УДК 510 + 511

М.Я.Комарницький, Р.Є.Кокорузь

ЛОКАЛЬНІ КІЛЬЦЯ В ЕЛЕМЕНТАРНОМУ ТОПОСІ, ВИЗНАЧЕНІ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТУЇЦІОНІСТСЬКОГО РАДИКАЛА ДЖЕКОБСОНА

Нехай A_{nn} - теорія нетривіальних комутативних кілець [1] в елементарному топосі $\mathcal{E}$. У ряді праць розглянуті деякі додаткові аксіоми, накладаючи які на моделі теорії A_{nn}, можна довести, що кільце є полем, локальним кільцем або має іншу властивість. Відомо, що кожна формула логіки першого порядку, яка є вивідною в інтуїціоністському численні предикатів, істинна на будь-якій моделі в елементарному топосі [1]. Ми будемо користуватись інтуїціоністською системою, викладеною в праці [5].

К.Малвей [4] досліджував три види аксіом поля:

$$F.1 \quad (a=0)\vee(a\in U),$$
$$F.2 \quad \neg(a=0)\Rightarrow(a\in U),$$
$$F.3 \quad \neg(a\in U)\Rightarrow(a=0),$$

де $U \xrightarrow{u} A$ - підоб"єкт одиниць кільця A, і довів, що вони інтуїціоністськи нееквівалентні. П.Т.Джонстоун [3] в свою чергу розглядав інші типи аксіом, які дали змогу вивчати інші види кілець. Зокрема, він видокремив чотири види аксіоми локального кільця:

$$L.0 \quad (a\in U)\vee(b\in U)\vee\neg(a+b\in U),$$
$$L.1 \quad (a+b\in U)\Rightarrow((a\in U)\vee(b\in U)),$$
$$L.3 \quad ((a+b\in U)\wedge\neg(a\in U))\Rightarrow(b\in U),$$
$$L.4 \quad (\neg(a\in U)\wedge\neg(b\in U))\Rightarrow\neg(a+b\in U).$$

У цій же праці проаналізовані можливі імплікації між аксіомами поля і локального кільця.

У даній статті аналізується поняття радикала Джекобсона комутативного кільця в топосі, яке використовується для дослідження локальних кілець, а також вводиться поняття півпростоти за Джекобсоном і досліджується його вплив на схему аксіом Джонстоуна.

Розглянемо формулу $\mathcal{J}(a)=(\forall b)((1-ab)\in U)$.
Підоб"єкт $\mathcal{J} \xrightarrow{i} A$ кільця A в елементарному топосі $\mathcal{E}$, який є інтерпретацією цієї формули, називатимемо радикалом Джекоб-

сона кільця A. Надалі, для скорочення формули використовуватимемо запис $(a \in \mathcal{T})$.

<u>Твердження I.</u> Радикал Джекобсона $\mathcal{T} \xrightarrow{\bar{j}} A$ кільця A є ідеалом у цьому кільці.

<u>Доведення.</u> Оскільки підоб"єкт $\mathcal{T} \xrightarrow{\bar{j}} A$ є інтерпретацією формули $\mathcal{T}(a)$, то для доведення твердження потрібно перевірити зивідність в інтуїціоністській логіці формул:

1/ $(\mathcal{T}(a) \wedge \mathcal{T}(b)) \Rightarrow \mathcal{T}(a+b)$;

2/ $\mathcal{T}(a) \Rightarrow \mathcal{T}(-a)$;

3/ $\mathcal{T}(a) \Rightarrow (\forall a')\,\mathcal{T}(aa')$.

Запишемо формулу $(a \in \mathcal{T})$ у вигляді

$$\mathcal{T}(a) = (\forall a')(\exists a'')((1-aa')a''=1).$$

Тоді
$$Ann,\ (1-aa')a''=1,\ (1-ba_1')a'''=1 \vdash Ann,$$
$$((1-aa')a''=1) \wedge ((1-ba')a'''=1) \wedge$$
$$\wedge ((1+aba'^2)a^{IV}=1) \vdash$$
$$\vdash Ann,\ (1-(a+b)a'a^{IV})(1+aba'^2)a''a'''=1 \vdash$$
$$\vdash Ann,\ (\exists a'')((1-(a+b)a')a''=1).$$

Звідси
$$Ann,\ ((\exists a'')((1-aa')a''=1)) \wedge$$
$$\wedge ((\exists a'')((1-ba_1')a''=1)) \vdash (\exists a'')((1-(a+b)a')a''=1).$$

Використовуючи теорему дедукції та правило введення квантора загальності, остаточно отримуємо

$$Ann, \vdash ((a \in \mathcal{T}) \wedge (b \in \mathcal{T})) \Rightarrow (a+b \in \mathcal{T}).$$

Аналогічно доводиться решта аксіом ідеала.

