УДК 515.12

Л.Є.Базилевич, М.М.Зарічний

ПРО ДЕЯКІ ПСЕВДОВНУТРІШНОСТІ У ГІПЕРПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТОВОГО КУБА

Компакт A , що лежить у гільбертовому кубі Q , називається антиопуклим [8], якщо для всіх його замкнених підмножин B_1, B_2, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ їхні замкнені опуклі оболонки не перетинаються: $conv(B_1) \cap conv(B_2) = \emptyset$.

Нехай $exp\, Q$ – гіперпростір гільбертового куба Q . За теоремою Веста-Кертіса-Шорі [6], $exp\, Q \cong Q$. Позначимо через $\mathcal{L}$ гіперпростір непорожніх антиопуклих компактів у Q.

Нагадаємо, що псевдовнутрішністю гільбертового куба $Q=[-1,1]^\omega$ називається множина $s=(-1,1)^\omega \subset Q$ [3]. У Q розглядається стандартна метрика

$$d((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|x_i - y_i|.$$

Теорема 1. Пара $(exp\, Q, \mathcal{L})$ гомеоморфна парі (Q, s).

Доведення. Покажемо спочатку, що множина $\mathcal{L}$ є типу G_δ в $exp\, Q$.

Для кожного натурального n нехай $\mathcal{M}_n = \{A \in exp\, Q \mid$ існують $B_1, B_2 \in exp\, Q$, $B_1 \cup B_2 \subset A$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $diam\,(conv(B_1) \cap conv(B_2)) \geq 1/n\}$.
Легко бачити, що всі $\mathcal{M}_n$ замкнені в $exp\, Q$ і що $\bigcup\{\mathcal{M}_n \mid n \in \mathbb{N}\} = exp\, Q \setminus \mathcal{L}$.

Покажемо, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує відображення $f_\varepsilon : exp\, Q \longrightarrow \mathcal{L}$, ε – близьке до тотожного відображення. Нехай $m \in \mathbb{N}$ таке, що $2^{-m} < \varepsilon$. Існує злічення сім"я відображень $\{g_i : Q \to [-1,1] \mid i \in \mathbb{N}\}$ з такою властивістю: для кожних $A, B \in exp\, Q$, $A \cap B = \emptyset$ існує $i \in \mathbb{N}$, таке, що $g_i(A) \cap g_i(B) = \emptyset$. Визначимо, тепер відображення $h : Q \to Q$ формулою $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (y_i)_{i=1}^{\infty}$, де

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{, якщо } i \leq m+2, \\ g_{i-m-2}((x_i)_{i=1}^{\infty}) & \text{, якщо } i \geq m+2. \end{cases}$$

Легко бачити, що $f_\varepsilon = exp\, h$ є шуканим відображенням.

З довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що кожна компактна підмножина в $exp\,Q\setminus\mathcal{L}$ є Z - множиною в $exp\,Q$ /нагадаємо, що замкнена підмножина $A\subset X$ називається Z -множиною в X якщо тотожне відображення 1_X апроксимується відображеннями в $X\setminus A$ [3]/. Як наслідок, одержуємо, що множина $exp\,Q\setminus\mathcal{L}$ є σ-Z - множиною, тобто зліченним об"єднанням Z -множин.

Для доведення гомеоморфізму пар $(exp\,Q,\mathcal{L})$ і $(Q,\ s)$ скористаємося технікою Z -скелетоїдів, розвиненою в праці [5]. Достатньо показати, що множина $exp\,Q\setminus\mathcal{L}$ містить Z -скелетоїд, тобто об"єднання зліченної зростаючої сім"ї Z -множин $A_1\subset A_2\subset\ldots$, що виконується умова: для кожного $\varepsilon>0$ кожної Z -множини $B\subset exp\,Q$ і кожного $m\in\mathbb{N}$ існує $n\in\mathbb{N};\ m\leqslant n$ і автогомеоморфізм $h: exp\,Q\rightarrow exp\,Q$ такий, що $d(h,1_{exp\,Q})<\varepsilon,\ h|_B=id,\ h(B)\subset A_m$.

Нескладно переконатися, що можна вибрати Z -скелетоїд у вигляді $A_n=\{A\in exp([-1,1]\times Q)\mid A$,що містить відрізок довжини $\geqslant 1/n$, паралельний першому співмножнику$\}$ /див. аналогічні міркування у праці [1] .

