Доведення наступної теореми повторює доведення теореми I.

<u>Теорема 2.</u> Пари $(\exp Q, \mathcal{L}_i)$ гомеоморфні парі (Q, s).

Відзначимо, що теорема 1 анонсована у праці [4].

I. Б а з и л е в и ч Л.Є. Поповнені простори функцій на континуумах Пеано // Укр. мат. журн. 1992. Т.44. № 9. С.1165-1170. 2. Ф е д о р ч у к В.В., Ф и л и п п о в В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 3. Ч е п м э н Т. Лекции о Q-многообразиях. М., 1981. 4. Bazylevych L.E. On topology of the hyperspace of anticonvex sets // Тез. IX междунар. конф. по топологии и ее прил. К., 1992. С.56. 5. Bessaga Cz., Pełczyński A. Selected topics in infinite-dimensional topology. Warszawa, 1975. 6. Curtis D.W., Schori R.M. Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes // Fund. Math. 1978. T.101. P.19-38. 7. Johnstone P. Stone spaces. London, 1982. 8. Mill J. van. A counterexample in ANR-theory // Topol. Appl. 1981. Vol.12. P.315-320. 9. Zarichnyi M.M. On covariant topological functors, II // Q. and A. General Topology. 1991. Vol.9. N1. P.1-32.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.93

УДК 515.12+519.46

А.Б.Телейко

ПРО ГІПЕРПРОСТОРИ ІДЕАЛІВ У КОМПАКТНИХ ПІВГРУПАХ

Нехай S – компактна гаусдорфова півгрупа, T – компактна підпівгрупа в S. Нагадаємо, що непорожня множина $\mathcal{L} \subset S$ називається лівим T-ідеалом в S, якщо $T\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Лівий T-ідеал називається мінімальним, якщо він не містить жодного лівого T-ідеалу як власну підмножину. Кожний мінімальний T-ідеал замкнений в S [2]. Позначимо через $\mathcal{L}_T(S)$ $(\mathcal{ML}_T(S))$ множину замкнених /мінімальних/ лівих T-ідеалів в S.

Нагадаємо, що на множині $\exp(X)$ непорожніх замкнених підмножин простору X вводиться топологія В'єторіса [1]. Базу цієї топології утворюють множини вигляду
$\langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \{A \in \exp(X) \mid A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k,\ A \cap U_i \neq \emptyset$ для всіх $i = 1, \ldots, k\}$.

<u>Теорема 1.</u> Множина $\mathcal{L}_T(S)$ замкнена в $\exp(S)$.

<u>Доведення.</u> Припускаючи протилежне, одержуємо, що існує $A \in cl(\mathcal{L}_T(S))$, для якого TA не міститься в A, тобто $ta \notin A$,

для деяких $t\in T$ і $a\in A$. Із неперервності множення та регулярності S випливає, що існують відкриті в S множини $U,V,W,$ для яких $t\in U, a\in V\subset W, A\subset W$ і $UV\cap W=\phi$. Тоді $A\in\langle V,W\rangle$, і отже, існує $\mathcal{L}\in\mathcal{L}_T(S)\cap\langle V,W\rangle$. Якщо $l\in\mathcal{L}\cap V$, то $tl\in T\mathcal{L}\subset\mathcal{L}\subset W$. З іншого боку, $tl\in UV$ і одержуємо суперечність.

З компактності T випливає, що існує мінімальний лівий T -ідеал $\mathcal{L}_0\subset T$ [2].

<u>Твердження 1.</u> $M\mathcal{L}_T(S)=M\mathcal{L}_{L_0}(S)$.

<u>Доведення.</u> Нехай $\mathcal{L}\in M\mathcal{L}_T(S)$, тоді $\mathcal{L}_0\mathcal{L}\subset T\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$, і отже, $\mathcal{L}\in\mathcal{L}_{L_0}(S)$. Якщо $U\in\mathcal{L}_{L_0}(S)$ і $U\subset\mathcal{L}$, то $T\mathcal{L}_0U\subset U\subset\mathcal{L}$, тому $\mathcal{L}_0U=\mathcal{L}$ за мінімальністю $\mathcal{L}$. Звідси $U=\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}\in M\mathcal{L}_{L_0}(S)$.

