УДК 515.12

Т.О.Банах

ПРО СЛАБКУ ТОПОЛОГІЮ ЗАМКНЕНОЇ ОДИНИЧНОЇ КУЛІ БАНАХОВОГО ПРОСТОРУ

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ - банахів простір. Через $B_X=\{x\in X\mid \|x\|\le 1\}$ позначаємо замкнену одиничну кулю простору X, наділену слабкою топологією, і через $B_{X^{**}}=\{x\in X^{**}\mid \|x\|\le 1\}$ - одиничну кулю другого спряженого простору X^{**}, наділену $*$- слабкою топологією. Канонічне вкладення $X\to X^{**}$ індукує вкладення $B_X\subset B_{X^{**}}$, при цьому підмножина B_X усюди щільна у $B_{X^{**}}$ [1].

У даній статті досліджуємо топологію одиничної кулі B_X, тобто топологію пари $(B_{X^{**}}, B_X)$.

Відомо, що куля $B_{X^{**}}$ метризована тоді і лише тоді, коли спряжений простір X^{**} сепарабельний. Тому надалі X -банахів простір із сепарабельним дуальним. Усі відображення вважаємо неперервними.

Нагадаємо, що $Q=[-1,1]^\omega$-гільбертів куб, $s=(-1,1)^\omega$ - його псевдовнутрішність і $\Sigma=\{(x_i)_{i=1}^\infty\in Q:\ \sup\{|x_i|:\ i\in N\}<1\}$- його радіальна внутрішність. Розглядатимемо такі класи сепарабельних метричних просторів: M_0 - клас компактів, M_1 - клас повнометризованих просторів, A_1 - клас σ-компактних просторів, A_2 - адитивний борелівський клас абсолютних $G_{\delta\sigma}$ -множин і M_2 - мультиплікативний борелівський клас абсолютних $F_{\sigma\delta}$ -множин. Гомеоморфізми позначаються символом «$\cong$».

Зауважимо, що якщо простір X є n -вимірним, $n<\infty$, тоді одинична куля $B_X=B_{X^{**}}$ гомеоморфна n -вимірному кубу $[0,1]^n$.

Якщо банахів простір X нескінченновимірний, тоді згідно з теоремою Банаха-Алаоглу [1], $B_{X^{**}}$-метризований опуклий нескінченновимірний компакт в локально опуклому просторі. За теоремою Келлера-Клі [4], куля $B_{X^{**}}$ гомеоморфна гільбертовому кубу $Q=[-1,1]^\omega$. Згідно з відомим критерієм рефлексивності, банахів простір X рефлексивний тоді і лише тоді, коли $B_X=B_{X^{**}}$. Звідси випливає твердження.

<u>Твердження 1.</u> Банахів простір X рефлексивний, сепарабельний і нескінченновимірний тоді і лише тоді, коли куля B_X гомеоморфна гільбертовому кубу Q.

Дещо складнішими є так звані банахові простори із польською кулею, тобто банахові простори X, для яких куля B_X - польський /тобто сепарабельний повнометризовний/ простір. У праці[9] доведено, що властивість банахового простору мати повну кулю зберігається ізоморфізмами, тобто не залежить від конкретно вибраної норми. Якщо другий спряжений простір X^{**}- сепарабельний /наприклад, коли X - сепарабельний квазірефлексивний банахів простір/, тоді X має повну кулю [9].

Наступне твердження випливає з теореми 3.3 [3].

Твердження 2. Якщо банахів простір X має польську кулю, тоді пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ гомеоморфна парі (Q, s).

Нагадаємо, що норма $\|\cdot\|$ на банаховому просторі X називається нормою Кадеця, якщо сильна збіжність на одиничній сфері $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ еквівалентна слабкій. Наприклад, норма на гільбертовому просторі, породжена скалярним добутком, є нормою Кадеця. Відомо [7], що кожен сепарабельний банахів простір допускає еквівалентну норму Кадеця.

