q_o^{γ}	Точний розв"язок	Розв"язок за методом Власова-Канторовича				
		$\rho = 1$	$\rho = 3$	$\rho = 7$	$\rho = 8$	$\rho = 9$
5	0,6983	0,7874	0,7623	0,7106	0,7030	0,6986
10	1,0090	1,3652	1,1147	1,0655	1,0282	1,0103
20	0,4675	1,8927	0,8906	0,6939	0,5445	0,4728

Наведену оцінку для функції V можна віднести до всіх функцій. На основі цього можна зробити висновок, що для панелей подібного класу, застосовуючи метод Власова-Канторовича, маємо аналогічні результати.

1. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1983. 2. Григоренко Я.М., Тумашова О.В. Напряженно-деформированное состояние гибких цилиндрических панелей с переменными геометрическими параметрами // Прикл. механика. 1989. Т.25. № 5. С.36-45.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.93

УДК 539.3

В.П.Левицький, Р.В.Юринець

ФОКУСУВАННЯ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ І РУХОМІЙ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Уперше принцип максимуму модуля для хвильового скалярного рівняння довів Г.Д.Малюжинець [2]. У праці [1] узагальнені ці теореми для векторних рівнянь термопружності. При цьому вважалося, що рівняння теплопровідності є параболічного типу.

Доведемо існування певних множин у комплексній площині спектрального параметра, при яких маємо принцип максимуму модуля.

Розглянемо рівняння узагальненої термопружності [5]:

$$\Delta t = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{1}{c_q^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2}, \qquad /1/$$

де t - температура; τ - час; a - коефіцієнт теплопровідності; c_q - швидкість поширення тепла; Δ - оператор Лапласа.

У просторі зображень Фур"є по часу рівняння /1/ має вигляд

$$\Delta t^F + \left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right)t^F = 0. \qquad /1'/$$

Другий тип рівнянь, який розглянемо в даній роботі, має вигляд [4]

$$\Delta t = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} - 2\nu \frac{\partial t}{\partial x}, \qquad /2/$$

де ν – кутова швидкість обертання тіла.

У просторі зображень Фур"є по часу рівняння /2/ записуємо як

$$\Delta t^F + \beta \frac{\partial t^F}{\partial x} + c t^F = 0, \qquad /2'/$$

де позначено

$$\beta = 2\nu, \quad c \frac{i\omega}{a}. \qquad /3/$$

Визначимо області існування максимуму модуля для розв"язків рівнянь /I/ і /2/. Для цього доведемо лему.

<u>Лема I.</u> Нехай в області G функція t задовольняє рівняння /I $'$ /. Тоді для того, щоб усередині області абсолютна величина функції t не могла мати максимум, необхідно і досить, щоб при $Re\omega > 0$ виконувалось

$$-\frac{A}{2} > Jm\,\omega > -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + (Re\omega)^2} \quad \text{чи} \quad Jm\,\omega \geqslant -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + (Re\omega)^2}$$

або при $Re\omega < 0$ виконувалось

$$-\frac{A}{2} < Jm\,\omega < -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + (Re\omega)^2} \quad \text{чи} \quad Jm\,\omega \leqslant -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + (Re\omega)^2},$$

де $A = c_q^2 / a$.

<u>Доведення.</u> Згідно з працею [2] всередині області G абсолютна величина функції t не має максимуму тоді і лише тоді, коли

$$Jm\left[\left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right)^{1/2}\right] > Re\left[\left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right)^{1/2}\right]. \qquad /4/$$

Позначаючи $\omega = \alpha + i\beta$, отримуємо

$$\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{c_q^2} - \frac{\beta}{a} + i\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{2\alpha\beta}{c_q^2}\right) \equiv \gamma + i\varkappa,$$

де позначено

$$\gamma = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{c_q^2} - \frac{\beta}{a}, \quad \varkappa = \frac{\alpha}{a} + \frac{2\alpha\beta}{c_q^2}. \qquad /5/$$

Використовуючи формулу Муавра, маємо

$$\left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right)^{1/2} = \sqrt{z}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right)\right], \qquad /6/$$

де $z = \sqrt{\gamma^2 + \varkappa^2}$, $\cos\varphi = \gamma / z$.

Підставляючи /6/ в /4/ і враховуючи, що

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\,,\quad \cos\varphi=\gamma/z\,,$$

при $k=0$ отримуємо

$$\cos\frac{\varphi}{2}<\sin\frac{\varphi}{2}\quad \text{або}\quad \cos\varphi<0\,.$$

Звідси маємо, що $\gamma<0$.

Аналогічно при $k=1$ отримуємо $\gamma>0$.

