of a screw dislocation with an interface micro-crack in bimetallic orthotropic media // Technol. Reports Tohoku Univ. 1972. Vol. 37. №1. P. 69-85.

Стаття надійшла до редколегії 06.04.93

УДК 517.956

Л.Я.Шпак

ПРИРОДНІ БАЗОВІ ФУНКЦІЇ ЗА РЕДУКЦІЇ ДО НИЖЧОЇ РОЗМІРНОСТІ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Під час розрахунку фізико-механічних полів оболонок і пластин перехід від тривимірної задачі до двовимірної найчастіше здійснюється методом розкладу шуканих величин по товщині з апріорі заданою базовою системою функцій [4]. У працях [1, 3] запропонований узагальнений підхід до методу розкладу шуканих величин по товщині, за якого не лише коефіцієнти розкладу /моментні характеристики/, але й система базових функцій визначаються як екстремалі функціоналу енергії.

У даній статті обгрунтовується існування таких оптимальних базових функцій на прикладі крайової задачі з рівнянням еліптичного типу.

В обмеженій області $D = D_x D_y$ задається рівняння

$$Lu = f(x,y) \quad x \in D_x \subset R^n, \;\; y \in D_y \subset R^m, \qquad /1/$$

де $L = L_x + L_y$ - лінійний еліптичний оператор другого порядку, зображений у вигляді суми лінійних операторів по відповідних групах змінних x і y. На межі області задані умови:

$$u|_{\partial D_x \times \bar{D}_y} = 0 \quad , \qquad u|_{\bar{D}_x \times \partial D_y} = 0. \qquad /2/$$

Задача /1/-/2/ еквівалентна умові стаціонарності функціоналу енергії $\Phi(u) = \int_D [Lu - 2f] u \, dx dy$.

Під час переходу до задач нижчої розмірності по групах змінних y чи x, згідно із запропонованим в [1] підходом, N-не наближення розв"язку задачі /1/-/2/ шукаємо у вигляді

$$u^N(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(y) \varphi_i(x), \;\; \|\varphi_i(x)\|_{L_2(D_x)} = 1. \qquad /3/$$

Моментні характеристики /коефіцієнти розкладу/ ψ_i та базові функції φ_i знаходимо з умови стаціонарності відповідного функціоналу енергії. Зокрема, для побудови першого наближення базову функцію $\varphi_1(x)$ і відповідну моментну характеристику $\psi_1(y)$ визначаємо як екстремалі функціоналу

$$\Phi_1(\varphi(x),\psi(y))=\int\limits_{D_x}\int\limits_{D_y}(L_x\varphi(x)\psi(y)+L_y\psi(y)\varphi(x)-2f)\varphi\psi\,dx\,dy. \quad /4/$$

З необхідної умови екстремуму такого функціоналу записуємо систему рівнянь для визначення функцій φ_1 і ψ_1 :

$$L_x\varphi_1(x)\int\limits_{D_y}\psi_1^2(y)dy+\varphi_1(x)\int\limits_{D_y}L_y\psi_1(y)\psi_1(y)dy=\int\limits_{D_y}f(x,y)\psi_1(y)dy$$
$$L_y\psi_1(y)\int\limits_{D_x}\varphi_1^2(x)dx+\psi_1(y)\int\limits_{D_x}L_x\varphi_1(x)\varphi_1(x)dx=\int\limits_{D_x}f(x,y)\varphi_1(x)dx \quad /5/$$

і відповідні граничні умови $\varphi_1|\partial D_x=0,\ \psi_1|\partial D_y=0$.

Доведемо існування ненульового розв"язку нелінійної системи рівнянь /5/ у випадку, коли праву частину рівняння /I/ можна зобразити, як

$$f(x,y)=\varkappa_f\varphi^f(x)\psi^f(y),\ \|\varphi^f\|=1,\ \|\psi^f\|=1. \quad /6/$$

<u>Теорема 1.</u> Якщо $f(x,y)$ подана у вигляді /6/, де $\varphi^f\in C(D_x),\ \psi^f\in C(D_y)$, то існують такі функції $\varphi_1\in C^2(D_x)$, $\psi_1\in C^2(D_y)$, що задовольняють рівняння системи /5/, відповідні граничні умови і реалізують мінімум функціоналу /4/.