Розглянутий гіперпростір $\mathcal{L}$ допускає алгебраїчну інтерпретацію, яка дає змогу проводити паралелі з деякими іншими гіперпросторами компактних підмножин у гільбертовому просторі. Легко бачити, що замкнена опукла оболонка $conv(A)$ для $A\in\mathcal{L}$ афінно гомеоморфна просторові ймовірнісних мір PA . Отже, A є множиною твірних для вільної $\mathbb{P}$ -алгебри $(PA,\psi A)$, де $\mathbb{P}=(P,\eta,\psi)$ - монада ймовірнісних мір [2].

Гільбертів куб Q має структуру /півгратки Лоусона [7] з операціями $\wedge,\vee: Q\times Q\rightarrow Q$:

$$((x_i)_{i=1}^{\infty})\wedge((y_i)_{i=1}^{\infty})=(min\{x_i,y_i\})_{i=1}^{\infty},$$

$$((x_i)_{i=1}^{\infty})\vee((y_i)_{i=1}^{\infty})=(max\{x_i,y_i\})_{i=1}^{\infty}.$$

Позначимо через $\mathcal{L}_1$ /відповідно $\mathcal{L}_2$ / підмножину, що складається з компактів A , для яких найменше замкнена підгратка /відповідно підпівгратка/ $h(A)$, що містить A , є вільною /півграткою з множиною твірних A .

Для кожного $A\in exp\,Q$ нехай $I\varphi(A)$ - найменший добуток вигляду $\prod_{i=1}^{\infty}[a_i,\ b_i]\subset Q$, що містить A . Приймаємо
$\mathcal{L}_3=\{A\in exp\,Q\mid;$ для кожних $B_1,B_2\in exp A,\ B_1\cap B_2=\emptyset$ маємо $I\varphi(B_1)\cap I\varphi(B_2)=\emptyset\}$.

У праці [9] показано, що елементи множини $\mathcal{L}_3$ є множинами твірних вільних $\mathbb{L}$ -алгебр, де $\mathbb{L}=(\lambda,\eta,\mu)$ - монада суперрозширення.

Доведення наступної теореми повторює доведення теореми I.

Теорема 2. Пари $(exp\,Q, \mathcal{L}_i)$ гомеоморфні парі (Q,s).

Відзначимо, що теорема 1 анонсована у праці [4].

I. Базилевич Л.Є. Поповнені простори функцій на континуумах Пеано // Укр. мат. журн. 1992. Т.44. № 9. С.1165-1170. 2. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 3. Чепмэн Т. Лекции о Q-многообразиях. М., 1981. 4. Bazylevych L.E. On topology of the hyperspace of anticonvex sets // Тез.IX междунар. конф. по топологии и ее прил. К., 1992. С.56. 5. Bessaga Cz., Pełczyński A. Selected topics in infinite-dimensional topology. Warszawa, 1975. 6. Curtis D.W., Schori R.M. Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes // Fund. Math. 1978. T.101. P.19-38. 7. Johnstone P. Stone spaces. London, 1982. 8. Mill J. van. A counterexample in ANR-theory // Topol. Appl. 1981. Vol.12. P.315-320. 9. Zarichnyi M.M. On covariant topological functors, II // Q. and A. General Topology. 1991. Vol.9. N1. P.1-32.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.93

УДК 515.12+519.46

А.Б.Телейко

ПРО ГІПЕРПРОСТОРИ ІДЕАЛІВ У КОМПАКТНИХ НАПІВГРУПАХ

Нехай S – компактна гаусдорфова півгрупа, T – компактна підпівгрупа в S. Нагадаємо, що непорожня множина $\mathcal{L} \subset S$ називається лівим T-ідеалом в S, якщо $T\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Лівий T-ідеал називається мінімальним, якщо він не містить жодного лівого T-ідеалу як власну підмножину. Кожний мінімальний T-ідеал замкнений в S [2]. Позначимо через $\mathcal{L}_T(S)$ $(\mathcal{ML}_T(S))$ множину замкнених /мінімальних/ лівих T-ідеалів в S.

Нагадаємо, що на множині $exp(X)$ непорожніх замкнених підмножин простору X вводиться топологія В'єторіса [1]. Базу цієї топології утворюють множини вигляду
$<U_1,\dots,U_k> = \{A \in exp(X) \mid A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k,\ A \cap U_i \neq \emptyset$ для всіх $i=1,\dots,k\}$.

Теорема 1. Множина $\mathcal{L}_T(S)$ замкнена в $exp(S)$.

Доведення. Припускаючи протилежне, одержуємо, що існує $A \in cl(\mathcal{L}_T(S))$, для якого TA не міститься в A, тобто $ta \notin A$,