УДК 539.3

Д.В.Грилицький, Б.М.Стасюк

СТАЦІОНАРНА ТЕПЛОВА ЗАДАЧА ТЕРТЯ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ СКІНЧЕННОЇ ШИРИНИ

Нехай маємо пакет, що складається з двох пластин скінченної ширини l та скінченної висоти H_1 і H_2 відповідно. Уздовж осі Oz пластини нескінченні /рис. 1/. Вважаємо, що механічні і теплові характеристики пластин різні і не залежать від температури. Контакт між пластинами такий, що відставання неможливе. Пакет перебуває в умовах плоскої деформації. Бічна поверхня пластин вільна від зовнішнього навантаження. Між пластинами пакета діє притискне навантаження P_0, що має розмірність напружень. Нижня основа пакета жорстко закріплена. Друга пластина лежить на першій і рухається по ній рівномірно зі швидкістю V_0. На площині контакту пластин за рахунок сил тертя відбувається процес стаціонарного теплоутворення. Потрібно визначити розподіл температурного поля і теплового потоку в пакеті за умови, що між складовими пакета існує неідеальний тепловий контакт, а з бічних поверхонь, верхньої та нижньої основ пакета відбувається тепловіддання у зовнішнє середовище. Для розв"язування задачі виберемо декартову систему координат так, як показано на рис. 1.

Запишемо граничні та контактні умови:

$$
\begin{aligned}
&y=H_2: \frac{\partial \theta_2}{\partial y}+h_2\theta_2=h_2T_2;\\
&y=-H_1: \frac{\partial \theta_1}{\partial y}-h_1\theta_1=-h_1T_1;\\
&y=0: \lambda_1\frac{\partial \theta_1}{\partial y}-\lambda_2\frac{\partial \theta_2}{\partial y}=fV_0P_0;\\
&\qquad \lambda_1\frac{\partial \theta_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial \theta_2}{\partial y}+h(\theta_1-\theta_2)=0;\\
&x=0: \frac{\partial \theta_k}{\partial x}-h_0\theta_k=-h_0T_0;\\
&x=l: \frac{\partial \theta_k}{\partial x}+h_l\theta_k=h_lT_l; \qquad (k=1,2)
\end{aligned}
\qquad /1/
$$

---

* Робота виконана при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.

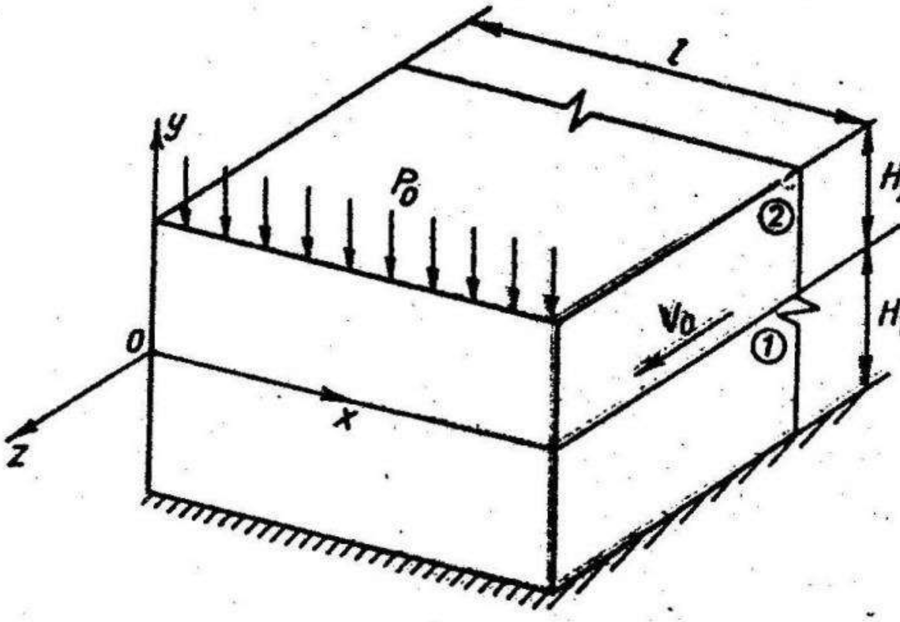


Рис. I.

