УДК 512.74

В.І.Андрійчук

АЛГЕБРАЇЧНІ ТОРИ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Нехай K - поле алгебраїчних функцій від одної змінної з псевдоскінченним, за Аксом [3], полем констант $\varkappa$. Назвемо поле псевдоглобальним полем.

Мета цієї статті - показати, що частину результатів з арифметики алгебраїчних торів, визначених над глобальними полями, можна перенести на випадок псевдоглобальних полів. Це можливо завдяки тому, що для псевдоглобальних полів існує аналог глобальної теорії полів класів [1].

Нехай T - алгебраїчний тор над полем K, L/K - скінченне розширення Галуа поля K з групою Галуа G. Вважаємо, що тор T розщеплюється над полем L, тобто $T\otimes_K L = G_{m,L}^{z}$, де $G_m = Spec\, K[t,t^{-1}]$.

Далі для G-модуля M через $H^n(G,M)$ позначаємо когомології Галуа групи G з коефіцієнтами в M.

Ω означає множину всіх нормувань поля K, K_v - поповнення поля K за нормуванням $v\in\Omega$. Якщо $S\subset\Omega$, то група $T(K)$ - K - раціональних точок тора T вкладається у прямий добуток $\prod_{v\in S} T(K_v)$. Нехай $\overline{T(K)}$ - замикання $T(K)$ відносно топології прямого добутку, $A(T,S)=\prod_{v\in S} T(K_v)/\overline{T(K)}$ і $A(T)=A(T,\Omega)$.

<u>Теорема 1.</u> Нехай K - псевдоглобальне поле, T - тор над полем K, T розщеплюється над скінченним розширенням Галуа L поля K. Якщо S - скінченна множина нормувань поля K така, що для всіх $w|v$, $v\in S$ групи розкладу G_w циклічні, то $A(T,S)=0$.

Доведення теореми 1 та наступної теореми 2 грунтується на аналогах теорем двоїстості Тейта-Накаями для торів над загальними локальними полями та для торів над псевдоглобальними полями.

<u>Теорема А</u> /двоїстість Тейта-Накаями/. 1. Нехай k - загальне локальне поле, l/k - скінченне розширення Галуа, $G=Gal(l/k)$, T - тор, що розщеплюється над l, $\hat{T}$ - модуль раціональних характерів тора T, $T(l)=Hom(\hat{T},l^*)$. Тоді

$$H^n(G,\hat{T})\cong H^{2-n}(G,T(l)).$$

2. Нехай K – псевдоглобальне поле, L/K – скінченне розширення Галуа, $G = Gal(L/K)$, C_L – група класів ідеалів поля L, T– тор, який розщеплюється над L, $C_L(T) = Hom(\hat{T}, C_L)$. Тоді

$$H^n(G, \hat{T}) \cong H^{2-n}(G, C_L(T)).$$

<u>Доведення</u>. Нехай M – G – модуль l^* у випадку 1 і G – модуль C_L у випадку 2. Аналог локальної теорії полів класів для загальних локальних полів [4] у випадку 1 та глобальної теорії полів класів для псевдоглобальних полів [1] у випадку 2 показує, що $H^2(G, M)$ – циклічна група порядку $|G|$, і якщо α – твірна групи $H^2(G, M)$ і H – підгрупа групи G , то $H^1(H, M) = 0$ і $H^2(H, M)$ – циклічна група порядку $|H|$, породжена обмеженням α на H . Звідси, використовуючи міркування, наведені у праці [2], одержуємо доведення теореми А.

<u>Доведення теореми 1.</u> Запишемо для тора T канонічну точну послідовність [2]

$$0 \to \hat{T} \to \hat{M} \to \hat{N} \to 0,$$

де $\hat{M}$ – пермутаційний G –модуль скінченного типу, $H^n(H, \hat{N}) = 0$ для всіх підгруп H групи G , а також відповідну двоїсту послідовність торів над полем L :

$$0 \to N \to M \to T \to 0. \qquad /1/$$

Нехай w – продовження на L нормування v поля K, L_w – поповнення поля L відносно нормування w, G_w – відповідна група розкладу. Точній послідовності /1/ відповідає точна послідовність G_w –модулів:

$$0 \to N(L_w) \to M(L_w) \to T(L_w) \to 0.$$

Запишемо відповідну точну послідовність когомологій Галуа:

$$M(K_v) \to T(K_v) \to H^1(G_w, N(L_w)) \to H^1(G_w, M(L_w)).$$

Тут $H^1(G_w, M(L_w)) = 0$ і $H^1(G_w, N(L_w)) \cong H^1(G_w, \hat{N})$ за двоїстістю Тейта-Накаями.

Якщо S_0 – скінченна множина нормувань поля K з нециклічними групами розкладу, то для всіх $v \notin S_0$ справедлива рівність [2]

$$H^1(G_w, N(L_w)) = H^1(G_w, \hat{N}) = 0.$$

Точна послідовність когомологій показує, що для скінченної множини $S \subset \mathcal{P}$, $S \cap S_0 = \varnothing$ маємо епіморфізм

$$\prod_{v \in S} M(K_v) \to \prod_{v \in S} T(K_v).$$

Звідси, наслідуючи міркування праці [2], одержуємо доведення теореми 1.

Наслідок 2. Нехай S_0 – скінченна множина нормувань поля K з нециклічними групами розкладу, $S=S_0\cup S_1$. Тоді $A(T)=A(T,S)=A(T,S_0)$.

Для псевдоглобальних полів характеристики 0 справедливий наступний аналог теореми Воскресенського про тори над числовими полями.

Теорема 2. Нехай K – псевдоглобальне поле характеристики 0, тобто $char\,\mathcal{K}=0$. $T\hookrightarrow V(T)$ – вкладення тора у гладкий повний многовид над K. $Ш(T)=Ker(H^1(G,T(L))\to\bigoplus_{v\in\Omega}H^1(G_v,T(L_w))$ – група Шафаревича-Тейта тора T. Існує точна послідовність груп

$$0\to A(T)\to H^1(G,Pic V_L(T))\to Ш(T)\to 0.$$

Доведення. Застосуємо двоїстість Тейта-Накаями для псевдоглобального поля за використанням міркувань, якими користуються для доведення точності цієї послідовності у випадку числового основного поля [2]:

Наслідок 1. Група $A(T)$ скінченна.

Наслідок 2. Якщо всі групи розкладу vG_v циклічні, то $A(T)=0$ і $Ш(T)=H^1(G,Pic V_2(T))$.

1. Андрійчук В.І. S -квазиконечные поля и поля классов // Междунар. конф. по алгебре, посвящ. памяти А.И.Ширшова. Барнаул, 20-25 авг. 1991 г.: Тез. докл. по алгебраичес. геометрии и применениям алгебры. С.37. 2. Воскресенский В.Е. Алгебраические торы. М., 1977. 3. Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann. Math. 1968. Vol. 88. №2. 4. Serre J.P. Corps locaux. Paris; Hermann. 1963.

Стаття надійшла до редколегії 13.04.93