{1}{t\sqrt{\pi t}}$ і за додаткової умови $\beta(t)*\frac{1}{t\sqrt{t}}\in L_{1,loc}(R_+)$ із /13/ знаходимо, що оригіналом для $M(p)$ є функція $\omega(t)$ із $L_{1,loc}(R_+)$. Таким чином, доведена така теорема.

Теорема. Нехай $\alpha(t),\beta(t),\gamma(t),\beta(t)*\frac{1}{t\sqrt{t}}\in L_{1,loc}(R_+)$ і виконується /12/. Існує єдиний розв"язок $u(x,t)$ задачі /1/–/3/, визначений формулою /6/ в області Ω, функція $\varphi(x)\in L_2(h;0)$ і визначається коефіцієнтами /10/ розвинення /11/ в ряд Фур"е за ортонормованою системою /9/, а $\omega(t)\in L_{1,loc}(R_+)$ і визначається як оригінал для $M(p)$, заданої формулою /13/.

Запропонований метод поширюється на випадок, коли задані функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ є узагальненими функціями із просторів $D'_+(b)$ [1].

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1981. 2. Лопушанская Г.П. О решении некоторых классов обратных краевых задач в пространстве распределений. Львов, 1990. 12 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ. № 48-Ук 90.

Стаття надійшла до редколегії 03.03.93