<u>Лема 2.</u> Для довільного кільця A в елементарному топосі справедливі такі твердження:

1/ $(a \in \mathcal{U}) \Rightarrow \neg(a \in \mathcal{T})$,

2/ $(a \in \mathcal{T}) \Rightarrow \neg(a \in \mathcal{U})$.

<u>Доведення.</u> $Ann,\ (a \in \mathcal{U}),\ (a \in \mathcal{T}) \vdash$
$$\vdash (\exists a')(aa'=1),\ (\forall a')(\exists a'')((1-aa')a''=1) \vdash (0=1).$$

З іншого боку, $Ann \vdash \neg(0=1)$.

Тому $Ann,\ (a \in \mathcal{U}) \vdash \neg(a \in \mathcal{T})$ і $Ann,\ (a \in \mathcal{T}) \vdash \neg(a \in \mathcal{U})$.

Остаточно, за теоремою дедукції, маємо

$$Ann \vdash ((a \in \mathcal{T}) \Rightarrow \neg(a \in \mathcal{U})) \wedge ((a \in \mathcal{U}) \Rightarrow \neg(a \in \mathcal{T})).$$

З допомогою ідеала $\mathcal{T} \xrightarrow{j} A$ можна записати такі аксіоми:

$\mathcal{T}L.0$ $(a \in \mathcal{U}) \vee (b \in \mathcal{U}) \vee ((a+b) \in \mathcal{T})$,

$\mathcal{T}L.1$ $(a \in \mathcal{U}) \vee (a \in \mathcal{T})$,

$\mathcal{T}L.2$ $\neg(a \in \mathcal{T}) \Rightarrow (a \in \mathcal{U})$,

$\mathcal{T}L.3$ $\neg(a \in \mathcal{U}) \Rightarrow (a \in \mathcal{T})$.

Кільце, яке задовольняє одну з цих аксіом, називатимемо локальним кільцем в сенсі Джекобсона.

<u>Твердження 3.</u> Справедлива така діаграма імплікацій:

$$\begin{tikzcd}
 & F.2 \arrow[rr] & & \mathcal{T}L.2 \arrow[dd] \\
F.1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{T}L.0 \arrow[r, dash] & \mathcal{T}L.1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & F.3 \arrow[rr] & & \mathcal{T}L.3
\end{tikzcd}$$

<u>Доведення.</u> Доведення імплікацій $F.1 \Rightarrow F.2$ і $F.1 \Rightarrow F.3$ можна знайти, наприклад у праці [3, лема 2.I]. Імплікації $F.2 \Rightarrow \mathcal{T}L.2$ і $F.3 \Rightarrow \mathcal{T}L.3$ справедливі, оскільки у випадку $\mathcal{T}=0$ аксіоми $\mathcal{T}L.2$ і $\mathcal{T}L.3$ виконуються на полях типу $F.2$ і $F.3$ відповідно. Оскільки поле, що задовольняє аксіому $F.1$ $\mathcal{U}$ - розв"язне, то

$$Ann, (a=0)\vee(a\in\mathcal{U}),\ (b=0)\vee(b\in\mathcal{U}) \vdash$$

$$\vdash (a\in\mathcal{U})\vee(b\in\mathcal{U})\vee(a+b=0), \text{ але } Ann \vdash (a+b=0) \Rightarrow (a+b\in\mathcal{T}),$$

і тому отримуємо, що $F.1 \Rightarrow \mathcal{T}L.0$.

Імплікація $\mathcal{T}L.0 \Rightarrow \mathcal{T}L.1$ очевидна. Достатньо в аксіомі $\mathcal{T}L.0$ виконати заміну терма b термом 0 .

