В.Р.Зеліско

ПРО ПРЯМУ СУМУ І ПРЯМИЙ ДОБУТОК МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

Нехай $A(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ - невироджена клітково-діагональна многочленна матриця вигляду $A(x) = diag(A_1(x), \dots, A_m(x))$, яку називають прямою сумою матриць $A_1(x), \dots, A_m(x)$ і позначають $A(x) = A_1(x) \oplus \dots \oplus A_m(x)$ [1]. Якщо $A_i(x) = B_i(x) C_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, де $B_i(x)$ - регулярні матриці степеня z, то, очевидно, $A(x) = B(x) C(x)$, де $B(x) = B_1(x) \oplus \dots \oplus B_m(x)$ регулярна матриця. Обернене твердження правильне не завжди [1, 3], а тому виокремимо клас таких многочленних матриць, для яких воно справджується.

Многочленна матриця $A(x)$ називається матрицею простої структури, якщо всі її елементарні дільники лінійні, тобто якщо в її канонічній діагональній формі $diag(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x))$ многочлени $\varepsilon_i(x)$ мають вигляд $\varepsilon_i(x) = (x - \alpha_{1i}) \dots (x - \alpha_{ki})$, $i = \overline{1,n}$, де $\alpha_{ki} \neq \alpha_{ei}$ при $k \neq l$.

<u>Теорема I.</u> Многочленна матриця $A(x) = A_1(x) \oplus \dots \oplus A_m(x)$ є матрицею простої структури тоді і тільки тоді, коли $A_1(x), \dots, A_m(x)$ - матриці простої структури.

<u>Доведення.</u> Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $A(x) = A_1(x) \oplus \oplus \dots \oplus A_m(x)$, де порядки матриць $A_j(x)$ дорівнюють n_j, $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$. Якщо $A(x)$ - многочленна матриця простої структури, то для будь-якого кореня α кратності k її характеристичного многочлена $\det A(x)$ маємо $rang\, A(\alpha) = n - k$. Якби для деякого j матриця $A_j(x)$ не була матрицею простої структури, то $rang\, A_j(\alpha) > n - k_j$, де k_j - кратність кореня α многочлена $\det A_j(x)$, і оскільки $k = k_1 + \dots + k_m$, то $\sum_{j=1}^{m} (n_j - k_j) > n - k$, що суперечить умові $rang\, A(\alpha) = rang\, A_1(\alpha) + \dots + rang\, A_m(\alpha)$.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай многочленні матриці $A_i(x)$ $i = \overline{1,m}$ - матриці простої структури, тобто для кожного кореня α кратності k_i многочлена $\det A_i(x)$ маємо $rang\, A_i(\alpha) = n_i - k_i$. Тоді $rang\, A(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} rang\, A_i(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} (n_i - k_i) = \sum_{i=1}^{m} n_i - \sum_{i=1}^{m} k_i = n - k$, тобто $A(x)$ - матриця простої структури.

Зауваження I. Відомо, що унітальна многочленна матриця простої структури розкладається в добуток лінійних унітальних матриць простої структури [1], тому пряма сума унітальних многочленних матриць однакового степеня розкладається в добуток клітково-діагональних унітальних лінійних множників.

Нехай $A(x), B(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ – невироджені многочленні матриці. Як і в праці [2], прямий /кронекерівський/ добуток матриць $A(x)$ і $B(x)$ визначаємо блоковою матрицею

$$A(x)\otimes B(x)=\begin{Vmatrix} a_{11}(x)B(x)\dots a_{1n}(x)B(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}(x)B(x)\dots a_{nn}(x)B(x)\end{Vmatrix}.$$

Теорема 2. Нехай $A_1(x), A_2(x)$ – невироджені многочленні матриці простої структури. Прямий добуток $A_1(x)\otimes A_2(x)$ є матрицею простої структури тоді і тільки тоді, коли $(\det A_1(x), \det A_2(x))=1$.

Доведення. Зведемо многочленні матриці $A_1(x)$ і $A_2(x)$ до відповідних канонічних діагональних форм:

$$P_1(x)A_1(x)Q_1(x)=diag(\varepsilon_1^{(1)}(x),\dots,\varepsilon_n^{(1)}(x)),$$

$$P_2(x)A_2(x)Q_2(x)=diag(\varepsilon_1^{(2)}(x),\dots,\varepsilon_n^{(2)}(x)).$$

