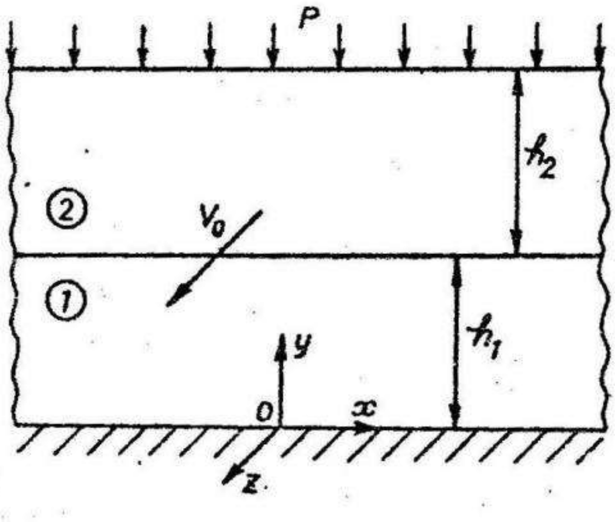
УДК 539.3

Д.В.Грилицький

НЕСТАЦІОНАРНА ТЕПЛОВА ЗАДАЧА ТЕРТЯ ДЛЯ СИСТЕМИ З ДВОХ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИХ ШАРІВ*

Розглянемо нестаціонарну теплову задачу тертя для системи тіл, що складається з двох плоскопаралельних шарів.

Нехай нижня основа двошарової системи жорстко закріплена, а до верхньої основи прикладене притискне напруження $p\,(p-const)$ /див. рисунок/. Припускаємо, що верхній шар у напрямі осі z ру-



хається по поверхні нижнього шару зі сталою швидкістю V_0. На площині контакту шарів за рахунок дії сил тертя, що підпорядковані законові Амонтона, відбувається теплоутворення. Вважаємо, що тепловий контакт шарів є неідеальним, а між площинами, які обмежують пакет, і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона.

Визначимо температурне поле в пакеті.

За даної постанови задачі температура T_i є функцією лише координати y і часу τ. Отже, маємо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T_i(y,\tau)}{\partial y^2} = \frac{1}{K_i}\,\frac{\partial T_i(y,\tau)}{\partial \tau}, \qquad /1/$$

де K_i – коефіцієнти температуропровідності.

* Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.

Граничні та контактні умови при $\tau > 0$ мають вигляд

$$y=0: \frac{\partial T_1}{\partial y} = \gamma_1 (T_1 - T_{1c}); \; y = h_1 + h_2: \frac{\partial T_2}{\partial y} = -\gamma_2 (T_2 - T_{2c}),$$

$$y = h_1: \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = f V_0 P, \qquad /2/$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} + h (T_1 - T_2) = 0 .$$

Початкова умова

$$\tau = 0: T_1(y,0) = T_2(y,0) = 0. \qquad /3/$$

В умовах /2/ введені позначення: $\gamma_i \; (i=1,2)$ – відносні коефіцієнти теплообміну; T_{ic} – температури зовнішнього середовища (T_{ic} – $const$) ; λ_i – коефіцієнти теплопровідності; h_i – товщини шарів; h – термічна провідність площини контакту; f – коефіцієнт тертя.

Поставлена задача зводиться до побудови розв"язку диференціального рівняння /I/ за умов /2/ і /3/.

Шукаємо розв"язок рівняння /I/ у вигляді

$$T_i(y,\tau) = t_i(y) + \theta_i(y,\tau) \quad (i=1,2), \qquad /4/$$

де $t_i(y)$ –стаціонарний розподіл температури; $\theta_i(y,\tau)$ – відхилення від стаціонарної температури. Замість /I/, /2/ і /3/ доходимо до розв"язування рівнянь

$$\frac{d^2 t_i}{dy^2} = 0 \qquad /5/$$

за умов

$$y=0: \frac{dt_1}{dy} = \gamma_1 t_1 - \gamma_1 T_{1c}; \; y = h_1 + h_2: \frac{dt_2}{dy} = -\gamma_2 t_2 + \gamma_2 T_{2c},$$

$$y = h_1: \lambda_1 \frac{dt_1}{dy} - \lambda_2 \frac{dt_2}{dy} = f V_0 P, \; \lambda_1 \frac{dt_1}{dy} + \lambda_2 \frac{dt_2}{dy} + h(t_1 - t_2) = 0 \qquad /6/$$