Навпаки, якщо $\mathcal{L}\in M\mathcal{L}_{L_0}(S)$, то $T\mathcal{L}=T\mathcal{L}_0\mathcal{L}\subset\mathcal{L}_0\mathcal{L}=\mathcal{L}$, оскільки $\mathcal{L}_0l=\mathcal{L}$ для кожного $l\in C$ [2]. Отже, $\mathcal{L}\in\mathcal{L}_T(S)$. Нехай $U\in\mathcal{L}_T(S)$ і $U\subset\mathcal{L}$, тоді $U\supset TU\supset\mathcal{L}_0U=\mathcal{L}$, звідки $\mathcal{L}=U$ і $\mathcal{L}\in M\mathcal{L}_T(S)$.

<u>Твердження 2.</u> Підмножина $\mathcal{L}\subset S$ є мінімальним лівим $\mathcal{L}_0$ - ідеалом тоді і тільки тоді, коли існує $x\in S$, для якого $\mathcal{L}_0x=\mathcal{L}$.

<u>Доведення</u> подане у праці [2].

Природно ввести відношення еквівалентності ~ на S:
$a\sim b \Leftrightarrow \mathcal{L}_0a=\mathcal{L}_0b$, $a,b\in S$.

Введемо такі позначення.

Нехай $\{U_a \mid a\in T\}$ - множина класів еквівалентності відношення $\sim$. Для кожного $a\in T$ нехай $\mathcal{L}_\alpha=\mathcal{L}_0a$, де $a\in U_\alpha$. Тоді $\mathcal{L}_\alpha$ - єдиний мінімальний лівий T - ідеал, що міститься в U_α .

Зауважимо, також, що $\mathcal{L}_0U_\alpha=\mathcal{L}_\alpha$ і $U_\alpha=\mathcal{L}_0^{[-1]}\mathcal{L}_\alpha$ /нагадаємо, що $A^{[-1]}B=\{a\in S \mid Aa\subset B\}$, $A,B\subset S$ [2]/.

<u>Теорема 2.</u> Для кожного $A\in\mathcal{L}_{L_0}(S)$ множини $\cup\{U_\alpha \mid \mathcal{L}_\alpha\subset A\}$ і $F=\cup\{\mathcal{L}_\alpha \mid \mathcal{L}_\alpha\subset A\}$ замкнені в S .

<u>Доведення.</u> Нехай $A\cap U_\alpha\neq\phi$. Тоді, оскільки A - лівий $\mathcal{L}_0$ -ідеал, то $\mathcal{L}_\alpha\subset A$. Звідси $\mathcal{L}_0^{[-1]}(S\setminus A)=S\setminus\cup\{U_\alpha \mid \mathcal{L}_\alpha\subset A\}$. Проте множина $\mathcal{L}_0^{[-1]}(S\setminus A)$ відкрита в S , бо відкритою в S є множина $S\setminus A$ [2]. Отже, множина $\cup\{U_\alpha \mid \mathcal{L}_\alpha\subset A\}$ замкнена в S .

Другу частину теореми доводимо від супротивного. Нехай $a\in cl(F)\setminus F$. Оскільки $cl(F)\subset cl(A)=A\subset\cup\{U_\alpha \mid \mathcal{L}_\alpha\subset A\}$, то знайдеться α таке, що $a\in U_\alpha\setminus\mathcal{L}_\alpha$. Оскільки множина $\mathcal{L}_\alpha$ замкнена в S , то існують окіл Oa точки a і окіл $O\mathcal{L}_\alpha$ множини $\mathcal{L}_\alpha$, що не перетинаються. Враховуючи, що $a\in U_\alpha$, для довільного $l\in\mathcal{L}_0$ одержуємо: $la\in\mathcal{L}_\alpha\subset O\mathcal{L}_\alpha$. Отже, за неперервністю множення знайдуться окіл Ol точки і l окіл O_1a точки a такі, що $Ol\cdot O_1a\subset O\mathcal{L}_\alpha$. Однак $\mathcal{L}_0$ - компакт, і отже, існує окіл

$\tilde{O}a$ точки a, для якого виконуються такі включення: $\tilde{O}a \subset Oa$ і $\mathcal{L}_0 \cdot Oa \subset O\mathcal{L}_\alpha$. Оскільки $a \in cl(F)$, то $\tilde{O}a \cap F \neq \emptyset$. Нехай $f \in \tilde{O}a \cap F$. Тоді $f \in F$, а отже, $f \in \mathcal{L}_0 f \subset O\mathcal{L}_\alpha$, тобто $O\mathcal{L}_\alpha \cap \tilde{O}a \neq \emptyset$ і одержуємо суперечність. Отже, $cl(F) = F$. Теорема доведена.

