УДК 539.3:551.243

Г.Т.Сулим

# СИЛА, ЩО ДІЄ НА ГВИНТОВУ ДИСЛОКАЦІЮ ПОБЛИЗУ ТОНКОГО ДЕФЕКТУ

Пластичне деформування і руйнування матеріалу біля концентраторів напружень тісно пов"язане з рухом у цій зоні дислокацій. Однією з важливих характеристик, які визначають рухливість дислокацій, є сила, що діє на дислокацію /СДД/. Ця сила докладно вивчена у випадку взаємодії дислокацій зі скінченними та напівбезмежними тріщинами [6-8, 11, 14-17, 19]. Однак взаємодія дислокацій з іншими тонкими неоднорідностями, зокрема абсолютно жорсткими включеннями, досліджена недостатньо [10]. У праці [18] розглянута взаємодія гвинтової дислокації з пружним коловим циліндричним включенням, а також з абсолютно податним /пóра/ та абсолютно жорстким еліптичним циліндром. Визначена, зокрема, енергія взаємодії дислокації з прямолінійною щілиною та з жорстким включенням, що дає змогу визначити також СДД. У праці [13] побудований наближений розв"язок задачі про взаємодію дислокацій із включенням і, як приклад, визначене поле напружень і СДД біля пружного еліпсоїда, обертання, зокрема сплющеного або видовженого. У працях [1-3] досліджене поле напружень та узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень біля тонкостінних стрічкових включень за наявності в ізотропному й анізотропному середовищах гвинтових дислокацій, отримані відповідні аналітичні вирази для граничних випадків тріщини й абсолютно жорсткої тонкої плівки /АЖТП/ скінченної та напівскінченної ширини.

За формулою Піча-Келера [4, 5] СДД у точці

$$F_x(z_*)=b\,r^{*0}_{yz}(z_*);\quad F_y(z_*)=-b\,r^{*0}_{xz}(z_*),\qquad /1/$$

де $b$ – компонента вектора Бюргерса дислокації; індексом « $*0$ » відзначене поле напружень у точці $z_*$ без урахування власного поля напружень від дислокації у цій же точці. Якщо на тіло крім дислокації в точці $z_*$ навантаження не діють, то це є збурене поле напружень. Компоненти напружень визначаються виразом [1, 2]

$$r^{*0}_{yz}(z)+i\,r^{*0}_{xz}(z)=-\frac{1}{4\pi}\left[F^-(z)\pm\bar{F}^-(z)\right],$$

$$F^{\pm}(z)=-\mu b\left[\frac{1}{X(z)}+\frac{1}{z-z_*}\left(\frac{X(z_*)}{X(z)}\pm 1\right)\right],\quad X(z)=\sqrt{z^2-a^2}.\qquad /2/$$



10-2846

Тут і надалі верхній знак стосується тріщини, нижній - АКТП.

Підставляючи /2/ в /1/ та переходячи до границі $z \to z_*$ при

$$\lim_{z \to z_*} \left[ \frac{1}{z - z_*} \left( \frac{X(z_*)}{X(z)} - 1 \right) \right] = \frac{z_*}{a^2 - z_*^2} ,$$

отримуємо

$$F_x - iF_y = -2A \left[ -\frac{1 \pm 1}{X(z_*)} - \frac{z_*}{a^2 - z_*^2} \mp \frac{1}{z_* - \bar{z}_*} \left( \frac{X(\bar{z}_*)}{X(z_*)} - 1 \right) \right], \; A = \frac{\mu b^2}{8\pi} \quad /3/$$

У випадку розташування дислокації на осі абсцис у точці $(x_*, 0)$ $(y_* \to 0)$ за допомогою граничного переходу

$$\lim_{y_* \to 0} \frac{1}{z_* - \bar{z}_*} \left( 1 - \frac{X(\bar{z}_*)}{X(z_*)} \right) = \begin{cases} x_* / (x_*^2 - a^2) & (|x_*| > a); \\ x_* / (a^2 - x_*^2) - i / y_* & (|x_*| < a); \end{cases}$$

$$\lim_{y_* \to 0} X(x_*) = \begin{cases} \mathrm{sign}(x_*) \sqrt{x_*^2 - a^2} & (|x_*| > a); \\ [\pm] \sqrt{a^2 - x_*^2} & (|x_*| < a), \end{cases}$$

одержуємо

$$F_x - iF_y = -2A \left[ -\frac{(1 \pm 1)\,\mathrm{sign}(x_*)}{\sqrt{x_*^2 - a^2}} + \frac{x_* \pm x_*}{x_*^2 - a^2} \right], \; (|x_*| > a)$$

$$F_x - iF_y = -2A \left[ [\pm] \frac{(i \pm i)}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} \mp \frac{i}{y_*} + \frac{x_* \mp x_*}{x_*^2 - a^2} \right], (|x_*| < a). \quad /4/$$