та до побудови розв"язків рівнянь

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} = \frac{1}{K_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} \qquad /7/$$

за умов

$$y=0: \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \gamma_1 \theta_1; \; y = h_1 + h_2: \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = -\gamma_2 \theta_2, \qquad /8/$$

$$y = h_1: \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0, \; \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + h(\theta_1 - \theta_2) = 0,$$

$$\tau = 0: \theta_i(y,0) = \theta_i^{(0)}(y) = -t_i(y). \qquad /9/$$

Визначаємо температуру $t_i(y)$. Інтегруючи рівняння /5/, отримуємо

$$t_i(y)=A_i y+B_i . \qquad /10/$$

Задовольняючи умови /6/, визначаємо коефіцієнти A_i та B_i а отже, і стаціонарний розподіл температури в пакеті:

$$t_1(y)=b^{-1}\left[a_2 f v_0 P-h\lambda_2\gamma_2(T_{1c}-T_{2c})\right](1+\gamma_1 y)+T_{1c} ,$$
$$t_2(y)=b^{-1}\left[a_1 f v_0 P-h\lambda_1\gamma_1(T_{1c}-T_{2c})\right](c-\gamma_2 y)+T_{2c} , \qquad /11/$$

де

$$a_i=\lambda_i\gamma_i+h(1+\gamma_i h_i),\ b=\lambda_1\gamma_1 a_2+\lambda_2\gamma_2 a_1;\ c=1+\gamma_2(h_1+h_2). \qquad /12/$$

Функції $\theta_i(y,\tau)$ знаходимо у вигляді добутку

$$\theta_i(y,\tau)=\mathcal{F}_i(y)\cdot L_i(\tau). \qquad /13/$$

Підставляючи /13/ у рівняння /7/ та розділяючи змінні, одержуємо рівняння

$$\frac{dL_i}{d\tau}+\mu^2 L_i=0,\ \frac{d^2\mathcal{F}_i}{dy^2}+\frac{\mu^2}{K_i}\mathcal{F}_i=0, \qquad /14/$$

в яких μ^2 – постійний параметр.

Розв"язками цих рівнянь є відповідно вирази

$$L_i(\tau)=C_i e^{-\mu^2\tau},\ \mathcal{F}_i(y)=M_i\cos\frac{\mu}{\sqrt{K_i}}y+N_i\sin\frac{\mu}{\sqrt{K_i}}y , \qquad /15/$$

де C_i, M_i та N_i – постійні інтегрування. Можна припустити, що C_i дорівнює одиниці.

Отже, частковий розв"язок рівняння /7/ задається формулою

$$\theta_i(y,\tau)=\left(M_i\cos\frac{\mu}{\sqrt{K_i}}y+N_i\sin\frac{\mu}{\sqrt{K_i}}y\right)e^{-\mu^2\tau}, \qquad /16/$$

у якій довільні сталі M_i та N_i визначаються з умов /8/.

Підставляючи вираз /16/ в умови /8/, одержуємо систему чотирьох однорідних алгебраїчних рівнянь відносно M_i та N_i $(i=1,2)$.

Прирівнюючи детермінант системи до нуля, маємо характеристичне рівняння, коренями якого є нескінченна кількість різних дійсних величин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ /зважаючи на малий обсяг статті, коефіцієнти $a_{ij}\ (i,j=\overline{1,4})$ не виписуємо/.

$$\Delta(\mu)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0. \qquad /17/$$

Для кожного кореня μ_n рівняння /I4/ для $\mathcal{F}_i(y)$ має ненульовий розв"язок /I5/, і отже, загальний розв"язок рівняння /7/ можна визначити за формулою

$$\theta_i(y,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_i^{(n)}\cos\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y+N_i^{(n)}\sin\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y\right)e^{-\mu_n^2\tau}. \qquad /I8/$$