Отже, умова /4/ виконується при $\gamma>0$ і $\varkappa<0$ або $\varkappa>0$ і $\gamma\leqslant 0$. Інакше, враховуючи /5/, умова /4/ виконується тоді і тільки тоді, коли α і β задовольняють одну з таких систем:

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{c_q^2}-\dfrac{\beta}{a}>0,\\[2mm] \dfrac{\alpha}{a}+\dfrac{2\alpha\beta}{c_q^2}<0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{c_q^2}-\dfrac{\beta}{a}\leqslant 0,\\[2mm] \dfrac{\alpha}{a}+\dfrac{2\alpha\beta}{c_q^2}>0.\end{cases}$$

З першої системи отримуємо

$$\alpha>0,\ -\frac{A}{2}>\beta>-\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}+\alpha^2}\ ;$$

$$\alpha<0,\ -\frac{A}{2}<\beta<-\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}+\alpha^2}\ ,$$

з другої -

$$\alpha>0,\ \beta\geqslant-\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}+\alpha^2}\,,$$

$$\alpha<0,\ \beta\leqslant-\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}+\alpha^2}\,;$$

де $A=c_q^2/a$ /рис. I/. Лема доведена.

Переходимо до розгляду рівняння /2/. У рівнянні /2'/ виконуємо заміну $\xi=x+iy$, $\eta=x-iy$, внаслідок чого отримуємо

$$4\frac{\partial^2 t^F}{\partial\xi\partial\eta}+b\frac{\partial t^F}{\partial\xi}+b\frac{\partial t^F}{\partial\eta}+ct^F=0. \qquad /7/$$

Підстановкою

$$v=e^{\frac{b}{4}(\xi+\eta)}t^F$$

рівняння /7/ зводимо до вигляду

$$\frac{\partial v}{\partial\xi\partial\eta}+v\left(\frac{c}{4}-\frac{b^2}{16}\right)=0. \qquad /8/$$

Виконуючи в рівнянні /8/ заміну

$$z=i\xi+\eta\,,\quad \mu=\xi+i\eta$$

і враховуючи позначення /3/, отримуємо рівняння

$$\Delta v+\left(\frac{\omega}{4a}+i\frac{\nu^2}{4}\right)v=0. \qquad /9/$$

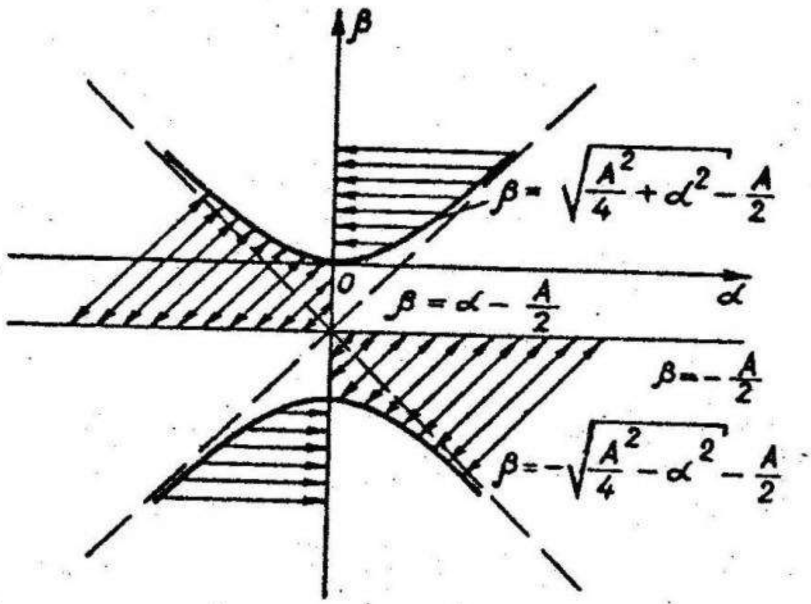

Рис. I.

<u>Лема 2.</u> Нехай в області G функція v задовольняє рівняння /9/. Тоді для того, щоб усередині області абсолютна величина функції v не могла мати максимум, необхідно і досить, щоб $Re\,\omega$ і $Jm\,\omega$ задовольняли умови

$$Re\,\omega \geq 0,\; Jm\,\omega < -a\nu^2 \quad \text{або} \quad Re\,\omega \leq 0,\; Jm\,\omega > -a\nu^2. \qquad /I0/$$

<u>Доведення.</u> Згідно з працею [2] в області G абсолютна величина функції v не має максимуму тоді і лише тоді, коли

$$Jm\left[\left(\frac{\omega}{4a}+i\frac{\nu^2}{4}\right)^{1/2}\right] > Re\left[\left(\frac{\omega}{4a}+i\frac{\nu^2}{4}\right)^{1/2}\right]. \qquad /II/$$

Нехай $\omega=\alpha+i\beta$. Тоді

$$\frac{\nu^2}{4}i+\frac{\omega}{4a}=\frac{\alpha}{4a}+i\left(\frac{\beta}{4a}+\frac{\nu^2}{4}\right)\equiv \gamma+i\varkappa,$$

де позначено

$$\gamma=\frac{\alpha}{4a}, \quad \varkappa=\frac{\beta}{4a}+\frac{\nu^2}{4}.$$

За формулою Муавра отримуємо

$$\left(\frac{\omega}{4a}+i\frac{\nu^2}{4}\right)^{1/2}=\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{2}\right)\right],$$