Тут і надалі /формули /4/-/8// беремо арифметичне значення кореня, верхній знак у квадратних дужках стосується верхнього краю проміжка $[-a, a]$, нижній - його нижнього краю. Таким чином, для дислокації, яка розміщена на продовженні осі щілини

$$F_x = 4A \left[ \frac{\mathrm{sign}(x_*)}{\sqrt{x_*^2 - a^2}} - \frac{x_*}{x_*^2 - a^2} \right], \; F_y = 0, \; (|x_*| > a), \quad /5/$$

що збігається з /17/ [15] при $\sigma = n = 0$. Для дислокації на продовженні площини АКТП $F_x = F_y = 0$ вона нерухома.

Якщо дислокація наближається до берега тріщини, то

$$F_x = 0, \; F_y = F_\theta = 2A \left[ \frac{[\pm] 2}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} - \frac{1}{y_*} \right], \; F_r = -\frac{2A}{r}, (|x_*| < a), \quad /6/$$

а з рухом до краю АКТП

$$F_x = -\frac{4A x_*}{x_*^2 - a^2}, \; F_y = \frac{2A}{y_*}, \; F_r = 0, \; F_\theta = \frac{2A}{y_*}. \quad /7/$$

Тут крім декартової системи координат у правому вістрі дефекту введена полярна система $(r, \theta)$.

Якщо дислокація розташована на осі $y(z_*=(0,y_*))$ , то

$$F_x=0,\ F_y=-2A\left[-\frac{(1\pm1)\,sign(y_*)}{\sqrt{y_*^2+a^2}}+\frac{y_*}{y_*^2+a^2}\pm\frac{1}{y_*}\right]. \qquad /8/$$

Коли $a\to\infty$ , тоді з формули /8/ чи /6/, /7/ випливає

$$F_x=0\,; \qquad F_y=\mp 2A/y_* \; - \qquad /9/$$

вираз для СДД у півплощині $y>0$ на відстані $y_*$ від її краю. Верхній знак відповідає вільному краю /див. також [18], /3.17/ [5]/, нижній - жорстко защемленому/див. задачу 3.5 [5] і [18]/. Величина СДД у цих випадках однакова: дислокація відштовхується від защемленої поверхні з такою ж силою, з якою притягується до вільної поверхні.

Випадок напівбезмежного дефекту випливає з виразу /3/, якщо у точку $z=a$ помістити систему координат $\xi=z-a\,(\xi_*=\xi_*^r+i\xi_*^i\equiv$ $\equiv r\exp(i\theta)=z_*-a)$ і перейти до границі $a\to\infty$ . Тоді, оскільки $X(\bar z_*)/X(z_*)\to\sqrt{\bar\xi_*/\xi_*}$ ,

$$F_x-iF_y=-2A\left[\frac{1}{2\xi_*}\pm\frac{1}{\xi_*-\bar\xi_*}\left(1-\sqrt{\frac{\bar\xi_*}{\xi}}\right)\right]. \qquad /10/$$

Звідси для напівбезмежного розрізу

$$F_x-iF_y=-\frac{A}{r}\left[2\cos\frac{2\theta}{2}-i\left(tg\frac{\theta}{2}+\sin\theta\right)\right];\ F_r=-\frac{2A}{r},\ F_\theta=\frac{A\,tg(\theta/2)}{r}, \qquad /11/$$

для напівбезмежного жорсткого включення

$$F_x-iF_y=\frac{A}{r}\left[2\sin\frac{2\theta}{2}-i\left(tg\frac{\theta}{2}-\sin\theta\right)\right];\ F_r=0,\ F_\theta=-\frac{A\,tg(\theta/2)}{r}. \qquad /12/$$

На відміну від тріщини радіальна складова СДД в околі напівбезмежної АЖТП дорівнює нулю, а трансверсальна - дорівнює відповідній силі біля тріщини, але є протилежно скерована. За можливості вільного переміщення дислокація рухається вздовж дуги кола з центром у вершині включення до положення стійкої рівноваги на продовженні площини АЖТП. Від поверхні включення дислокації відштовхуються. Це сприяє емісії дислокації з межі фаз.

Вираз /9/ можна також отримати на підставі /11/ і /12/, якщо взяти до уваги, що $\lim\limits_{r\to\infty}(r^{-1}tg\frac{\theta}{2})=\frac{2}{y_*}\,(y_*=\xi_*^i)$.