Якщо через $\Delta_p(\mu_n)$ / p = I, 2, 3, 4/ позначити алгебраїчні доповнення визначника $\Delta(\mu_n)$ /I7/, що відповідають елементам якого-небудь рядка, то постійні $M_i^{(n)}, N_i^{(n)}$, які відповідають кореню μ_n, зв"язані з цими алгебраїчними доповненнями рівностями

$$\frac{M_1^{(n)}}{\Delta_1(\mu_n)}=\frac{N_1^{(n)}}{\Delta_2(\mu_n)}=\frac{M_2^{(n)}}{\Delta_3(\mu_n)}=\frac{N_2^{(n)}}{\Delta_4(\mu_n)}=\mathcal{D}_n,$$

звідки

$$M_1^{(n)}=\mathcal{D}_n\Delta_1(\mu_n),\quad N_1^{(n)}=\mathcal{D}_n\Delta_2(\mu_n),$$
$$M_2^{(n)}=\mathcal{D}_n\Delta_3(\mu_n),\quad N_2^{(n)}=\mathcal{D}_n\Delta_4(\mu_n). \qquad /I9/$$

Підставляючи /I9/ в /I8/, маємо

$$\theta_i(y,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n\left[\Delta_{2i-1}(\mu_n)\cos\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y+\Delta_{2i}(\mu_n)\sin\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y\right]e^{-\mu_n^2\tau}. \qquad /20/$$

Постійні $\mathcal{D}_n$ знаходимо з початкових умов /9/. Підставляючи вираз /20/ у початкові умови /9/, одержуємо

$$\theta_i^{(0)}(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n\varphi_n^{(i)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y\right) \qquad /2I/$$

/при i = I: $0\le y\le h_1$; при $i=2$: $h_1\le y\le h_1+h_2$/,

де

$$\varphi_n^{(i)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y\right)=\Delta_{2i-1}(\mu_n)\cos\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y+\Delta_{2i}(\mu_n)\sin\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y, \qquad /22/$$

$\theta_i^{(0)}(y)=-t_i(y)$, $t_i(y)$ – визначаються формулами /II/.

Функції $\varphi_n^{(i)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y\right)$ є розв"язками рівнянь

$$\frac{d^2\varphi_n^{(i)}}{dy^2}+\frac{\mu_n^2}{K_i}\varphi_n^{(i)}=0 \qquad /23/$$

і задовольняють умови /8/, в яких замість θ_i використані $\varphi_n^{(i)}$.

Функції $\varphi_n^{(i)}$ не є ортогональними в межах одного шару, тому ортогоналізуємо їх сукупність у межах товщини пакету двох шарів [2]. Для цього введемо такі постійні множники $d_i(i=1,2)$, щоб

$$d_1 \int_0^{h_1} \varphi_n^{(1)} \varphi_K^{(1)} dy + d_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} \varphi_n^{(2)} \varphi_K^{(2)} dy = \begin{cases} 0, & \text{коли } n \neq K, \\ R_n, & \text{коли } n = K, \end{cases} \qquad /24/$$

де

$$R_n = d_1 \int_0^{h_1} (\varphi_n^{(1)})^2 dy + d_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} (\varphi_n^{(2)})^2 dy. \qquad /25/$$

Застосовуючи формулу з праці / I / і користуючись граничними умовами для $\varphi_n^{(i)}$, одержуємо при $n \neq K$

$$d_1 \int_0^{h_1} \varphi_n^{(1)} \varphi_K^{(1)} dy + d_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} \varphi_n^{(2)} \varphi_K^{(2)} dy = d_1 \left[\frac{K_1}{\mu_n^2 - \mu_K^2} \left(\varphi_n^{(1)} \frac{d\varphi_K^{(1)}}{dy} - \varphi_K^{(1)} \frac{d\varphi_n^{(1)}}{dy} \right) \right]_{y=0}^{y=h_1} + d_2 \left[\frac{K_2}{\mu_n^2 + \mu_K^2} \left(\varphi_n^{(2)} \frac{d\varphi_K^{(2)}}{dy} - \varphi_K^{(2)} \frac{d\varphi_n^{(2)}}{dy} \right) \right]_{y=h_1}^{y=h_1+h_2} =$$

