1. К а р л с л о у Г., Е г е р Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. 2. К о м а р о в Г.Н. Нестационарная теплопроводность многослойных систем // Тепловые напряжения в элементах конструкции: Докл. науч. сообщ. К., 1967. Вып. 7. С.166-173.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.93

УДК 539.375

Д.В.Гриліцький

ПРО КОНТАКТНУ ВЗАЄМОДІЮ ДВОХ ШОРСТКИХ ШАРІВ З ТЕПЛОУТВОРЕННЯМ І СТИРАННЯМ ВІД ТЕРТЯ*

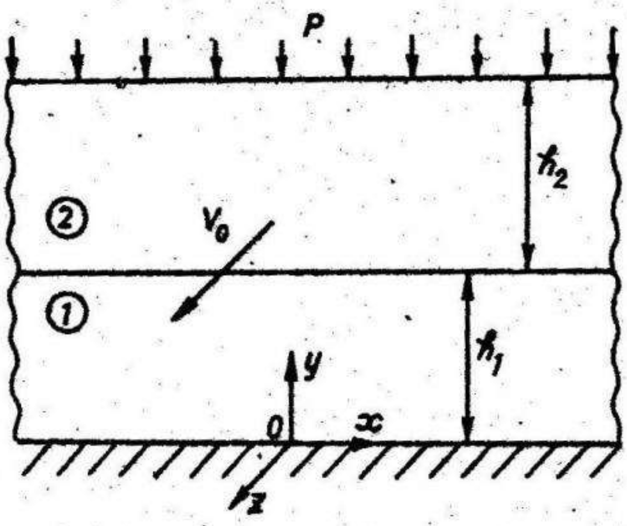
Задача теплопружності про контактну взаємодію двох шарів за рівномірного їх обтиснення нормально до площини контакту з урахуванням теплоутворення й стирання від тертя розглянута в праці [3]. У постановці задачі вважали, що зовнішні площини пакету жорстко защемлені, на них підтримується нульова температура і тепловий контакт шарів ідеальний. Задача, близька до описаної у праці [3], досліджена у публікації [2].

Задача про контактну взаємодію двох шарів у даній статті розглянута у більш загальній постановці, ніж у праці [3]. А саме, вважаємо, що шари обмежені шорсткими площинами, тепловий контакт між ними неідеальний, а між площинами шарів, які не контактують, та зовнішнім середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона. Нижня основа двошарового пакету жорстко закріплена, а до верхньої основи прикладене притискне напруження $p(\tau)$, що повільно змінюється в часі /див. рисунок/, і процес теплопровідності в пакеті є квазіусталеним.

Припустимо, що другий шар в напрямі осі z рухається по верхній площині першого шару з постійною малою швидкістю V_0. На площині контакту шарів за рахунок дії сил тертя відбувається теплоутворення і стирання. Визначимо температурні поля, напруження і переміщення в пакеті та ресурс трибоспряження.

За даної постановки задачі складова переміщення u_i по осі x дорівнює нулю, а складові переміщення v_i та w_i, а також

* Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.



температура t_i / $i = 1, 2$ / є функціями лише координати y . З урахуванням цього диференціальне рівняння теплопровідності, рівняння термопружності в переміщеннях та формули для напружень стосовно цієї задачі мають вигляд

$$\frac{d^2 t_i}{dy^2} = 0; \qquad /1/$$

$$\frac{d^2 V_i}{dy^2} - \beta_i \frac{dt_i}{dy} = 0, \quad \frac{d^2 W_i}{dy^2} = 0. \qquad /2/$$

$$\sigma_y^{(i)} = \mu_i \delta_i \left(\frac{dV_i}{dy} - \beta_i t_i\right), \quad \tau_{zy}^{(i)} = \mu_i \frac{dW_i}{dy}. \qquad /3/$$

$$\beta_i = \alpha_i (1+\nu_i)(1-\nu_i)^{-1}, \quad \delta_i = 2(1-\nu_i)(1-2\nu_i)^{-1} \ (i = 1,2).$$

Тут μ_i, ν_i, α_i – відповідно коефіцієнти Ляме, Пуассона, лінійного теплового розширення.