де

$$r=\sqrt{\gamma^2+\varkappa^2}, \qquad \cos\varphi=\gamma/r.$$

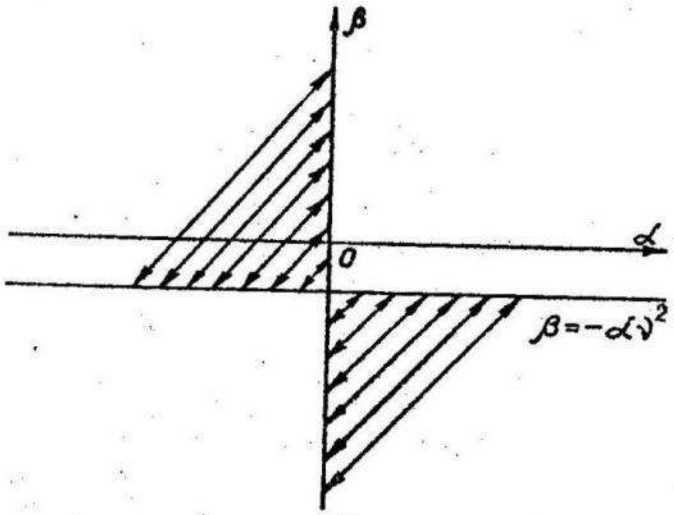

Рис. 2.

Аналогічно, як у лемі 1, задовольняючи умову /12/, при $k = 0$ отримуємо $\gamma < 0$, а при $k = 1$ – $\gamma > 0$, що, враховуючи $Re\,\omega = 4a\gamma$, $Im\,\omega = 4a\varkappa - a\nu^2$, еквівалентне умовам /10/ /рис. 2/. Лема доведена.

Враховуючи заміни, за допомогою яких з рівняння /7/ отримане рівняння /9/, бачимо, що

$$t^F = v(x-y+i(x-y),\, x+y+i(x+y))\,e^{-\frac{b}{2}x}.$$

Абсолютна величина функції t^F не має максимуму в області G за умови

$$\Delta |t^F|^2 > 0. \qquad /12/$$

Позначимо $v = v_1 + i v_2$. Тоді

$$\Delta|t^F|^2 = \Delta\left|(v_1+iv_2)e^{-\frac{b}{2}x}\right|^2 = e^{-bx}\left[2(v_1\Delta v_1 + v_2\Delta v_2 + |grad\, v|^2 + b^2(v_1^2+v_2^2) - 2b\frac{\partial}{\partial x}(v_1^2+v_2^2)\right].$$

Оскільки

$$v_1\Delta v_1 + v_2\Delta v_2 = -Re\left(\frac{\omega}{4a} + i\frac{\nu^2}{4}\right)|v|^2 \geq 0,$$

то бачимо, що для виконання умови /12/ потрібно накласти певні обмеження на функцію t^F, так щоб виконувалась умова

$$b(v_1^2+v_2^2) - 2\frac{\partial}{\partial x}(v_1^2+v_2^2) \geq 0.$$

Нехай в області G задана задача незв"язної термопружності в просторі зображень Фур"є по часу [1]

$$\mu\Delta\bar{w}+(\lambda+\mu)\,grad\,div\,\bar{w}-(3\lambda+2\mu)\alpha_t\,grad\,t+ +\rho\omega^2\bar{w}=F(x); \qquad /13/$$

$$\Delta t+\left(\frac{i\omega}{a}+\frac{\omega^2}{c_q^2}\right)t=Q(x); \qquad /14/$$

$$\bar{w}|_S=\bar{f}_1(x); \qquad /15/$$

$$\frac{\partial t}{\partial n}+kt|_S=T_1(x), \qquad /16/$$

де $\bar{F}(x)\equiv 0$ всюди, крім обмеженої підобласті $G_f=G, \bar{f}_1(x)\equiv 0$, $T_1(x)\equiv 0$, крім обмеженої підобласті $S_f\subset S$. Тут S – поверхня, утворена сім"єю, можливо, нескінченною поверхнями, замкнутими або такими, що збігаються на безмежності/.

Використовуючи лему 1, праці [1-3], можна довести таку теорему.

Теорема. Нехай $\bar{W}^{(1)}, \bar{W}^{(2)}, t^{(1)}, t^{(2)}$ – два розв"язки /9/-/16/ у G. Якщо виконуються умови при $Re\omega=-Jm\omega>\frac{c_q^2}{\sqrt{2}a}$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}|\bar{w}^{(1)}-\bar{w}^{(2)}|=0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}|t^{(1)}-t^{(2)}|=0$,

то $W^{(1)}\equiv W^{(2)}, t^{(1)}\equiv t^{(2)}$.

1. Барен В.П. Принцип максимума модуля для волновых уравнений линейной упругости // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1986. С.25-28. 2. Малюжинец Г.Д. Задача о скачке в теории дифракции // Тр. Акустического ин-та. 1971. Вып. 15. С.140-168. 3. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. М., 1976. 4. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М., 1963. 5. Подстригач Я.С., Коляно Є.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 12.04.93