Звідси, використовуючи властивості прямого добутку матриць [2], отримуємо $diag(\varepsilon_1^{(1)}(x),\dots,\varepsilon_n^{(1)}(x))\otimes diag(\varepsilon_1^{(2)}(x),\dots,\varepsilon_n^{(2)}(x))=$

$$=(P_1(x)\otimes P_2(x))(A_1(x)\otimes A_2(x))(Q_1(x)\otimes Q_2(x)).$$

Враховуючи те, що матриці $P_1(x)\otimes P_2(x)$ і $Q_1(x)\otimes Q_2(x)$ оборотні над $\mathbb{C}[x]$, бачимо, що канонічною діагональною формою матриці $A_1(x)\otimes A_2(x)$ є матриця

$$diag(\varepsilon_1^{(1)}(x),\dots,\varepsilon_n^{(1)}(x))\otimes diag(\varepsilon_1^{(2)}(x),\dots,\varepsilon_n^{(2)}(x)), \qquad /I/$$

тому $A_1(x)\otimes A_2(x)$ є матрицею простої структури тоді і тільки тоді, коли такою є матриця /I/. Отже, надалі доводячи теорему, розглядатимемо прямий добуток вигляду /I/.

Необхідність. Нехай $A_1(x)$ і $A_2(x)$ – многочленні матриці простої структури. Якщо α – спільний корінь многочленів $\det A_1(x)$ і $\det A_2(x)$, то в матриці /I/ принаймні один діагональний елемент має вигляд $(x-\alpha)^2\varepsilon_n'(x)$, тому дефект матриці $A_1(\alpha)\otimes A_2(\alpha)$ менший, ніж алгебраїчна кратність цього кореня, а це суперечить тому, що матриця $A_1(x)\otimes A_2(x)$ має просту структуру.

Достатність. Нехай $A_1(x)$ і $A_2(x)$ – многочленні матриці простої структури, тобто для кожного кореня α многочлена $\det A_1(x)$ кратності k та кореня β многочлена $\det A_2(x)$ кратності l маємо $\operatorname{rang} A_1(\alpha)=n-k$ і $\operatorname{rang} A_2(\alpha)=n-l$. Якщо $(\det A_1(x), \det A_2(x))=1$, то кожний корінь ω_i кратності k_i многочлена $\det(A_1(x)\otimes A_2(x))$ є коренем одного з многочленів $\det A_1(x)$ або $\det A_2(x)$ кратності k_i/n. Нехай корінь ω_i многочлена $\det(A_1(x)\otimes A_2(x))$ є коренем $\det A_1(x)$. Тоді $A_2(\omega_i)$ – невироджена матриця. Якщо $\operatorname{rang} A_1(\omega_i)=n-p_i$, тобто в матриці $\operatorname{diag}(\varepsilon_1^{(1)}(\omega_i),\dots,\varepsilon_n^{(1)}(\omega_i))$ є $n-p_i$ ненульових діагональних елементів, а в матриці $\operatorname{diag}(\varepsilon_1^{(2)}(\omega_i),\dots,\varepsilon_n^{(2)}(\omega_i))$ всі діагональні елементи – ненульові, то в матриці $\operatorname{diag}(\varepsilon_1^{(1)}(\omega_i),\dots,\varepsilon_n^{(1)}(\omega_i))\otimes \operatorname{diag}(\varepsilon_1^{(2)}(\omega_i),\dots,\varepsilon_n^{(2)}(\omega_i))$ є $(n-p_i)n$ ненульових елементів, тобто для кореня ω_i многочлена $\det(A_1(x)\otimes A_2(x))$ кратності $p_i n$ маємо

$$\operatorname{rang}(A_1(\omega_i)\otimes A_2(\omega_i))=n^2-p_i n,$$

тому $A_1(x)\otimes A_2(x)$ – матриця простої структури. Теорема доведена.

<u>Зауваження 2.</u> Якщо $A(x)$ і $B(x)$ – унітальні многочленні матриці простої структури, то $A(x)=(Ex-A_1)\dots(Ex-A_s)$ і $B(x)=(Ex-B_1)\dots(Ex-B_s)$, і за властивостями прямого добутку матриць [2] маємо:

$$A(x)\otimes B(x)=(Ex-A_1)\otimes(Ex-B_1)\dots(Ex-A_s)\otimes(Ex-B_s).$$

Якщо ж, крім цього, характеристичні многочлени матриць $A(x)$ і $B(x)$ взаємно прості, що згідно з теоремою 2 $A(x)\otimes B(x)$, яка є унітальною многочленною матрицею, повністю розкладається в добуток лінійних унітальних множників.

Відзначимо, нарешті, що згідно з відомими результатами, наприклад із праці [2], теореми 1 і 2 можна використати, досліджуючи існування та єдиність розв"язків лінійних і многочленних матричних рівнянь.

1. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К., 1981. 2. Ланкастер П. Теория матриц. М., 1978. 3. Петричкович В.М. Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизация клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Мат. заметки. 1985. Т.37. Вып. 6. С.789-796.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.93