Потенціальна енергія дислокації, що визначається формулою $U=\int F_r dr-\int r F_\theta\, d\theta$, для напівбезмежного розрізу, приводить до відомого [14] значення $U=2A\ln(r\cos\frac{\theta}{2})$. Для напівбезмежної АЖТП

$$U=-2A\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right). \qquad /13/$$

Енергія дислокації не залежить від її відстані до вершини напівбезмежної АЖТП і визначається лише полярним кутом: на поверхні дефекту енергія необмежено велика, а на його продовженні – нульова.

В анізотропному випадку [3] подібним чином отримуємо

$$\left\{F_x, F_y\right\} = 2A^* Re\left[\left\{1, s^1\right\}\left(\frac{1 \pm 1}{X(z^1_{*1})} + \frac{z^1_{*1}}{a^2-(z^1_{*1})^2} \mp \mp \frac{1}{z^1_{*1} - \bar{z}^1_{*1}}\left(1 - \frac{X(\bar{z}^1_{*1})}{X(z^1_{*1})}\right)\right)\right], \quad A^* = \frac{b^2}{8\pi |r^1|}. \qquad /14/$$

Для тріщини на її продовженні

$$\left\{F_x, F_y\right\} = 4A^* Re\left[\left\{1, s^1\right\}\left(\frac{\mathrm{sign}(x_*)}{\sqrt{x_*^2 - a^2}} - \frac{x_*}{x_*^2 - a^2}\right)\right], (|x_*| > a) \qquad /15/$$

/у загальному випадку анізотропії $F_y \neq 0$ /, а на продовженні АЖТП

$$\left\{F_x, F_y\right\} = \left\{0, 0\right\} \quad (|x_*| > a). \qquad /16/$$

Тут, як і в ізотропному випадку, дислокація перебуває у стані стійкої рівноваги.

Із наближенням дислокації до поверхні тріщини

$$\left\{F_x, F_y\right\} = 2A^* Re\left[\left\{1, s^1\right\}\left(\frac{\mp 2i}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} + \frac{i}{y^1_*}\right)\right], \; y^1_* = s^1_2 y_* = \frac{y_* |r^1|}{a'_{55}}, \quad (|x_*| < a), \qquad /17/$$

а з прямуванням до краю АЖТП

$$\left\{F_x, F_y\right\} = 2A^* Re\left[\left\{1, s^1\right\}\left(\frac{2x_*}{a^2 - x_*^2} - \frac{i}{y^1_*}\right)\right], \; (|x_*| < a). \qquad /18/$$

При напівбезмежному дефекті

$$\left\{F_x, F_y\right\} = 2A^* Re\left[\left\{1, s^1\right\}\left(\frac{1}{2\xi^1_{*1}} \pm \frac{1}{\xi^1_{*1} - \bar{\xi}^1_{*1}}\left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\xi}^1_{*1}}{\xi^1_{*1}}}\right)\right)\right] \qquad /19/$$

або

$$\left\{F_x, F_y\right\} = -A^*\left\{\cos\theta_1 \pm 1, \frac{a_{45}}{a_{55}}(\cos\theta_1 \pm 1) + \frac{|r^1|}{a_{55}}[\sin\theta_1 \pm tg(\theta_1/2)]\right\}, \quad \xi^1_{*1} = r_1 \exp(i\theta_1). \qquad /20/$$

Якщо $a \to 0$, то оскільки $X(\bar{z}^1_{*1})/X(z^1_{*1}) \to -1$, з /12/ випливає

$$F_x = 0, \quad F_y = \mp \frac{2A^*}{y_*} \; - \qquad /21/$$

вираз для СДД біля вільної та защемленої межі анізотропної півплощини. Його можна отримати також з подання СДД біля прямолінійної межі поділу матеріалів [9, 12].

Рівність між $F_r$ /формула /9// для напівобмеженої тріщини і силою притягування дислокації вільною поверхнею $F_y$ /формула /7// становить зміст теореми уявних сил [7], що справедлива також для анізотропного випадку. Порівняння формул /7/ і /10/ стосовно жорсткого защемлення межі та АЖТП свідчить про відсутність аналога даної теореми для дефекту цього типу.