Із вищенаведених тверджень випливає, що для банахових просторів із польською кулею топологія B_X не залежить від конкретно вибраної норми на X. У загальному випадку це не так. Для прикладу розглянемо банахів простір $X = c_0$ збіжних до нуля послідовностей дійсних чисел, наділений стандартною sup-нормою. Одинична куля B_X /відносно цієї норми/ є топологічним простором першої категорії, тобто є зліченним об"єднанням $B_X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in B_X \mid \forall m > n \ |x_m| \leq 1/2\}$ ніде не щільних /в слабкій топології/ множин. Водночас простір c_0 допускає кадецівську норму $\|\cdot\|_K$. Тоді одинична сфера S_K є всюди щільною в B_K абсолютною G_δ-множиною. Як наслідок, одинична куля B_K /стосовно кадецівської норми/ є берівським простором, тобто не є першої категорії.

Виникає природне запитання: чи існує якась топологічна властивість кулі B_X, яка не залежить від вибраної норми на X.

Для відповіді на це запитання нагадаємо означення сильно універсального простору, яке відіграє фундаментальну роль у нескінченно вимірній топології.

Замкнена підмножина A топологічного простору Y називається Z-множиною, якщо будь-яке відображення $f: Q \to X$ гільбертового куба апроксимується відображеннями в $Y \setminus A$. Вкладення $e: P \to Y$ називається Z-вкладенням, якщо $e(P)$-Z-множина в Y. Множина $A \subset Y$ називається σ-Z-множиною, якщо вона є зліченним об"єднанням Z-множин в Y. Символ $(A,B) \Subset \Subset (A',B')$ означає, що $A \subset A'$, $B \subset B'$ і $A \setminus B \subset A' \setminus B'$.

Нагадаємо, що M_0 - клас метричних компактів. Нехай C - деякий клас топологічних просторів. Топологічний простір Y /пара (Y, Z) / називається сильно C-універсальним /сильно (M_0, C)-універсальною/, якщо для будь-якої метрики d на Y, множини $A \in C$ /пари $(A, C) \in (M_0, C)$/, замкненої підмножини $B \subset A$ і відображення $f: A \to Y$ такого, що обмеження $f|B: B \to Y \in Z$ - вкладенням $(\exists f(B, B \cap C) \Subset (Y, Z))$ існує таке Z-вкладення $\bar{f}: A \to Y$, що $\bar{f}|B = f|B$, $d(\bar{f}(a), f(a)) < 1$, $a \in A$ (і $\bar{f}(A, C) \Subset (Y, Z)$).

<u>Гіпотеза</u>. Нехай X -банахів простір із сепарабельним дуальним. Якщо одинична куля B_X не польська, тоді вона сильно M_2-універсальна.

<u>Твердження.</u>3. Якщо X - банахів простір із сепарабельним спряженим і X містить лінійний підпростір, ізоморфний c_0 тоді куля B_X - сильно M_2-універсальна, а пара $(B_{X^{**}}, B_X)$- - сильно (M_0, M_2) -універсальна.

<u>Доведення</u>. Нехай $T: c_0 \to X$ - оператор вкладення /розглядаємо стандартну sup-норму на c_0 /. Без обмеження загальності $\|T\| \leq 1$ і $T(c_0)$ - підпростір нескінченної ковимірності в X. Відомо [6], що куля B_{c_0} сильно M_2-універсальна, а пара $(B_{c_0^{**}}, B_{c_0})$ сильно (M_0, M_2) -універсальна. Застосовуючи теорему 4.1 [3], одержуємо, що куля B_X сильно M_2 -універсальна, а пара $(B_{X^{**}}, B_X)$-(M_0, M_2)- універсальна.