Далі, $Ann, (a\in\mathcal{U}), \neg(a\in\mathcal{T}) \vdash (a\in\mathcal{U})$ і за теоремою дедукції $Ann, (a\in\mathcal{U}) \vdash \neg(a\in\mathcal{T}) \Rightarrow (a\in\mathcal{U})$.
Аналогічно $Ann, (a\in\mathcal{T}) \vdash \neg(a\in\mathcal{T}) \Rightarrow (a\in\mathcal{U})$, тому $Ann,$ $(a\in\mathcal{U})\vee(a\in\mathcal{T}) \vdash \neg(a\in\mathcal{T}) \Rightarrow (a\in\mathcal{U})$. Отже, використовуючи теорему дедукції, доходимо висновку, що $\mathcal{T}L.1 \Rightarrow \mathcal{T}L.2$.

Справедливість імплікації $\mathcal{T}L.2 \Rightarrow \mathcal{T}L.3$ визначимо пізніше.

<u>Означення 4.</u> Кільце A в елементарному топосі $\mathcal{E}$ називається строго /слабо/ локальним у сенсі Джекобсона, якщо воно задовольняє аксіому $\mathcal{T}L.0$ /аксіому $\mathcal{T}L.3$ /, і геометричним локальним кільцем у сенсі Джекобсона, якщо воно задовольняє аксіому $\mathcal{T}L.1$.

<u>Теорема 4.</u> Якщо кільце A є строго /слабо, геометричним/ локальним кільцем у сенсі Джекобсона, то воно є строго /слабо, геометричним/ локальним кільцем у сенсі Джонстоуна /з приводу термінології див. працю [3]/.

<u>Доведення.</u> $\mathcal{T}L.0 \Rightarrow L.0$. Цю імплікацію отримуємо, користуючись лемою 2. Дійсно, з леми випливає, що

$$(a+b\in\mathcal{T}) \vdash \neg(a+b\in\mathcal{U}) \vdash$$

$$\vdash (a+b\in\mathcal{U})\vee(a\in\mathcal{U})\vee(b\in\mathcal{U})$$

і, оскільки $(a \in \mathcal{U}) \vee (b \in \mathcal{U}) \vdash (a \in \mathcal{U}) \vee$

$$\vee (b \in \mathcal{U}) \vee \neg(a+b \in \mathcal{U}).$$

то, остаточно маємо

$$(a \in \mathcal{U}) \vee (b \in \mathcal{U}) \vee (a+b \in \mathcal{T}) \vdash (a \in \mathcal{U}) \vee (b \in \mathcal{U}) \vee \neg(a+b \in \mathcal{T})$$

і за теоремою дедукції отримуємо потрібне.

$\mathcal{T}L.1 \Rightarrow L.1$. Зауважимо, що аксіома $L.1$ еквівалентна аксіомі $(a \in \mathcal{U}) \vee ((1-a) \in \mathcal{U})$.

Оскільки $(a \in \mathcal{T}) = (\forall a')((1-aa') \in \mathcal{U}) \vdash ((1-a) \in \mathcal{U})$,
то $Ann, (a \in \mathcal{U}) \vee (a \in \mathcal{T}) \vdash (a \in \mathcal{U}) \vee ((1-a) \in \mathcal{U})$
і $Ann \vdash ((a \in \mathcal{U}) \vee (a \in \mathcal{T})) \Rightarrow ((a \in \mathcal{U}) \vee ((1-a) \in \mathcal{U})$.

$\mathcal{T}L.3 \Rightarrow L.3$. $Ann, \neg(a \in \mathcal{U}) \wedge \neg(b \in \mathcal{U}), \mathcal{T}L.3 \vdash$
$\vdash Ann, \neg(a \in \mathcal{U}), \neg(b \in \mathcal{U}), \mathcal{T}L.3 \vdash Ann, (a \in \mathcal{T}), (b \in \mathcal{T}) \vdash$
$\vdash Ann, (a \in \mathcal{T}) \wedge (b \in \mathcal{T})$.

Застосовуючи аксіому 1/ ідеала і лему 2, отримуємо
$Ann, \mathcal{T}L.3, \neg(a \in \mathcal{U}) \wedge \neg(b \in \mathcal{U}) \vdash \neg((a+b) \in \mathcal{U})$;
а, отже, $Ann, \mathcal{T}L.3 \vdash L.3$.

