УДК 539.3

О.В.Тумашова

РОЗВ"ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО НЕЛІНІЙНУ ДЕФОРМАЦІЮ НЕСКІНЧЕННО ДОВГОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ

При дослідженні деформації циліндричних панелей скінченних розмірів цікаво порівняти одержані результати з розв"язками задачі для нескінченно довгої циліндричної панелі.

Розглянемо нескінченно довгу пологу циліндричну панель радіусом R, серединна поверхня якої належить до системи координат xoy. Вважаємо, що товщина і кривина панелі змінюються по напрямній y. Панель перебуває під дією навантаження $q_y = q$.

Дана задача описується системою звичайних диференціальних рівнянь, яку можна отримати з рівнянь [1, 2], нехтуючи в них похідними по x. Внаслідок деяких перетворень отримуємо розв"язувальну систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь для нескінченно довгої циліндричної панелі в безрозмірному вигляді:

$$\frac{dV^*}{dy^*} = \frac{(1-\nu^2)}{h^*} N_y^* + \frac{K^* w^*}{4} - \frac{1}{2} \vartheta_y^{*2};$$

$$\frac{dw^*}{dy^*} = -\vartheta_y^*; \quad \frac{d\vartheta_y^*}{dy^*} = \frac{12(1-\nu^2)}{h^{*3}} M_y^*;$$

$$\frac{dN_y^*}{dy^*} = 0; \quad \frac{dQ_y^*}{dy^*} = -\frac{N_y^* K^*}{4} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^{*3}} N_y^* M_y^* - \frac{q^*}{16}; \qquad /1/$$

$$\frac{dM_y^*}{dy^*} = Q_y^*;$$

$$N_y^* = \frac{b^2}{E h_0^3} N_y; \qquad M_y^* = \frac{b^2}{E h_0^4} M_y;$$

$$q^* = \frac{(2b)^4}{E h_0^4} q; \qquad Q_y^* = \frac{b^3}{E h_0^4} Q_y;$$

$$V^* = \frac{b}{h_0^2} V; \quad \vartheta_y^* = \frac{b}{h_0} \vartheta_y; \quad w^* = \frac{w}{h_0};$$

$$h^{\gamma}=\frac{h(y)}{h_0};\quad y^{\gamma}=\frac{y}{b};\quad K^{\gamma}(y)=\frac{4b^2}{R(y)h_0},$$

де u, v, w - переміщення; ϑ_y - кут повороту; N_y, Q_y, M_y зусилля і моменти; E, ν - модуль пружності та коефіцієнт Пуассона; $h=h(y)$ - товщина; $K=K(y)$ - кривина напрямної; h_0 - товщина у вершині панелі / $y=0$ /; b - ширина панелі.

Задаємо граничні умови на прямолінійних контурах $y^{\gamma}=\pm 1$ у вигляді

$$W^{\gamma}=N_y^{\gamma}=M_y^{\gamma}=0. \qquad /2/$$

Таким чином, розв"язок задачі про деформацію гнучких нескінченно довгих неколових циліндричних панелей зі змінною товщиною по напрямній зводиться до розв"язку нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь шостого порядку, граничні умови задаються на прямолінійних контурах панелі.

Розглядаємо два підходи до розв"язку даної задачі: точний розв"язок і розв"язок на основі метода Власова-Канторовича. Спочатку отримуємо точний розв"язок крайової задачі /I/, /2/ для колової нескінченно довгої циліндричної панелі постійної товщини, яка перебуває під дією поверхневого навантаження

$$q^{\gamma}=q_0^{\gamma}\cos\frac{\pi}{2}y^{\gamma}.$$

Диференціюємо друге рівняння системи /I/ по y^{γ} і підставляємо в нього третє рівняння. Тоді пропустивши γ, одержимо

$$\frac{d^2W}{dy^2}=-\frac{12(1-\nu^2)}{h^3}M_y. \qquad /3/$$

Аналогічні перетворення застосовуємо до шостого рівняння і підставляємо в нього п"яте рівняння, внаслідок чого отримуємо

$$\frac{d^2M_y}{dy^2}=-\frac{N_yK}{4}+\frac{12(1-\nu^2)}{h^3}N_yM_y-\frac{q}{16}. \qquad /4/$$

Диференціюємо /4/ двічі по y і враховуючи, що $N_y=0$, маємо

$$\frac{d^4W}{dy^4}=\frac{3(1-\nu^2)}{4h^3}q. \qquad /5/$$

Розв"язуючи рівняння /5/, отримуємо значення прогину W: $W=W_0\cos\frac{\pi}{2}y$, де $W_0=\frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4h^3}$ - амплітудне значення прогину.