$$= \frac{1}{\mu_n^2 - \mu_K^2} \left\{ K_1 d_1 \left[\varphi_K^{(1)}(0) \left(\frac{d\varphi_n^{(1)}}{dy} - \gamma_1 \varphi_n^{(1)} \right)_{y=0} \right] + (K_1 d_1 - K_2 d_2 \lambda_1 \lambda_2^{-1}) \left(\varphi_n^{(1)} \frac{d\varphi_K^{(1)}}{dy} - \varphi_K^{(1)} \frac{d\varphi_n^{(1)}}{dy} \right)_{y=h_1} - K_2 d_2 \left[\varphi_K^{(2)}(h_1+h_2) \left(\frac{d\varphi_n^{(2)}}{dy} + \gamma_2 \varphi_n^{(2)} \right)_{y=h_1+h_2} \right] \right\}. \qquad /26/$$

Для того щоб попередній вираз перетворився в нуль, необхідно прийняти, що

$$d_1 = \lambda_2^{-1} K_2 C, \quad d_2 = \lambda_1^{-1} K_1 C, \qquad /27/$$

де C – довільна постійна, з точністю до якої визначають сталі d_1 та d_2.

Використовуючи умову ортогональності /24/, для коефіцієнтів $\mathcal{D}_n$ у розкладі /21/ отримуємо формулу

$$\mathcal{D}_n = \frac{d_1 \int_0^{h_1} \theta_1^{(0)}(y) \varphi_n^{(1)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_1}} y\right) dy + d_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} \theta_2^{(0)}(y)\, \varphi_n^{(2)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_2}} y\right) dy}{d_1 \int_0^{h_1} \left[\varphi_n^{(1)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_1}} y\right)\right]^2 dy + d_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left[\varphi_n^{(2)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_2}} y\right)\right]^2 dy}. \qquad /28/$$

Маючи значення коефіцієнтів $\mathcal{D}_n$, можна вважати, що нестаціонарна температурна задача тертя для двошарового пакету розв"язана. У підсумку температура в пакеті визначається співвідношенням

$$T_i(y,\tau) = t_i(y) + \theta_i(y,\tau), \qquad /29/$$

де $t_i(y)$ задані виразами /II/, а функції $\theta_i(y,\tau)$ знаходимо зі співвідношень /20/, /28/ і /19/. У границі при $\tau \to \infty$ отримуємо стаціонарний розподіл температури.

Тепловий потік у пакеті пропорційний похідній від $T_i(y,\tau)$ по координаті y.

1. К а р л с л о у Г., Е г е р Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. 2. К о м а р о в Г.Н. Нестационарная теплопроводность многослойных систем // Тепловые напряжения в элементах конструкции: Докл. науч. сообщ. К., 1967. Вып. 7. С.166-173.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.93

УДК 539.375

Д.В.Гриліцький

ПРО КОНТАКТНУ ВЗАЄМОДІЮ ДВОХ ШОРСТКИХ ШАРІВ З ТЕПЛОУТВОРЕННЯМ І СТИРАННЯМ ВІД ТЕРТЯ*

Задача теплопружності про контактну взаємодію двох шарів за рівномірного їх обтиснення нормально до площини контакту з урахуванням теплоутворення й стирання від тертя розглянута в праці [3]. У постановці задачі вважали, що зовнішні площини пакету жорстко защемлені, на них підтримується нульова температура і тепловий контакт шарів ідеальний. Задача, близька до описаної у праці [3], досліджена у публікації [2].

Задача про контактну взаємодію двох шарів у даній статті розглянута у більш загальній постановці, ніж у праці [3]. А саме, вважаємо, що шари обмежені шорсткими площинами, тепловий контакт між ними неідеальний, а між площинами шарів, які не контактують, та зовнішнім середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона. Нижня основа двошарового пакету жорстко закріплена, а до верхньої основи прикладене притискне напруження $p(\tau)$, що повільно змінюється в часі /див. рисунок/, і процес теплопровідності в пакеті є квазіусталеним.

Припустимо, що другий шар в напрямі осі Z рухається по верхній площині першого шару з постійною малою швидкістю V_0. На площині контакту шарів за рахунок дії сил тертя відбувається теплоутворення і стирання. Визначимо температурні поля, напруження і переміщення в пакеті та ресурс трибоспряження.

За даної постановки задачі складова переміщення u_i по осі x дорівнює нулю, а складові переміщення v_i та w_i, а також

* Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.