<u>Доведення.</u> Виконуємо заміну змінних

$$\hat\varphi=\frac{\|\psi_1\|^2}{\varkappa_f(\psi^f,\psi_1)}\varphi_1 \qquad \hat\psi=\frac{\|\varphi_1\|^2}{\varkappa_f(\varphi^f,\varphi_1)}\psi_1. \quad /7/$$

Після заміни система /5/ набуває вигляду

$$L_x\hat\varphi+A\hat\varphi=\varphi^f; \quad /8/$$
$$L_y\hat\psi+B\hat\psi=\psi^f; \quad /9/$$
$$A=\frac{(L_y\hat\psi,\hat\psi)}{\|\hat\psi\|^2},\quad B=\frac{(L_x\hat\varphi,\hat\varphi)}{\|\hat\varphi\|^2}. \quad /10/$$

Із /10/ $A\geq\mu_1$, $B\geq\nu_1$, де ν_1, μ_1 - перші власні значення операторів L_x і L_y відповідно.

Оскільки функція φ^f неперервна, то для кожного фіксованого $A\geq\mu_1$ існує єдиний класичний розв"язок $\hat\varphi=\hat\varphi(x,A)$ рівняння /8/ $\hat\varphi|\partial D_x=0$. Аналогічно для кожного фіксованого $B\geq\nu_1$ існує єдиний класичний розв"язок $\hat\psi=\hat\psi(y,B)$

рівняння /9/ $\hat{\psi}\,|_{\partial D_y} = 0$. Розглянемо функції

$$\mu(B) = \frac{(L_y\hat{\psi}(y,B),\hat{\psi}(y,B))}{\|\hat{\psi}(y,B)\|^2}, \quad \nu(A) = \frac{(L_x\hat{\varphi}(x,A),\hat{\varphi}(x,A))}{\|\hat{\varphi}(x,A)\|^2}. \qquad /11/$$

Рівняння /10/ можна переписати як

$$A = \mu(B), \quad B = \nu(A), \qquad /12/$$

або

$$A = \mu(\nu(A)). \qquad /13/$$

Знаходження ненульових розв"язків системи /5/ зводиться до знаходження коренів рівняння /13/.

Розглянемо вихідний функціонал /4/ на множині функцій $\varphi_1(x,A)$, $\psi_1(y,B)$, побудованих із $\hat{\varphi}(x,A)$, $\hat{\psi}(y,B)$, враховуючи заміну /7/. При цьому задача мінімізації функціоналу /4/, очевидно, зводиться до визначення точок мінімуму функції двох змінних $\Phi(A,B)$. Такі точки є розв"язками рівнянь /12/. Для неперервної функції $g(A) = \Phi(A,\nu(A))$ критичними точками є розв"язки рівнянь /13/. Можна показати, що мінімум функції $g(A)$ досягається для скінченних значень A . Згідно з теоремою Веєрштрасса неперервна на замкнутому проміжку функція $g(A)$ досягає своїх екстремальних значень. Отже, існує і може бути обчислене значення A^* , що реалізує мінімум функції $g(A)$.

Тоді розв"язок системи /8/ має вигляд

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x,A^*), \quad \hat{\psi} = \hat{\psi}(y,B^*), \quad B^* = \nu(A^*),$$

а мінімум функціоналу /4/ реалізують функції

$$u^1(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) = \varkappa_f(A^* + B^*)\hat{\varphi}(x,A^*)\hat{\psi}(y,B^*). \qquad /14/$$

Перше наближення побудоване. Теорема доведена.