де $\theta_1(x,y)$, $\theta_2(x,y)$ – температура відповідно першої та другої пластини; h_1, h_2, h_0, h_l – коефіцієнти відносного тепловіддання на нижній, верхній основах та на торцях; T_1, T_2, T_0, T_l – температура навколишнього середовища на нижній, верхній основах та на торцях; λ_1, λ_2 – коефіцієнти теплопровідності; h – термічна провідність площини контакту; f – коефіцієнт тертя.

Поставлена задача зводиться до побудови розв"язку рівняння стаціонарної теплопровідності:

$$\frac{\partial^2\theta_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta_k}{\partial y^2}=0 \qquad (k=1,2); \qquad /2/$$

за граничних та контактних умов / I/. Для побудови розв"язку цієї задачі застосуємо інтегральне перетворення зі скінченними межами*. Однорідності граничних умов на торцях досягнемо за допомогою співвідношення:

$$\theta_k(x,y)=C_1x+C_2+t_k(x,y); \qquad (k=1,2) \qquad /3/$$

де $t_k(x,y)$ – нова невідома функція; C_1, C_2 – деякі константи. Умови на торцях будуть однорідними, якщо

$$C_1=\frac{h_0h_l(T_l-T_0)}{h_0+h_0h_l\cdot l+h_l}; \quad C_2=\frac{h_lT_l+h_0T_0+h_0h_lT_l\cdot l}{h_0+h_0h_l\cdot l+h_l}. \qquad /4/$$

---

* К о ш л я к о в Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., 1962. 767 с.

Підставляючи /3/ в /1/, /2/, маємо

$$\frac{\partial^2 t_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_k}{\partial y^2} = 0; \qquad (k=1,2) \qquad /5/$$

$$x=0: \frac{\partial t_k}{\partial x} - h_0 t_k = 0; \quad x=l: \frac{\partial t_k}{\partial x} + h_0 t_k = 0; \qquad /6/$$

$$y=H_2: \frac{\partial t^2}{\partial y} + h_2 t_2 = \varphi_2(x); \quad y=-H_1: \frac{\partial t_1}{\partial y} - h_1 t_1 = \varphi_1(x); \qquad /7/$$

$$y=0: \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} = V_0 f P_0; \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} + h(t_1 - t_2) = 0; \qquad /8/$$

де $\varphi_1(x) = h_1(c_1 x + c_2 - T_1)$; $\varphi_2(x) = h_2(T_2 - c_1 x - c_2)$. Ядро прямого перетворення визначається за формулою

$$\hat{K}_n(x) = \frac{K_n(x)}{R_n}; \qquad /9/$$

$$K_n(x) = \cos\mu_n x + \frac{h_0}{\mu_n}\sin\mu_n x; \qquad /10/$$

$$R_n = \int_0^l K_n^2(x)dx = \frac{\mu_n^2 + h_0^2}{2\mu_n^2}\cdot l + \frac{h_0}{\mu_n^2}\sin^2\mu_n l + \frac{1}{4\mu_n}\left(1 - \frac{h_0^2}{\mu_n^2}\right)\sin 2\mu_n l. \qquad /11/$$

