з $\|y\| > 2$. Для кожного $q \in Q$ приймаємо, що $f(q)$ – єдина точка перетину променя $f'(q) + [0, \infty)\, y$ зі сферою S_X . Нескладно перевірити, що побудоване відображення $f: Q \to S_X$ – неперервне /навіть у сильній топології/ і $\bar{f}(q) - f'(q) \in U/3$, $q \in Q$. Враховуючи $f'(q) - f(q) \in 2U/3$, одержуємо, що $\bar{f}(q) - f(q) \in U$ для кожного $q \in Q$. Лема доведена.

Перейдемо тепер до доведення теореми I. Зауважимо, що куля $B_{X^{**}}$ гомеоморфна гільбертовому кубу Q . Оскільки пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ сильно (M_0, M_2) – універсальна, то пара $(B_{X^{**}}, B_{X^{**}} \setminus B_X)$ сильно (M_0, A_2) – універсальна. Із лем 1 і 2 випливає, що пара $(B_{X^{**}}, B_{X^{**}} \setminus B_X)(M_0, A_2)$ – поглинальна, а отже, гомеоморфна парі (Q, Λ_2) . Тобто пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ гомеоморфна парі $(Q, Q \setminus \Lambda_2)$.

1. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М., 2. Banakh T. Strongly universal and absorbing towers and tower manifolds, 1991 (Preprint). 3. Banakh T. The strongly universal property in closed convex sets, 1993 (Preprint). 4. Bessaga C., Pelczyński A. Selected topics in infinite-dimensional topology. Warszawa, 1975. 5. Bestvina M., Mogilski J. Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts // Michigan Math. J. 1986. Vol. 33. N 3. P. 291-313. 6. Gladdines M., Mill J. van. Hyperspaces of peano continua of euclidean spaces, 1992 (Preprint). 7. Diestel J. Geometry of Banach spaces // Selected Topics. Lecture Notes in Math. 485. Springer-Verlag, 1975. 8. Dijkstra J.J., Mill J. van., Mogilski J. The space of infinite-dimensional compacta and other topological copies of $(l_f^2)^\omega$ // Pacific J. Math. 1992. Vol. 152. P. 255-273. 9. Edgar G.A., Wheeler R.F. Topological properties of Banach spaces // Pacific J. Math. 1984. Vol. 115. N 2. P. 317-350.

Стаття надійшла до редколегії 1.06.93

УДК 513.88

О.Я.Мильо, О.Г.Сторож

ПРО ФУНКЦІЮ ВЕЙЛЯ ДЕЯКИХ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ЗВУЖЕНЬ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА

1. Нехай L_0 – замкнений додатно визначений лінійний оператор у гільбертовому просторі H з областю визначення $D(L_0)$ щільною в гільбертовому просторі H , та з індексом дефекту $(m,m), m < \infty$. У дослідженні спектральних властивостей різних класів розширень оператора L_0 важливу роль відіграє абстрактний аналог функції Вейля оператора Штурма-Ліувілля [7], який дробово-лінійним перетворенням відрізняється від характеристичної функції розглядуваного оператора [5, 12].

У цій статті згадані вище поняття трактуються з погляду теорії /абстрактних/ просторів граничних значень /п.г.з./ [1, 2, 4, 5].

Конкретніше, нехай L_K та L_F – відповідно м"яке /крейнове/ та жорстке /фрідріхсове/ розширення оператора L_0 [6] $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ – позитивний п.г.з. оператора L_0, що відповідає розширенню L_F /у сенсі [1, 4], H_e і $(\cdot|\cdot)_e$ – його енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток [2]. Далі нехай $\psi_1, \dots, \psi_r \in H_e$ – лінійно незалежні за модулем $D(L_F)$ /а отже, й за модулем $D(L_0^*)$), L_{min} – звуження оператора L_0 на множину $D(L_{min}) = \{y \in D(L_0) : (y|\psi_i)_e = 0, i = \overline{1,r}\}$.

$$L_{max} \overset{def}{=} L_{min}^*, \quad \psi_y \overset{def}{=} ((y|\psi_1)_e, \dots, (y|\psi_r)_e),$$
$$L_\lambda \overset{def}{=} (L_F - \lambda 1_H)^{-1}, \; Z_\lambda \overset{def}{=} (\Gamma_1 L_\lambda)^*, \; M(\lambda) \overset{def}{=} \Gamma_1 Z_\lambda, \; \lambda < 0.$$