<u>Теорема 5</u>. Справедливі такі імплікації:

1/ $\mathcal{T}L.2 \Rightarrow L.2$;

2/ $L.2 \Rightarrow \mathcal{T}L.3$.

<u>Доведення</u>. 1. $Ann, ((a+b) \in \mathcal{U}) \wedge \neg(a \in \mathcal{U}), (b \in \mathcal{T}) \vdash$
$\vdash Ann, ((\exists a')((a+b)a'=1) \wedge \neg((\exists a')(aa'=1)), ((\exists a''')$
$(1-ba')a'''=1) \vdash Ann, ((\exists a')((a+b)a'=1)) \wedge$
$\wedge \neg((\exists a')(aa'=1)) \wedge ((\exists a''')(aa'a'''=1) \vdash$
$\vdash ((\exists a')(aa'=1)) \wedge ((\exists a')(aa'=1)) \vdash fals.$

Тому $Ann, (a+b \in \mathcal{U}) \wedge \neg(a \in \mathcal{U}) \vdash (b \in \mathcal{T})$.
Застосовуючи аксіому $\mathcal{T}L.2$, отримуємо

$$Ann, (a+b \in \mathcal{U}) \wedge \neg(a \in \mathcal{U}) \vdash (b \in \mathcal{U}),$$

і за теоремою дедукції

$$Ann, \mathcal{T}L.2 \vdash (((a+b) \in \mathcal{U}) \wedge \neg(a \in \mathcal{U})) \Rightarrow (b \in \mathcal{U}).$$

2. Оскільки $\neg(a \in \mathcal{U}) \vdash \neg(aa' \in \mathcal{U})$, то

$$Ann, \neg(a \in \mathcal{U}), (\forall a)(aa' + (1-aa') = 1 \in \mathcal{U}) \vdash$$
$$\vdash (\forall a')((1-aa') \in \mathcal{U}) \vdash (a \in \mathcal{T}).$$

Отже, $Ann, L.2 \vdash \neg(a \in \mathcal{U}) \Rightarrow (a \in \mathcal{T})$.

Як наслідок цієї теореми отримуємо імплікацію $\mathcal{TL}.2 \Rightarrow \mathcal{TL}.3$, — цим самим завершуючи доведення твердження 3.

Зауважимо, що $\mathcal{TL}.3$ разом з $\mathcal{U}$-розв"язністю дає аксіому $\mathcal{TL}.0$ і в цьому випадку всі аксіоми $L.0-L.3$ і $\mathcal{TL}.0-\mathcal{TL}.3$ еквівалентні.

Оскільки $\mathcal{T} \xrightarrow{1} A$ ідеал в кільці A, то ми можемо розглядати фактор-кільце $\bar{A} = A/\mathcal{T}$. Зауважимо, що оскільки природний гомоморфізм $\pi : A \to \bar{A}$ кілець в елементарному топосі $\mathcal{E}$ є епіморфізмом, то справедлива формула

$$(\forall \bar{a})(\exists a)(\pi(a) = \bar{a}).$$

<u>Означення 6.</u> Кільце A в елементарному топосі $\mathcal{E}$ називається напівпростим у сенсі Джекобсона, якщо на ньому істинна аксіома

$$S\mathcal{T}.1 \quad (a \in \mathcal{T}) \Rightarrow (a = 0),$$

і слабо напівпростим у сенсі Джекобсона, якщо

$$S\mathcal{T}.2 \quad \neg(a = 0) \Rightarrow \neg(a \in \mathcal{T}).$$

Зрозуміло, що $S\mathcal{T}.1 \Rightarrow S\mathcal{T}.2$. Зворотна імплікація неправильна, як бачимо на прикладі топоса Серпінського.

<u>Теорема 7</u>. **Для довільного кільця A справедливі наступні твердження:**

I. Кільцевий фактор/об"єкт $A/\mathcal{T}$ — напівпростий у сенсі Джекобсона.

2. Якщо A задовольняє аксіому $\mathcal{TL}.2$, то $A/\mathcal{T}$ задовольняє аксіому $F.2$.