Власні значення μ_n знаходимо з рівняння

$$tg\,\mu_n l = \frac{\mu_n(h_0 + h_l)}{\mu_n^2 - h_0 h_l}. \qquad /12/$$

Застосовуючи інтегральне перетворення з ядром /9/ до рівняння /5/ та умов /7/, /8/, одержуємо

$$\frac{\partial^2 \bar{t}_k}{\partial y^2} - \mu_n^2 \bar{t}_k = 0; \qquad (k=1,2) \qquad /13/$$

$$y=H_2: \frac{d\bar{t}_2}{\partial y} + h_2 \bar{t}_2 = \bar{\varphi}_n^{(2)}; \quad y=-H_1: \frac{d\bar{t}_1}{\partial y} - h_1 \bar{t}_1 = \bar{\varphi}_n^{(1)}; \qquad /14/$$

$$y=0: \lambda_1 \frac{d\bar{t}_1}{dy_l} - \lambda_2 \frac{d\bar{t}_2}{dy} = \bar{\varphi}_n; \quad \lambda_1 \frac{d\bar{t}_1}{dy} + \lambda_2 \frac{d\bar{t}_2}{dy} + h(\bar{t}_1 - \bar{t}_2) = 0, \qquad /15/$$

де $\bar{\varphi}_n^{(1)} = \frac{1}{R_n}\int_0^l \varphi_1(x)K_n(x)dx$; $\bar{\varphi}_n^{(2)} = \frac{1}{R_n}\int_0^l \varphi_2(x)K_n(x)dx$;

$$\bar{\varphi}_n = \frac{V_0 f P_0}{R_n}\int_0^l K_n(x)dx. \qquad /16/$$

Розв'язок рівняння /13/ задається формулою

$$\bar{t}_k(y) - A_{k_n} sh\mu_n y + B_{k_n} ch\mu_n y; \quad (k=1,2) \qquad /17/$$

де сталі A_{k_n} та B_{k_n} , визначаються згідно з умовами /I4/ та /I5/

$$A_{1n}=\frac{\bar{\varphi}_n+\lambda_2 \delta_n}{\lambda_1\mu_n+\lambda_2\mu_n F_n}; \quad B_{1n}=\frac{A_{1n}\mathcal{H}_{11}-\bar{\varphi}_n^{(1)}}{\mathcal{H}_{12}}; \qquad /I8/$$

$$A_{2n}=\frac{-\bar{\varphi}_n\cdot F_n+\lambda_1 S_n}{\lambda_1\mu_n+\lambda_2\mu_n F_n}; \quad B_{2n}=\frac{\bar{\varphi}_n^{(2)}-A_{2n}\mathcal{H}_{21}}{\mathcal{H}_{22}};$$

$$\delta_n=\frac{h\mu_n(\bar{\varphi}_n^{(1)}\mathcal{H}_{22}+\bar{\varphi}_n^{(2)}\mathcal{H}_{12})}{\mathcal{H}_{12}(\lambda_2\mu_n\mathcal{H}_{22}+h\mathcal{H}_{21})}; \quad F_n=\frac{\lambda_1\mu_n\mathcal{H}_{12}+h\mathcal{H}_{11}}{\lambda_2\mu_n\mathcal{H}_{22}+h\mathcal{H}_{21}}. \qquad /I9/$$

$$\mathcal{H}_{11}=\mu_n ch\mu_n H_1+h_1 sh\mu_n H_1; \quad \mathcal{H}_{21}=\mu_n ch\mu_n H_2+h_2 sh\mu_n H_2;$$

$$\mathcal{H}_{12}=\mu_n sh\mu_n H_1+h_1 ch\mu_n H_1; \quad \mathcal{H}_{22}=\mu_n sh\mu_n H_2+h_2 ch\mu_n H_2. \qquad /20/$$

Здійснивши обернене перетворення, знаходимо розв"язок задачі для k-ї пластини:

$$\theta_k(x,y)=c_1x+c_2+\sum_{n=1}^{\infty}(A_{k_n}sh\mu_n y+B_{k_n}ch\mu_n y)(\cos\mu_n x+\frac{h_0}{\mu_n}\sin\mu_n x). \quad (k=1,2) \qquad /2I/$$