І. Божидарник В.В., Сулим Г.Т., Сулим М.В. Упругое равновесие ленточного включения в изотропном массиве под действием сосредоточенных сил и винтовых дислокаций // Вестн. Львов. политехн. ин-та. 1985. Вып. 190. С.13-16. 2. Сулим Г.Т. Антиплоская деформация изотропной среды с тонкими прослойками под воздействием сил, дислокаций и диполей. Львов, 1985. С.20. Рукопись деп. в ВИНИТИ 28.01.85. № 782-85Деп. 3. Сулим Г.Т. Продольный сдвиг анизотропной среды с ленточными включениями. Львов, 1987. С.47. Рукопись деп. в ВИНИТИ 15.01.87. № 329-В87. 4. Косевич А.М. Дислокации в теории упругости. К., 1978. 5. Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М., 1972. 6. Черепанов Г.П. Инициирование микротрещин и дислокаций // Прикл. механика. 1987. Т.23. № 12. С.67-81. 7. Asaro R.J. An image force theorem for a dislocation near a crack in an anisotropic elastic medium // J. Phys. F: Metal. Phys. 1975. Vol.5. №12. P.2249-2255. 8. Atkinson C. The interaction between a dislocation and a crack // Int. J. Fract. Mech. 1966. Vol. 2. №4. P. 567-575. 9. Chou Y.T. On dislocation-boundary interaction in an anisotropic aggregate // Phys. status solidi. 1966. Vol.15. №1. P.123-127. 10. Dundurs J. Elastic interaction of dislocation with inhomogeneities // Mathematical theory of dislocations / Ed. T. Mura. New York, 1969. P. 70-115. 11. Eringen A.C. Interaction of a dislocation with a crack // J. Appl. Phys. 1983 Vol. 54. №12. P. 6811-6821. 12. Head A.K. The dislocation image force in cubic polycrystals // Phys. status solidi. 1965. Vol.10. N2. P. 481-484. 13. Johnson W.C. Interaction of a dislocation with a misfitting precipitate // J. Appl. Phys. 1982. Vol. 53. №12. P. 8620-8638. 14. Lee Sanboh, Burns S.J., Li J.C. Image forces and potential energy of a dislocation around a crack tip // Mater. Sci. and Eng. 1986. Vol. 83. №1. P.65-73. 15. Louat N.P. The interaction of cracks and dislocations. I. Screw dislocations // Proc. 1st Int. Conf. on Fracture. Japan Soc. for the Strength and Fracture of Materials. Sendai. 1965. P. 117-132. 16. Rice J.R., Thomson S.R. Ductile versus behaviour of cristals // The Philos. Mag. 1974. Vol. 29. N1. P. 73-97. 17. Shiue Sham-Tsong, Lee Sanboh. A thermodynamic approach to the interaction between dislocation and crack and its application // Eng. Fract. Mech. 1989. Vol. 22. N6. P. 1105-1115. 18. Smith E. The interaction between dislocations and inhomogeneities. I // Int. J. Eng. Sci. 1968. Vol. 6. №3. P. 129-143. 19. Tamate O., Sekine M. Elastic interaction of a screw dislocation with an interface micro-crack in bimetallic orthotropic media // Technol. Reports Tohoku Univ. 1972. Vol. 37. №1. P. 69-85.

Стаття надійшла до редколегії 06.04.93

УДК 517.956

Л.Я.Шпак

# ПРИРОДНІ БАЗОВІ ФУНКЦІЇ ЗА РЕДУКЦІЇ ДО НИЖЧОЇ РОЗМІРНОСТІ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Під час розрахунку фізико-механічних полів оболонок і пластин перехід від тривимірної задачі до двовимірної найчастіше здійснюється методом розкладу шуканих величин по товщині з апріорі заданою базовою системою функцій [4]. У працях [1, 3] запропонований узагальнений підхід до методу розкладу шуканих величин по товщині, за якого не лише коефіцієнти розкладу /моментні характеристики/, але й система базових функцій визначаються як екстремалі функціоналу енергії.

У даній статті обгрунтовується існування таких оптимальних базових функцій на прикладі крайової задачі з рівнянням еліптичного типу.

В обмеженій області $D = D_x D_y$ задається рівняння

$$Lu = f(x,y) \quad x \in D_x \subset R^n, \; y \in D_y \subset R^m, \qquad /1/$$

де $L = L_x + L_y$ - лінійний еліптичний оператор другого порядку, зображений у вигляді суми лінійних операторів по відповідних групах змінних $x$ і $y$. На межі області задані умови:

$$u|_{\partial D_x \times \bar{D}_y} = 0 \quad , \quad u|_{\bar{D}_x \times \partial D_y} = 0. \qquad /2/$$

Задача /1/-/2/ еквівалентна умові стаціонарності функціоналу енергії $\Phi(u) = \int_D [Lu - 2f] u \, dx dy$.

Під час переходу до задач нижчої розмірності по групах змінних $y$ чи $x$, згідно із запропонованим в [1] підходом, $N$-не наближення розв"язку задачі /1/-/2/ шукаємо у вигляді

$$u^N(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(y) \varphi_i(x), \; \|\varphi_i(x)\|_{L_2(D_x)} = 1. \qquad /3/$$