Пара (Y, Y'), де Y - топологічна копія гільбертового куба, називається (M_0, C) -поглинальною /тут C - деякий клас топологічних просторів/, якщо (i) множина міститься в σ-Z-підмножині простору Y; (ii) $Y' = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$, де $Y_i \in C$, $i \in \mathbb{N}$ - замкнені множини в Y' і(iii) пара (Y, Y') сильно (M_0, C) -універсальна. У праці [2, 8] доведено, що за певних умов на клас C будь-які дві (M_0, C)- поглинальні пари гомеоморфні. У праці [5] побудовані поглинальні пари для всіх борелівських класів. Зокрема, пара $(Q, A_1) \cong (Q, \Sigma)$ (M_0, A_1)- поглинальна, пара $(Q, \Omega_2) \cong \cong (Q^\omega, A_1^\omega) \cong (Q^\omega, \Sigma^\omega)$-$(M_0, M_2)$- поглинальна і пара $(Q, A_2) \cong \cong (Q^\omega, W(Q \setminus \Omega_2, *))$-$(M_0, A_2)$-поглинальна. /Тут $* \in Q \setminus \Omega_2$ і $W(Q \setminus \Omega_2, *) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q^\omega \mid \exists n_0$ таке, що $x_i \in Q \setminus \Omega_2$ для $i \leq n_0$ і $x_i = *$ для $i > n_0\}$).

Теорема 1. Нехай $\|\cdot\|$ – норма Кадеця на банаховому просторі X із сепарабельним дуальним X^*. Якщо пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ сильно (M_0, M_2) - універсальна, тоді вона гомеоморфна парі $(Q, Q\setminus A_2)$.

Зауваження 1. У стандартній /не кадецівській/ sup-нормі на $X = c_0$ пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ гомеоморфна парі $(Q, \Omega_2) \cong (Q^\omega, \Sigma^\omega)$ [6].

Наслідок 1. Припустимо, що банахів простір X зі спряженим дуальним містить підпростір, ізоморфний c_0. Якщо норма $\|\cdot\|$ на X – кадецівська, тоді пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ гомеоморфне парі $(Q, Q\setminus A_2)$.

Доведення твердження 4 розіб"ємо на леми.

Лема 1. Для будь-якого банахового простору із сепарабельним спряженим X^*: $B_X \in M_2$.

Доведення. Із сепарабельності X^* випливає сепарабельність простору X. Нехай $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \subset B_X$ – зліченна всюди щільна множина. Розклад $B_X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} F_n^m$, де $F_n^m = \{x \in X^{**} \mid \|x\| \le 1, \|x - b_m\| \le 1/n\}$, показує, що B_X – $F_{\sigma\delta}$-множина в $B_{X^{**}}$. Оскільки $B_{X^{**}}$ – метризовний компакт, то $B_X \in M_2$. Лема доведена.

Лема 2. Нехай $\|\cdot\|$ – норма Кадеця на банаховому просторі X із сепарабельним спряженим. Тоді $B_{X^{**}}\setminus B_X$ міститься в σ-Z-множині $B_{X^{**}}\setminus S_X$ простору $B_{X^{**}}$ /тут $S_X = \{x \in B_{X^{**}} \mid x \in B_X$ і $\|x\| = 1\}$ - одинична сфера простору X в слабкій топології/.

Доведення. Оскільки $\|\cdot\|$ – норма Кадеця на X, тотожне відображення $(S_X, \|\cdot\|) \to (S_X, weak)$ є гомеоморфізмом. Звідси випливає, що S_X – G_δ - множина в $B_{X^{**}}$, а отже, $B_{X^{**}}\setminus S_X$ – F_σ - множина в $B_{X^{**}}$. Щоб показати, що $B_{X^{**}}\setminus S_X$ – σ-Z- множина, доведемо, що будь-яке відображення $f: Q \to B_{X^{**}}$ апроксимується відображеннями у сферу S_X. Дійсно, нехай $f: Q \to B_{X^{**}}$ – відображення гільбертового куба і $U \subset X^{**}$ – $*$- слабо відкритий окіл нуля. Необхідно побудувати таке відображення $\bar{f}: Q \to S_X$, що $\bar{f}(q) - f(q) \in U$ для кожного $q \in Q$. Без обмеження загальності, множина U – опукла і симетрична. Нехай $\mathcal{V}$ – таке скінченне покриття компакта Q, що $f(x)_f(y) \in U/3$ для будь-яких $x, y \in V \in \mathcal{V}$ і нехай $\{\lambda_V : Q \to [0,1]\}_{V \in \mathcal{V}}$ – розбиття одиниці, підпорядковане цьому покриттю. Для кожного $V \in \mathcal{V}$ виберемо $x_V \in B_X = \{x \in X \mid \|x\| < 1\} \subset B_{X^{**}}$, $x_V - x \in U/3$ для деякого $x \in f(V)$. /таке x_V існує, оскільки відкрита одинична куля B_X всюди щільна в $B_{X^{**}}$ [1]/. Нарешті, задамо відображення $f': Q \to B_{X^{**}}$ формулою $f'(q) = \sum_{V \in \mathcal{V}} \lambda_V(q) x_V$, $q \in Q$. Нескладно пересвідчитися, що $f(q) - f'(q) \in 2U/3$, $q \in Q$, і $f'(Q) \subset conv\{x_V \mid V \in \mathcal{V}\} \subset B_X$. Оскільки множина $U \subset X^{**}$ – $*$ - слабо відкрита, то перетин $X \cap (U/3)$ необмежений за нормою. Тоді існує точка $y \in V \cap X$