3. Якщо A задовольняє аксіому $\mathcal{TL}.3$, то $A/\mathcal{T}$ задовольняє аксіому $F.3$.

<u>Доведення.</u> I. Нехай $\pi : A \to A/\mathcal{T}$ — природний гомоморфізм. Тоді $Ann,\ \pi(a) = \bar{a},\ \pi(a') = \bar{a}',\ \pi(a'') = \bar{a}'' \vdash$

$$\vdash \pi((1 - aa')a'') = (\bar{1} - \bar{a}\bar{a}')\bar{a}''.$$

Отже, маємо

$$Ann, \pi(a) = \bar{a}, \pi(a') = \bar{a}', \pi(a'') = \bar{a}'', (\bar{1} - \bar{a}\bar{a}')\bar{a}'' = \bar{1} \vdash$$
$$\vdash \pi((1 - aa')a'') = \bar{1};$$

$$Ann,\ \bar{a} \in \mathcal{T}(\bar{A}), (\exists a)(\pi(a) = \bar{a}), (\exists a')(\pi(a') = \bar{a}') \vdash$$
$$\vdash (\exists a'')(\pi((1 - aa')a'') = \bar{1}) \vdash (\exists a'')(\pi((1 - aa')a'') - \bar{1} = \bar{0}) \vdash$$
$$\vdash (\exists a'')(((1 - aa')a'' - 1) \in \mathcal{T}(A)) \vdash$$
$$\vdash (\exists a'')((1 + ((1 - aa')a'' - 1)) \in \mathcal{U}(A)) \vdash$$
$$\vdash (\exists a'')((1 - aa')a'' \in \mathcal{U}(A)) \vdash$$
$$\vdash (a \in \mathcal{T}(A)) \vdash \bar{a} = \pi(a) = \bar{0},$$

тобто $Ann,\ \bar a \in \mathcal{T}(\bar A) \vdash \bar a = \bar 0$, звідки за теоремою дедукції отримуємо $Ann \vdash (\bar a \in \mathcal{T}(\bar A)) \Rightarrow (\bar a = \bar 0)$.

2. Маємо:

$$Ann, \mathcal{T}L.2, \neg(\bar a = \bar 0), \pi(a) = \bar a \vdash$$
$$\vdash Ann, \mathcal{T}L.2, \neg(\pi(a) = \bar 0) \vdash$$
$$\vdash Ann, \mathcal{T}L.2, \neg(a \in \mathcal{T}) \vdash Ann, (a \in \mathcal{U}) \vdash$$
$$\vdash (\exists a')(aa' - 1 = 0) \vdash$$
$$\vdash (\exists a')(\pi(aa' - 1) = \bar 0) \vdash$$
$$\vdash (\exists a')(\bar a \bar a' - \bar 1 = \bar 0) \vdash (\bar a \in \mathcal{U}(\bar A)).$$

Звідси за теоремою дедукції отримуємо:

$$Ann, \mathcal{T}L.2 \vdash \neg(\bar a = 0) \Rightarrow (\bar a \in \mathcal{U}(\bar A)).$$

3. Із теореми 4 отримуємо, що $\mathcal{T}L.3 \Rightarrow L.3$, тому це твердження є наслідком леми 2.6 [3].

Ураховуючи результати статті [2] /твердження 13/ і лему 2.7 [3], отримуємо.

Наслідок 8. Кільце A в елементарному топосі $\mathcal{E}$ слабо локальне тоді і тільки тоді, коли його радикал Джекобсона є ендомаксимальним.

Наслідок 9. Довільне поле в елементарному топосі $\mathcal{E}$ напівпросте в сенсі Джекобсона.

1. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983. 2. Dupont P. Maximality and primeness of ideals // Séminaire math. // Inst. math. pure a appl. 1988. Vol.1. N 5. P.149–170. 3. Johnstone P.T. Rings, fields and spectra // J. Algebra. 1978. Vol.1. N 2. P. 238–260. 4. Mulvey C. Intuitionistic algebra and representation of rings // Mem. of the Amer. Math. Soc. 1974. N 148. P. 3–58. 5. Osius G. Logical and set-theoretical tools in elementary topoi // Lecture Notes of Math. 1975. N 445. P. 297–346.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.93