Для побудови другого наближення наступну базову функцію і відповідну моментну характеристику шукаємо з умови екстремуму функціоналу

$$\Phi_2(\varphi(x),\psi(y)) = \iint\limits_{D_x D_y} (L_x\varphi\psi + L_y\psi\varphi - 2f_1(x,y)\varphi\psi\, dx\, dy, \qquad /15/$$

де $f_1(x,y) = \varkappa_f\, \varphi^f(x)\,\psi^f(y) - Lu^1$; u^1 – побудоване перше наближення.

Легко переконатися, що оскільки u^1 одержане у формі /14/, то

$$f_1(x,y)=\varkappa_f[\varphi_f-(A^*+B^*)\hat{\varphi}][\psi_f-(A^*+B^*)\hat{\psi}]=\varkappa_f^1\varphi_1^f(x)\psi_1^f(y),$$

тобто $f_1(x,y)$ має вигляд /6/. У такому випадку для обгрунтування існування та конструктивної побудови другої базової функції $\varphi_2(x)$ і відповідної моментної характеристики $\psi_2(y)$ скористаємося теоремою 1, застосовуючи її до функціоналу /15/ і функції $f_1(x,y)$. Друге наближення розв"язку знаходимо у формі

$$u^2(x,y)=\psi_1(y)\varphi_1(x)+\psi_2(y)\varphi_2(x).$$

Будуючи наступні наближення розв"язку згідно з описаною схемою одержуємо систему базових функцій $\varphi_1(x),\dots,\varphi_N(x)$ і відповідних моментних характеристик $\psi_1(y),\dots,\psi_N(y)$. Наведемо без доведення теорему, що характеризує збіжність побудованих наближень до розв"язку вихідної задачі /1/-/2/.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $u^N(x,y)=\sum_{i=1}^N\psi_i(y)\varphi_i(x)$, де ψ_i,φ_i - побудовані на основі варіаційно-моментного підходу базові функції і моментні характеристики. Тоді

$$\|u-u^N\|_{H_0^1(D)}\to 0,\ N\to\infty,$$

де u — розв"язок вихідної задачі /1/-/2/ з правою частиною в формі /6/.

Таким чином, якщо права частина в рівнянні /1/ подана у формі /6/, методика побудови базових функцій і моментних характеристик під час переходу до задач нижчої розмірності описана.

Якщо права частина в рівнянні /1/ не має вигляду /6/, то будуємо наближення функції $f(x,y)$ у потрібній формі. Похибка під час заміни функції $f(x,y)$ її наближенням у формі /6/ є мінімальною, якщо функції $\varphi^f(x)$ і $\psi^f(y)$ реалізують мінімум функціоналу

$$F(\varphi(x),\psi(y))=\|\varphi(x)\psi(y)-f(x,y)\|^2_{L_2(D)}.$$

З необхідної умови екстремуму такого функціоналу одержуємо систему:

$$\begin{aligned}\|\psi^f\|^2\varphi^f(x)&=\int_{D_y}f(x,y)\psi^f(y)\,dy;\\ \|\varphi^f\|^2\psi^f(y)&=\int_{D_x}f(x,y)\varphi^f(x)\,dx.\end{aligned}\qquad /16/$$

Рівняння системи /I6/ еквівалентні задачі знаходження власних значень і відповідних власних функцій інтегрального рівняння Фредгольма другого роду:

$$\begin{aligned} \varkappa\varphi^f(x) &= \int_{D_x} K_1(x,\xi)\varphi^f(\xi)\,d\xi \\ \varkappa\psi^f(y) &= \int_{D_y} K_2(y,\eta)\psi^f(\eta)\,d\eta \end{aligned} \qquad \varkappa = \|\varphi^f\|^2\|\psi^f\|^2, \qquad /I7/$$

$$K_1(x,\xi)=\int_{D_y} f(x,y)f(\xi,y)\,dy, \quad K_2(y,\eta)=\int_{D_x} f(x,y)f(x,\eta)\,dx. \quad /I8/$$

Для послідовного визначення власних значень $\varkappa$ і відповідних власних функцій $\varphi^f(x)$, $\psi^f(y)$ можна скористатися методом Келлога [2]. У випадку, коли ядро інтегрального рівняння вироджене, тобто

$$f(x,y)=\sum_{K=1}^{P} c_K\varphi_K(x)\psi_K(y),$$

задача зводиться до знаходження власних значень відповідної числової матриці.