Наслідок 1. Множина $\cup M\mathcal{L}_{L_0}(S)$ замкнена в S.

Доведення. Достатньо замість A взяти S.

Теорема 3. Множина $M\mathcal{L}_{L_0}(S)$ замкнена в $exp(S)$.

Доведення. Припускаємо протилежне. Тоді існує замкнена в S множина A така, що $A \in cl(M\mathcal{L}_{L_0}(S)) \setminus M\mathcal{L}_{L_0}(S)$. Оскільки за теоремою 1, $cl(M\mathcal{L}_{L_0}(S)) \subset cl(\mathcal{L}_{L_0}(S)) = \mathcal{L}_{L_0}(S)$, то A – лівий $\mathcal{L}_0$ - ідеал. Нехай $a \in A$ – довільне. Тоді для будь-якого околу Oa точки a маємо $A \in \langle Oa, S \rangle$, тобто існує $\mathcal{L}_\alpha \in \langle Oa, S \rangle$, і отже, $\mathcal{L}_\alpha \cap Oa \neq \emptyset$. Звідси $a \in \cup\{\mathcal{L}_\alpha | \mathcal{L}_\alpha \subset S\}$ /оскільки за наслідком 1, множина $\cup\{\mathcal{L}_\alpha | \mathcal{L}_\alpha \subset S\}$ замкнена в S /. Отже, знайдеться $a \in T$ таке, що $a \in \mathcal{L}_\alpha$. Оскільки A – лівий $\mathcal{L}_0$ -ідеал, то $A = \cup\{\mathcal{L}_\alpha | a \in T_1\}$ для деякої підмножини $T_1 \subset T$, причому $|T_1| \geq 2$, бо A – не мінімальний ідеал.

Нехай $\mathcal{L}_\alpha \subset A$ і $\mathcal{L}_\beta \subset A$, $\alpha, \beta \in T_1, \alpha \neq \beta$ і $a_1 \in \mathcal{L}_\alpha$. З нормальності S одержуємо, що існують околи $O\mathcal{L}_\alpha$ і $O\mathcal{L}_\beta$ множин $\mathcal{L}_\alpha$ і $\mathcal{L}_\beta$, які не перетинаються. Оскільки $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_0 a_1$ і $\mathcal{L}_0$ - компакт, то знайдеться окіл Oa_1 точки a_1, для якого $\mathcal{L}_0 \cdot Oa_1 \subset O\mathcal{L}_\alpha$. Тоді $A \in \langle Oa_1, O\mathcal{L}_\beta, S \rangle$ і, отже, для деякого $\gamma \in T$ $\mathcal{L}_\gamma \in \langle Oa_1, O\mathcal{L}_\beta, S \rangle$. Звідси $\mathcal{L}_\gamma \cap Oa_1 \neq \emptyset$ і

$$\mathcal{L}_\gamma \cap \mathcal{L}_\beta \neq \emptyset. \qquad (*)$$

Нехай $f \in \mathcal{L}_\gamma \cap Oa_1$. Тоді $\mathcal{L}_0 f \subset O\mathcal{L}_\alpha$ і $\mathcal{L}_0 f = \mathcal{L}_\gamma$. Тобто, враховуючи $(*)$, одержуємо, що $O\mathcal{L}_\alpha \cap O\mathcal{L}_\beta \neq \emptyset$, а це суперечить виборові $O\mathcal{L}_\alpha$ і $O\mathcal{L}_\beta$. Теорема доведена.

Наслідок 2. Множина $M\mathcal{L}_T(S)$ замкнена в $exp(S)$.

Доведення безпосередньо випливає з твердження 2.

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 2. Wallace A.D. Relative ideals in semigroups. I (Fausett's Theorem)//Colloq. Math. 9(1962). P. 55-61.

Стаття надійшла до редколегії 30.05.93