з $\|y\| > 2$. Для кожного $q \in Q$ приймаємо, що $f(q)$ – єдина точка перетину променя $f'(q) + [0, \infty) y$ зі сферою S_X. Нескладно перевірити, що побудоване відображення $f : Q \to S_X$ – неперервне /навіть у сильній топології/ і $\bar{f}(q) - f'(q) \in U/3$, $q \in Q$. Враховуючи $f'(q) - f(q) \in 2U/3$, одержуємо, що $\bar{f}(q) - f(q) \in U$ для кожного $q \in Q$. Лема доведена.

Перейдемо тепер до доведення теореми I. Зауважимо, що куля $B_{X^{**}}$ гомеоморфна гільбертовому кубу Q. Оскільки пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ сильно (M_0, M_2) – універсальна, то пара $(B_{X^{**}}, B_{X^{**}} \setminus B_X)$ сильно (M_0, A_2) – універсальна. Із лем 1 і 2 випливає, що пара $(B_{X^{**}}, B_{X^{**}} \setminus B_X)(M_0, A_2)$ – поглинальна, а отже, гомеоморфна парі (Q, Λ_2). Тобто пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ гомеоморфна парі $(Q, Q \setminus \Lambda_2)$.

I. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М., 2. Banakh T. Strongly universal and absorbing towers and tower manifolds, 1991 (Preprint). 3. Banakh T. The strongly universal property in closed convex sets, 1993 (Preprint). 4. Bessaga C., Pełczyński A. Selected topics in infinite-dimensional topology. Warszawa, 1975. 5. Bestvina M., Mogilski J. Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts // Michigan Math. J. 1986. Vol. 33. N3. P. 291-313. 6. Gladdines M., Mill J. van. Hyperspaces of peano continua of euclidean spaces, 1992 (Preprint). 7. Diestel J. Geometry of Banach Spaces // Selected Topics. Lecture Notes in Math. 485. Springer-Verlag, 1975. 8. Dijkstra J.J., Mill J. van., Mogilski J. The space of infinite-dimensional compacta and other topological copies of $(l_f^2)^\omega$ // Pacific J. Math. 1992. Vol. 152. P. 255-273. 9. Edgar G.A., Wheeler R.F. Topological properties of Banach spaces // Pacific J. Math. 1984. Vol. 115. N2. P. 317-350.

Стаття надійшла до редколегії I.06.93

УДК 513.88

О.Я.Мильо, О.Г.Сторож

ПРО ФУНКЦІЮ ВЕЙЛЯ ДЕЯКИХ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ЗВУЖЕНЬ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА

I. Нехай L_0 – замкнений додатно визначений лінійний оператор у гільбертовому просторі H з областю визначення $D(L_0)$ щільною в гільбертовому просторі H, та з індексом дефекту (m, m), $m < \infty$. У дослідженні спектральних властивостей різних класів розширень оператора L_0 важливу роль відіграє абстрактний аналог функції Вейля оператора Штурма-Ліувілля [7], який дробово-лінійним перетворенням відрізняється від характеристичної функції розглядуваного оператора [5, I2].