Механічні умови задачі:

$$y = 0: V_1 = W_1 = 0; \ y = h_1 + h_2; \ V_2 = -\varepsilon(\varepsilon > 0), W_2 = 0;$$

$$y = h_1: \tau_{zy}^{(1)} = \tau_{zy}^{(2)} = f P(\tau), \ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} = -P(\tau), \qquad /4/$$

$$V_1 + V_1^{(c)} + V_1^{(u)} = V_2 + V_2^{(c)} + V_2^{(u)}.$$

Теплові умови задачі:

$$y = 0: \frac{dt_1}{dy} = \gamma_1 t_1; \ y = h_1 + h_2: \frac{dt_2}{dy} = -\gamma_2 t_2;$$

$$y = h_1: \lambda_1 \frac{dt_1}{dy} - \lambda_2 \frac{dt_2}{dy} = f_0 V_0 P(\tau); \ \lambda_1 \frac{dt_1}{dy} + \lambda_2 \frac{dt_2}{dy} + h(t_1 - t_2) = 0. \qquad /5/$$

В умовах /4/ та /5/ введені позначення: V_i, W_i – компоненти термопружного переміщення; $V_i^{(c)}$ – переміщення від стирання;

$V_i^{(ш)}$ – переміщення від зім"яття мікронерівностей; $\sigma_y^{(i)}$ та $\tau_{zy}^{(i)}$ напруження; t_i – температура; γ_i – відносні коефіцієнти теплообміну; λ_i – коефіцієнти теплопровідності; h_i – товщини шарів; h – термічна провідність площини контакту /$h \to \infty$ відповідає ідеальному тепловому контакту/; $f_0 = (1 - K_0) f$, де f – коефіцієнт тертя, $K_0 (K_0 < 1)$ – коефіцієнт, що визначає ту частину роботи сил тертя на одиницю площі за одиницю часу, що витрачається на стирання шарів $\sim K_0 f V_0 p(\tau)$, друга частина роботи сил тертя $\sim (1-K_0) f V_0 p(\tau) = f_0 V_0 p(\tau)$ витрачається на нагрівання шарів.

Вважаємо, що відбувається абразивне стирання. У цьому випадку величина стирання пропорційна роботі сил тертя [1] і визначається співвідношенням

$$V_i^{(c)} = (-)^i m_i f V_0 \int_0^{\tau} p(\eta)\, d\eta, \qquad /6/$$

де m_i – коефіцієнти, що характеризують податність матеріалу стиранню /коефіцієнти стирання/.

Припускаємо, що існує лінійна залежність між тиском і переміщенням від зім"яття мікронерівностей, тобто

$$V_i^{(ш)} = (-)^i n_i p(\tau), \qquad /7/$$

де n_i – коефіцієнти, що характеризують деформаційні властивості шорсткості.

Поставлена задача зводиться до побудови розв"язків простих диференціальних рівнянь /I/ і /2/ за умов /4/ і /5/ з урахуванням формул /6/ та /7/.

Зінтегрувавши рівняння /I/ та задовольнивши умови /5/, знайдемо температуру в пакеті

$$t_i(y) = \varkappa_0^{-1} \varkappa^{i-1} \left\{ (-)^{i-1} \gamma_i y + \left[1 + \gamma_2 (h_1 + h_2)\right]^{i-1} \right\} V_0 f_0 p(\tau), \qquad /8/$$

де

$$\varkappa_0 = \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 \varkappa, \quad \varkappa = \left[\lambda_1 \gamma_1 + h(1 + h_1 \gamma_1)\right] \left[\lambda_2 \gamma_2 + h(1 + h_2 \gamma_2)\right]^{-1}.$$

Інтегруючи рівняння /2/ та задовольняючи умови /4/, крім останнього співвідношення, одержуємо вирази для визначення переміщень у стичних тілах

$$V_i = 2^{-1} \beta_i A_i y^2 + B_i y + C_i, \quad W_i = M_i y + N_i, \qquad /9/$$