За законом Фур"є складові вектора густини теплового потоку в k-й пластині дорівнюють

$$q_{x_k}=-\lambda_k\left(c_1+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_{k_n}sh\mu_n y+B_{k_n}ch\mu_n y)\left(\frac{h_0}{\mu_n}\cos\mu_n x-\sin\mu_n x\right)\right); \qquad /22/$$

$$q_{y_k}=-\lambda_k\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_{k_n}ch\mu_n y+B_{k_n}sh\mu_n y)(\cos\mu_n x+\frac{h_0}{\mu_n}\sin\mu_n x). \qquad /23/$$

З використанням отриманого розв"язку обчислені температурне поле і тепловий потік за таких вхідних даних:
$H_1=0{,}15$ м, $h_1=h_2=20$ м$^{-1}$, $T_1=T_2=T_0=T_l=0$ K, $f=0{,}15$,
$H_2=0{,}1$ м, $h_0=h_l=20$ м$^{-1}$, $P_0=1000$ кН/м^2, $V_0=2$ м/с,
$\lambda_1=\lambda_2=50$ Вт/м$\cdot$К, $l=0{,}3$м, $h=1$ кВ/м$\cdot$К.

Про величину та характер розподілу температурного поля і теплового потоку на основах пластин можна судити з рис. 2,а і рис. 3,а. Розподіл температури і теплового потоку по осі Oy по-

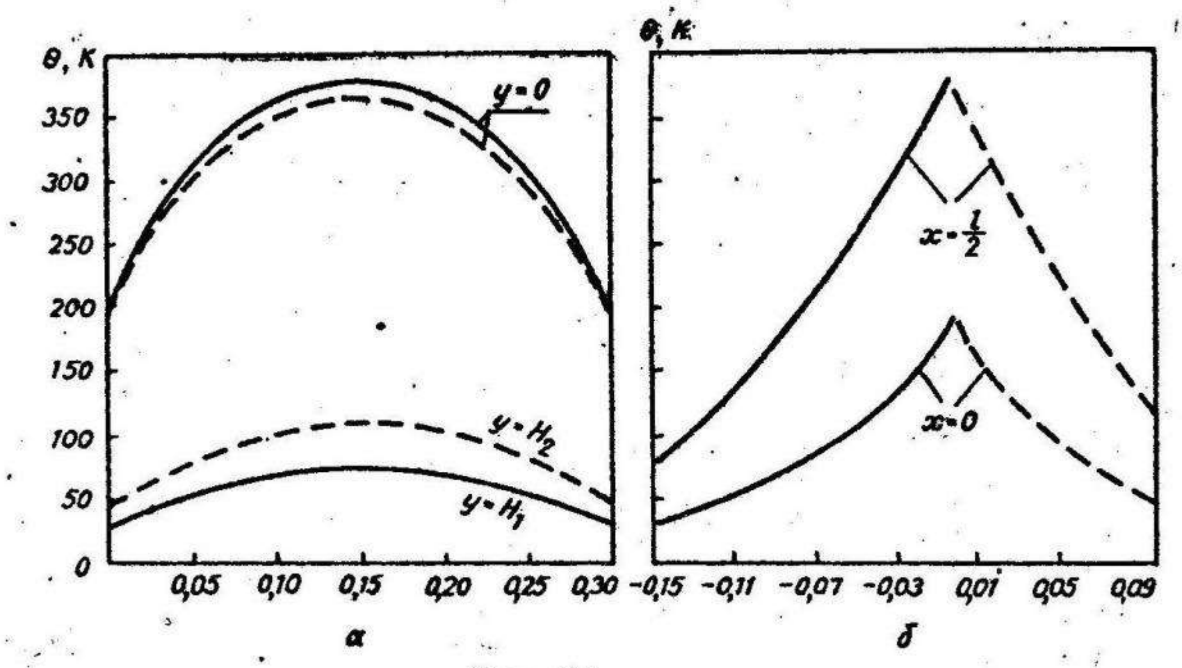


Рис. 2.