Враховуючи симетрію задачі, граничні умови /2/ можна записати у вигляді

$$V=\vartheta_y=Q_y=0 \quad \text{при} \quad y=0\,, \qquad /6/$$
$$W=N_y=M_y=0 \quad \text{при} \quad y=1\,.$$

Тоді після деяких перетворень і враховуючи /6/, одержуємо решту розв"язувальних функцій:

$$V=\frac{K_y W_0}{2\pi}\sin\frac{\pi}{2}y-\frac{W_0^2\pi^2}{16}\left(y-\frac{\sin\pi y}{\pi}\right);$$
$$\vartheta_y=\frac{\pi}{2}W_0\sin\frac{\pi}{2}y;\quad Q_y=-\frac{q_0}{8\pi}\sin\frac{\pi}{2}y;$$
$$M_y=\frac{q_0}{4\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}y.$$

Точний розв"язок крайової задачі /1/, /2/ записуємо для амплітудних значень розв"язувальних функцій у вигляді

$$V=\frac{K_y W_0}{2\pi}-\frac{W_0^2\pi^2}{16};\quad W_0=\frac{12(1-\nu^2)}{\pi 4h^3}q_0\,;.$$
$$\vartheta_{y0}=\frac{\pi}{2}W_0;\quad Q_{y0}=-\frac{q_0}{8\pi};\quad M_{y0}=\frac{q_0}{4\pi^2}.$$

Щоб отримати розв"язок за методом Власова-Канторовича [2], необхідно розкласти розв"язувальні функції в ряд таким чином, щоб на прямолінійних контурах панелі виконувались граничні умови /2/:

$$\left\{W^{\gamma},N_y^{\gamma},M_y^{\gamma},q^{\gamma}\right\}=\sum_{i=1}^{p}\left\{W_i^{\gamma},N_{yi}^{\gamma},M_{yi}^{\gamma},q_i^{\gamma}\right\}\cos\frac{i\pi}{2}y^{\gamma};$$
$$\left\{V^{\gamma},\vartheta_y^{\gamma},Q_y^{\gamma}\right\}=\sum_{i=1}^{p}\left\{V_i^{\gamma},\vartheta_{yi}^{\gamma},Q_{yi}^{\gamma}\right\}\sin\frac{i\pi}{2}y^{\gamma}. \qquad /7/$$

Розглянемо гнучку пологу нескінченно довгу циліндричну панель постійної товщини, яка перебуває під дією навантаження:

$$q^{\gamma}=q_0^{\gamma}\cos\frac{\pi}{2}y^{\gamma} \qquad -1\leq y^{\gamma}\leq 1.$$

На прямолінійних контурах виконуються граничні умови /6/. Задачу розв"язуємо за таких параметрів:

$$h^{\gamma}=1;\ K^{\gamma}=10;\ \nu=0{,}3;\ q_0^{\gamma}=5;10;20.$$

У таблиці наведені амплітудні значення для колового переміщення V при $y^{\gamma}=1$, отриманих точно і за допомогою метода Власова-Канторовича для $p=1,3,7,8,9$, що відповідає кількості утримуваних членів рядів /7/. Як бачимо з таблиці, для розв"язку задачі необхідно взяти дев"ять членів ряду, щоб отримати достатньо точний розв"язок.

q_0^{γ}	Точний розв"язок	Розв"язок за методом Власова-Канторовича				
		$\rho = 1$	$\rho = 3$	$\rho = 7$	$\rho = 8$	$\rho = 9$
5	0,6983	0,7874	0,7623	0,7106	0,7030	0,6986
10	1,0090	1,3652	1,1147	1,0655	1,0282	1,0103
20	0,4675	1,8927	0,8906	0,6939	0,5445	0,4728

Наведену оцінку для функції V можна віднести до всіх функцій. На основі цього можна зробити висновок, що для панелей подібного класу, застосовуючи метод Власова-Канторовича, маємо аналогічні результати.

1. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1983. 2. Григоренко Я.М., Тумашова О.В. Напряженно-деформированное состояние гибких цилиндрических панелей с переменными геометрическими параметрами // Прикл. механика. 1989. Т.25. № 5. С.36-45.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.93

УДК 539.3

В.П.Левицький, Р.В.Юринець

ФОКУСУВАННЯ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ І РУХОМІЙ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Уперше принцип максимуму модуля для хвильового скалярного рівняння довів Г.Д.Малюжинець [2]. У праці [1] узагальнені ці теореми для векторних рівнянь термопружності. При цьому вважалося, що рівняння теплопровідності є параболічного типу.

Доведемо існування певних множин у комплексній площині спектрального параметра, при яких маємо принцип максимуму модуля.

Розглянемо рівняння узагальненої термопружності [5]:

$$\Delta t = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{1}{c_q^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2}, \qquad /1/$$

де t - температура; τ - час; a - коефіцієнт теплопровідності; c_q - швидкість поширення тепла; Δ - оператор Лапласа.

У просторі зображень Фур"є по часу рівняння /1/ має вигляд

$$\Delta t^F + \left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right) t^F = 0. \qquad /1'/$$