у яких

$$\begin{gathered} A_i = \varkappa_0^{-1} (-\varkappa)^{i-1} \gamma_i f_0 V_0 p(\tau), \quad N_1 = 0, \quad N_2 = -(1 + h_1^{-1} h_2) f p(\tau), \\ M_i = \mu_i f p(\tau), \quad B_i = \left\{ \varkappa_0^{-1} \beta_i \left[\varkappa (1 + \gamma_2 (h_1 + h_2))\right]^{i-1} f_0 V_0 - \mu_i^{-1} \delta_i^{-1} \right\} p(\tau), \\ C_1 = 0, \quad C_2 = -\varepsilon - (h_1 + h_2) \left\{ (2\gamma_0)^{-1} \beta_2 \varkappa \left[2 + \gamma_2 (h_1 + h_2)\right] f_0 V_0 - \mu_i^{-1} \delta_i^{-1} \right\} p(\tau). \end{gathered} \qquad /10/$$

Тиск між шарами, а отже, і тиск, яким притискується двошаровий пакет, визначаємо з останнього співвідношення умов /4/. Задовольнивши його, одержуємо інтегральне рівняння задачі для визначення $p(\tau)$ з урахуванням теплоутворення, стирання та шорсткості поверхонь стичних тіл:

$$(K_n + K_ш - K_t)p(\tau) + K_c \int_0^{\tau} p(\eta)\,d\eta = \varepsilon, \qquad /11/$$

де

$$K_n = h_1(\mu_1\delta_1)^{-1} + h_2(\mu_2\delta_2)^{-1}, \quad K_ш = n_1 + n_2, \quad K_c = (m_1 + m_2) f V_0,$$

$$K_t = (2\varkappa_0)^{-1}\left[\beta_1 h_1(2 + h_1\gamma_1) + \varkappa\beta_2 h_2(2 + h_2\gamma_2)\right] f_0 V_0. \qquad /12/$$

Беручи похідну по τ від обох частин /11/, отримуємо диференціальне рівняння з початковою умовою

$$(K_n + K_ш - K_t)p'(\tau) + K_c p(\tau) = 0, \qquad /13/$$

$$p(0) = \varepsilon(K_n + K_ш - K_t)^{-1}. \qquad /14/$$

Розв"язок рівняння /13/ за умови /14/ визначається формулою

$$p(\tau) = \varepsilon(K_n + K_ш - K_t)^{-1} e^{-\frac{K_c}{K_n + K_ш - K_t}\tau}. \qquad /15/$$

Для того щоб умова /14/ мала фізичний сенс, необхідне виконання нерівності

$$(K_n + K_ш - K_t) > 0. \qquad /16/$$

Розглянемо окремі випадки.

1. Припустимо, що теплоутворення відсутнє, тобто $K_t = 0$. У цьому випадку нерівність /16/ завжди виконується і при фіксованому параметрі ε контактний тиск експоненціально зменшується з часом.

Лінійне стирання залежно від часу знаходимо шляхом підставляння формули /15/ при $K_t = 0$ у співвідношення /6/. У результаті маємо вираз

$$V_i^{(c)} = (-)^{i-1} \varepsilon K_c m_i f V_0 \left(e^{-\frac{K_c}{K_n + K_ш}\tau} - 1\right). \qquad /17/$$

Ресурсом трибоспряження називаємо час τ_*, за який стирання досягає гранично допустимої або проектної величини h_*, тобто

$$-V_1^{(c)}(\tau_*) + V_2^{(c)}(\tau_*) = h_*. \qquad /18/$$

За співвідношеннями /17/ і /18/ визначаємо τ_*:

$$\tau_* = K_c^{-1}(K_n + K_ш)\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon - h_*}. \qquad /19/$$

Попередня формула має сенс тоді, коли

$$(\varepsilon - h_*) > 0. \qquad /20/$$

2. Стирання відсутнє, тобто $K_c = 0$. Тиск визначаємо з формули /14/ за умови /16/. Якщо ж за деяких значень вхідних параметрів умова /16/ порушується, що може спостерігатися навіть у разі дуже малого нагрівання тіл, то це означає, що поставлена задача з теплоутворенням при значеннях цих параметрів не має розв"язку. Цього не трапиться, якщо параметр ε не фіксувати, а дати йому можливість, крім додатних, набувати також від"ємних значень та дорівнювати нулю, або ж, що те саме, на верхній площині пакета задавати не переміщення, а нормальне напруження $p(\tau)$.