Відомо [11], що $M(\lambda)$ є функцією Вейля оператора L_0 /у сенсі [3] /, яка відповідає п.г.з. $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$. Крім цього, з праць [3, 11, 13] випливає, що

$$\lim_{\lambda \to -\infty} M(\lambda)^{-1} = 0, \quad M(0) = 0. \qquad /1/$$

Приймемо, що $\psi_c^0 = \sum_{i=1}^{r} c_i \psi_i$, де $c = (c_1, \dots, c_r) \in \mathbb{C}^r$, $R(\psi^0) = sp\{\psi_1, \dots, \psi_r\}$. Відомо [9, 10], що $D(L_{max}) = D(L_0^*) \dot{+} R(\psi^0)$. Позначимо через Q проектор $D(L_{max}) \to D(L_0^*)$, що відповідає цьому розкладові, а через $\mathcal{P}$ – проектор $H_e \dot{+} \ker L_0^* \to H_e$ паралельно $\ker L_0^*$ і вважатимемо, що

$$\Gamma_3 y \overset{def}{=} -(\alpha_1(y), \dots, \alpha_r(y)), \quad \Gamma_4 y \overset{def}{=} \psi \mathcal{P} y$$

/де функціонали α_i визначаються з умови $Qy = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(y) \psi_i$),

$$\hat{\Gamma}_1 y \overset{def}{=} (\Gamma_1 y, \Gamma_3 y), \; \hat{\Gamma}_2 y \overset{def}{=} (\Gamma_2 y, \Gamma_4 y), \; y \in D(L_{max})$$

/тут вважається, що оператори Γ_1, Γ_2 продовжені з $D(L_0^*)$ на $D(L_{max})$ по лінійності нулем на $R(\psi^0)$).

Відомо [9, 10], що $(\mathbb{C}^{m+r}, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2)$ – п.г.з. /у сенсі [1, 5] оператора L_{min}. Метою роботи є побудова функції Вейля $\hat{M}(\lambda)$ [3] оператора L_{min}, яка відповідає цьому п.г.з., і визначення для неї аналогів співвідношень /1/.

2. Позначимо через $\hat{Z}_\lambda(a,c)$ $(a \in \mathbb{C}^m, c \in \mathbb{C}^r)$ розв"язок рівняння $L_{max} y = \lambda y$ такий, що

$$\Gamma_2 y = a, \quad \Gamma_4 y = c. \qquad /2/$$

Оскільки $L_0^* Z_\lambda = \lambda Z_\lambda$ і $\Gamma_2 Z_\lambda a = a \; (a \in \mathbb{C}^m)$,

то

$$y=\hat{Z}_\lambda(a,c)=Z_\lambda\tilde{a}+\lambda L_\lambda\Psi^o\tilde{c}+\Psi^o\tilde{c}, \qquad /3/$$

де $\tilde{a}\in\mathbb{C}^m$, $\tilde{c}\in\mathbb{C}^r$ вибираємо виходячи з умови /2/. Як показують безпосередні обчислення:

$$\begin{pmatrix}\tilde{a}\\ \tilde{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\mathcal{F}(\lambda)^{-1}\psi(\lambda) & \mathcal{F}(\lambda)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}, \qquad /4/$$

де

$$\mathcal{F}(\lambda)=(\lambda\Psi L_\lambda\Psi^o+\Psi\Psi^o,\ \Psi(\lambda)=\Psi(Z_\lambda-Z_0). \qquad /5/$$

Виходячи з /4/ і /5/ та зі співвідношення $\hat{M}(\lambda)=\hat{\Gamma}_1\hat{Z}_\lambda$ [8, 11], отримуємо:

Теорема.

$$\hat{M}(\lambda)=\begin{pmatrix}M(\lambda) & \psi(\lambda)^*\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \psi(\lambda) & \mathcal{F}(\lambda)\end{pmatrix}^{-1}. \qquad /6/$$

Наслідок 1.

$$\hat{M}(0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -(\psi\psi^o)^{-1}\end{pmatrix}. \qquad /7/$$

Наслідок 2.