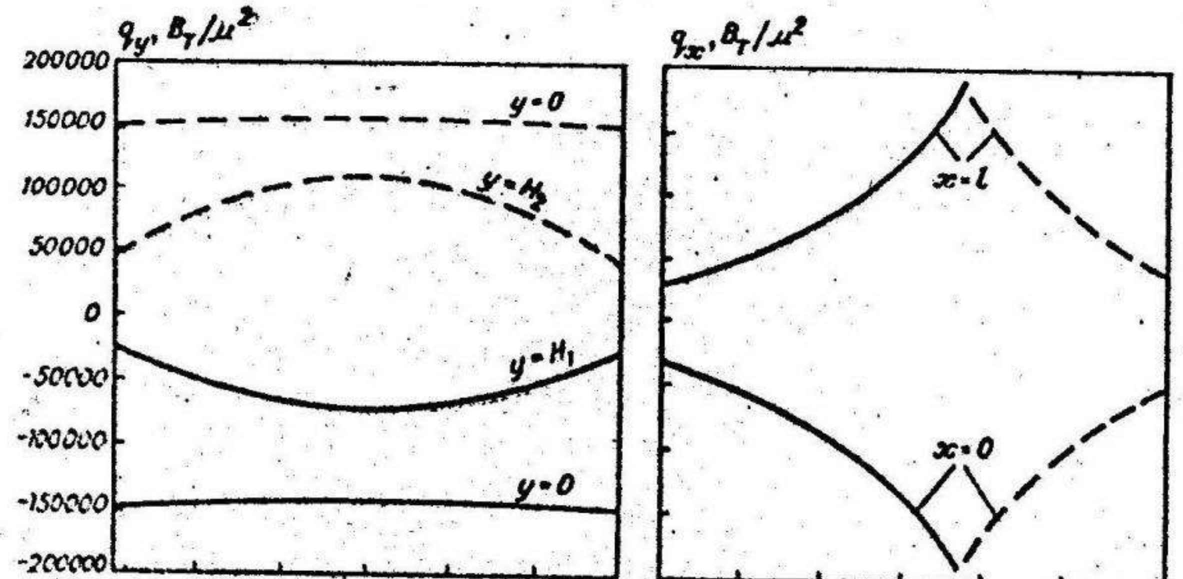


Рис. 3.

даний відповідно на рис. 2, б і рис. 3,б. На обох рисунках суцільною лінією позначені графіки, що стосуються до першої пластини, а штриховою – другої.

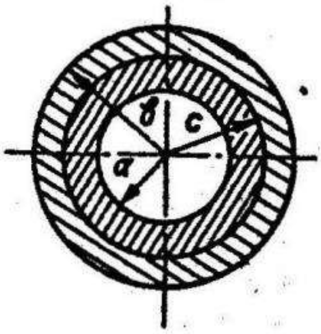
Стаття надійшла до редколегії 10.06.93

УДК 539.3

Д.В.Гриліцький, Ю.І.Мандзик

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ І ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ДВОШАРОВОГО ОРТОТРОПНОГО ЦИЛІНДРА ЗА ФРИКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ*

Розглянемо контактну взаємодію двошарового круглого порожнистого циліндра. Один пустотілий круглий циліндр з внутрішнім радіусом $r' = a$ і зовнішнім радіусом $r' = c$ вставлений у такої ж форми другий циліндр із внутрішнім радіусом $r' = c$ та зовнішнім радіусом $r' = b$ /див. рисунок/.



Матеріали складових пакета є циліндрично-ортотропними. На обох бічних поверхнях задаються радіальні переміщення чи радіальні напруження або ж на одній бічній поверхні задаються радіальні переміщення, а на другій – радіальні напруження. Допустимо, що один з циліндрів обертається відносно іншого з малою кутовою швидкістю ω.

* Робота виконана при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.