Отже, якщо на верхній площині пакета задане нормальне напруження, то співвідношення /10/ справедливе, крім коефіцієнта C_2, який визначається за формулою

$$C_2 = \left\{2^{-1}h_1(\beta_1\gamma_1 + \varkappa\beta_2\gamma_2) + \beta_1 - \varkappa\beta_2\left[1 + \gamma_2(h_1 + h_2)\right]\right\}\varkappa_0^{-1}h_1 f_0 V_0 p(\tau) -$$
$$- \left[(\mu_1\delta_1)^{-1} - (\mu_2\delta_2)^{-1}\right]h_1 p(\tau), \qquad /21/$$

а вертикальне переміщення верхньої площини пакета має значення

$$V_2(h_1 + h_2) = -(K_n + K_ш - K_t)\,p(\tau). \qquad /22/$$

Як випливає з /22/, у разі порушення умови /16/ права частина останньої формули може набирати додатного значення та дорівнювати нулю.

Наведемо ще формулу для визначення температури на площині стикання шарів T_* за їх ідеального теплового контакту, припустивши, що $f = f_1 + f_2 T_*$ (f_1 і f_2 є константи).

$$T_* = \frac{(1 + h_1\gamma_1)(1 + h_2\gamma_2)f_{10}V_0 p(\tau)}{\lambda_1\gamma_1(1 + h_2\gamma_2) + \lambda_2\gamma_2(1 + h_1\gamma_1) - p(\tau)f_{20}V_0(1 + h_1\gamma_1)(1 + h_2\gamma_2)} \qquad /23/$$

При цьому повинна виконуватись нерівність

$$\left[\lambda_1\gamma_1(1 + h_2\gamma_2) + \lambda_2\gamma_2(1 + h_1\gamma_1) - p(\tau)f_{20}V_0(1 + h_1\gamma_1)(1 + h_2\gamma_2)\right] > 0, \qquad /24/$$

що називається умовою реалізації стаціонарного режиму теплопровідності [3].

У співвідношення /23/ і /24/ входить тиск $p(\tau)$. Його можна задавати або знаходити за формулою /15/ ($K_c = 0$) за умови /16/, в яку входить параметр K_t. Цей параметр визначаємо через характеристику $\varkappa$, яка у випадку ідеального теплового контакту набуває значення

$$\varkappa = (1+k_1\gamma_1)(1+h_2\gamma_2)^{-1}. \qquad /25/$$

3. Одночасно відбуваються процеси стирання і теплоутворення, що відповідає реальності. У цьому випадку, щоб отримати узгодженість перебігання цих процесів у часі та узгодженість граничних і початкових умов, граничну задачу теплопровідності задавати й розв"язувати в нестаціонарній постановці, що до певної міри утруднене. З огляду на це, розглянуту контактну задачу слід трактувати як наближену. У цьому сенсі буде наближеною також формула /15/ і ті співвідношення, що можуть бути одержані на її основі.

Наприкінці зазначимо, що задача про контактну взаємодію двох плоскопаралельних шарів, які обмежені ідеально гладкими площинами, з урахуванням теплоутворення, але без стирання, розглянута також В.М.Онишкевичем в кандидатській дисертації.

1. Александров В.М., Галин Л.А., Пириев Н.П. Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины // Изв. АН СССР. Механіка твердого тіла. 1978. № 4. С.60-67. 2. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1990. № 1. С.24-28. 3. Аннакулова Г.К. Контактная задача термоупругости о взаимодействии двух слоев // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1989. № 7253-В89. С.1-26.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.93