$$\hat{M}(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \psi(\lambda) & \mathcal{F}(\lambda)\end{pmatrix}^{*-1}\begin{pmatrix}M(\lambda) & 0\\ 0 & -\mathcal{F}(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \psi(\lambda) & \mathcal{F}(\lambda)\end{pmatrix}^{-1}. \qquad /8/$$

Наслідок 3.

$$\hat{M}(\lambda)^{-1}=\begin{pmatrix}M(\lambda)^{-1} & M(\lambda)^{-1}\psi(\lambda)^*\\ \psi(\lambda)M(\lambda)^{-1} & \psi(\lambda)M(\lambda)^{-1}\psi(\lambda)^*-\mathcal{F}(\lambda)\end{pmatrix}. \qquad /9/$$

Твердження.

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\hat{M}(\lambda)^{-1}=0. \qquad /10/$$

Доведення. Співвідношення $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\Psi(\lambda)M(\lambda)^{-1}=0$ випливає з оцінки $\|\Psi(\lambda)M(\lambda)^{-1}a\|\leq\|\Psi\|\cdot\|\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda M(\lambda)^{-1}a\|$ і рівності $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\|\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda M(\lambda)^{-1}a\|=0$, у справедливості якої неважко переконатися, якщо в очевидній тотожності $\|\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda b\|^2-\lambda\|Z_\lambda b\|^2=-(M(\lambda)b\mid b)$ прийняти $b=M(\lambda)^{-1}a$ і використати першу з умов /1/.

Із нерівності

$$\|(\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda)M(\lambda)^{-1}(\lambda Z_\lambda^*L_F^{-1/2})g\|^2\leq$$
$$\leq\|(\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda)M(\lambda)^{-1}(\lambda Z_\lambda^*L_F^{-1/2})g\|\cdot\|g\|$$

випливає, що $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda)M(\lambda)^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2})=0$,
а отже, й $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\psi(\lambda)M(\lambda)^{-1}\psi(\lambda)^*=0$.

Нарешті, співвідношення $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\mathcal{F}(\lambda)=0$ випливає з рівності $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}L_F^{-1/2}(\lambda L_\lambda+1_H)L_F^{-1/2}=0$, яка є безпосереднім наслідком рівності $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\lambda L_\lambda=-1_H$.

3. Висновки:

а/ $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(\hat{M}(\lambda)-\hat{M}(0))^{-1}=0$; /II/

б/ з /II/ та результатів праць [3, II] випливає, що жорстке розширення оператора L_{min} та м"яке розширення оператора L_{min} - це звуження оператора L_{max}, які визначаються умовами

$$\hat{\Gamma}_2 y=0$$

та відповідно

$$\hat{\Gamma}_1 y-\hat{M}(0)\hat{\Gamma}_2 y=0.$$

I. Брук В.М. О расширениях симметрических отношений // Мат. заметки. 1977. Т.22. № 6. С.825-834. 2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К., 1984. 3. Деркач В.А., Маламуд М.М. Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. Донецк, 1985. /Препринт/АН УССР. ДонФТИ; 85-9/. 5. Кочубей А.Н. О характеристических функциях симметрических операторов // Изв. АН Арм ССР. Математика. 1980. № 3. С.218-232. 4. Кочубей А.Н. О расширениях положительно определенного оператора // ДАН УССР. Сер. А. 1979. № 3. С.168-171. 6. Крейн М. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов // Мат. сб. 1947. Т.20. С.431-498. 7. Левитан Б.М., Саргсян И.М. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М., 1988. 8. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. К., 1983. 9. Мильо О.Я., Сторож О.Г. Про загальний вигляд максимально акретивного розширення додатно визначеного оператора // Доп. АН УРСР. 1991. № 6. С.19-22. 10. Мильо О.Я. Умови самоспряженості та максимальної акретивності диференціального оператора Штурма-Ліувілля на проміжку з інтегральними граничними умовами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.36. С.34-38. II. Сторож О.Г. Опис деяких класів розширень невід"ємного оператора // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1987. № 10. С.14-16. 12. Штраус А.В. О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т.32. № 1. С.186-207. 13. Штраус А.В. О расширениях полуограниченного оператора // Доп. АН СССР. 1973. Т.211. № 3. С,543-546.

Стаття надійшла до редколегії 12.04.93