Якщо власні значення $\varkappa_i$ і власні функції $\varphi_i^f(x), \psi_i^f(y)$ рівнянь /I7/ відомі, то функцію $S(x,y)$ можна подати у вигляді

$$f(x,y)=\sqrt{\varkappa_1}\,\varphi_1^f(x)\psi_1^f(y)+\sqrt{\varkappa_2}\,\varphi_2^f(x)\psi_2^f(y)+\ldots\ . \quad /I9/$$

Використовуючи одержане зображення правої частини рівняння /I/ у формі /I9/, записуємо задачу для визначення N -го наближення розв"язку:

$$Lu^N=\sum_{K=1}^{N}\sqrt{\varkappa_K}\,\varphi_K(x)\psi_K(y),$$
$$u^N|_{\partial D}=0.$$

Звідси $u^N(x,y)=u_1(x,y)+\ldots+u_N(x,y)$,
де $u_K(x,y)$ - розв"язок задачі.

$$\begin{aligned} Lu_K(x,y) &= \sqrt{\varkappa_K}\,\varphi_K^f(x)\psi_K^f(y), \\ u_K|_{\partial D} &= 0. \end{aligned} \qquad /20/$$

Для задач вигляду /20/ процес побудови базових функцій $\varphi_{K1}(x),\ldots,\varphi_{KN}(x)$ і моментних характеристик $\psi_{K1}(y),\ldots,\psi_{KN}(y)$ описаний. Тоді N-не наближення розв"язку задачі /I/-/2/ має вигляд

$$u^N(x,y)=\sum_{K=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_{Ki}(y)\varphi_{Ki}(x).$$

Такий підхід до вибору базових функцій $\varphi_i(x)$ під час переходу від задачі /1/-/2/ до задач меншої розмірності, що містять лише групу змінних y, дає змогу на кожному кроці редукції якнайповніше враховувати властивості правої частини рівняння, області зміни і відповідного диференціального оператора.

1. Бурак Я.Й., Зозуляк Ю.Д. Обобщенный вариационный подход в задачах теплопроводности тонких оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 3. 2. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М., 1989. 3. Зозуляк Ю.Д., Казьмір Л.П. Розв"язування задач теплопровідності тонких оболонок і пластин з використанням узагальненого варіаційного підходу // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1992. Вып.36. 4. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. К., 1986.

Стаття надійшла до редколегії 06.05.93

УДК 681.3

О.О.Євтушенко, З.А.Калитин, О.Г.Плахтина

СТВОРЕННЯ ПРИКЛАДНИХ БІБЛІОТЕЧНИХ ПРОГРАМ У СЕРЕДОВИЩІ ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВОЇ СИСТЕМИ CDS/ISIS-МІКРО

У комплексі заходів з автоматизації бібліотечних процесів важливим є створення єдиного електронного каталога. Його використання дасть змогу уникнути рутинної роботи, яка виникає при дублюванні інформації в різних паперових бібліотечних каталогах. Електронний каталог передбачає застосування різноманітних обслуговувальних програм, пов"язаних з пошуком і виводом інформації. Якщо записи електронного каталога подати у стандартному міжнародному бібліографічному форматі, то стає можливим обмін інформацією /тобто базами даних/ з бібліотеками різних країн.

Оскільки під час формування записів електронного каталога слід дотримуватися певних правил, які не є тривіальними для непрофесіонала-користувача ЕОМ, виникає потреба у використанні ним спеціальної програми - автоматизованого робочого місця бібліографа.