УДК 517.956

І.І.Верба

СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З ПРЯМОКУТНИМ ОТВОРОМ В УМОВАХ КУБІЧНОГО ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ ПО ТОВЩИНІ

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку завтовшки 2δ з прямокутним отвором $|x_i|<a_i$ $(i=1,2)$. Нехай бічна поверхня пластинки $x_3=\delta$ нагрівається потоком тепла потужністю $q(x_1,x_2)$, а через поверхню $x_3=-\delta$ здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Тоді наближена система рівнянь теплопровідності, що відповідає кубічному закону розподілу температури по товщині пластинки

$$t=\left(1+\frac{\delta^2\Delta}{6}-\frac{x_3^2\Delta}{2}\right)T+\left[\left(1+\frac{\delta^2\Delta}{10}\right)\frac{x_3}{\delta}-\frac{x_3^3\Delta}{6\delta}\right]T^*$$

має вигляд [4]

$$\left(\Lambda+\frac{\alpha\delta^2}{3}\right)\Delta T-\frac{\alpha\delta^2}{15}\Delta T^*-\alpha T+\alpha T^*=-q(x_1,x_2),$$

$$-\frac{\alpha\delta^2}{3}\Delta T+\frac{1}{15}(6\Lambda+\alpha\delta^2)\Delta T^*-\alpha T-\left(\frac{4}{\tau}+\alpha\right)T^*=-q(x_1,x_2), \quad /1/$$

де $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $q(x_1,x_2)=q_0\exp\left[-\kappa((x_1-d_1)^2+(x_2-d_2)^2)\right]$,

T, T^* – інтегральні характеристики температури [4]; $\Lambda=2\lambda\delta$ – зведений коефіцієнт теплопровідності; $\tau=2\delta/\lambda$ – внутрішній термоопір пластинки; κ – коефіцієнт; q_0 – максимальна питома потужність у центрі нагріву.

Припускаємо, що поверхні отвору теплоізольовані, тобто,

$$\frac{\partial T}{\partial x_{i\pm1}}=\frac{\partial T^*}{\partial x_{i\pm1}}=0 \quad \text{при } |x_i|<a_i,\ |x_{i\pm1}|=a_{i\pm1}, \quad /2/$$

де $i\pm1=\begin{cases}2, & i=1;\\ 1, & i=2.\end{cases}$

Крім цього, нехай на безмежності температура пластинки та її перші похідні прямують до нуля

$$T\Big|_{(x_1,x_2)\to\infty}=T^*\Big|_{(x_1,x_2)\to\infty}=\frac{\partial T}{\partial x_i}\Big|_{(x_1,x_2)\to\infty}=\frac{\partial T^*}{\partial x_i}\Big|_{(x_1,x_2)\to\infty}=0. \quad /3/$$

Система /1/ зводиться до такої системи незалежних рівнянь

$$\Delta\varphi_m - \varkappa_m^2\varphi_m = -L_m q(X_1,X_2) \quad (m=1,2), \qquad /4/$$

де $\varphi_m = T + \mu_m T^*$, $\mu_m = \dfrac{-(15+7B_i)\pm\sqrt{225+210B_i+124B_i^2}}{45B_i}$,

$\varkappa_m^2 = \dfrac{B_i(2-5\mu_m^2)}{4+B_i}$, $L_m = \dfrac{6+B_i+\mu_m(1-\frac{1}{3}B_i)}{4+B_i}\,\dfrac{\delta}{\lambda}$, $B_i = \dfrac{\alpha\delta}{\lambda}$ – критерій Біо; $X_i = \dfrac{x_i}{\delta}$ $(i=1,2)$ – безрозмірні координати.

Граничні умови /2/, /3/ для функцій φ_m мають вигляд

$$\left.\frac{\partial\varphi_m}{\partial X_i}\right|_{X_i=\pm A_i} M(X_{i\pm1}) = 0,\ A_i = \frac{a_i}{\delta}\ (i=1,2;\ m=1,2), \qquad /5/$$

$$\left.\varphi_m\right|_{(X_1,X_2)\to\infty} = \left.\frac{\partial\varphi_m}{\partial X_i}\right|_{(X_1,X_2)\to\infty} = 0, \qquad /6/$$

де $M(X_i) = S_+(X_i+A_i) - S_-(X_i-A_i)$ – характеристична функція відрізка; $S_\pm(X)$ – асиметричні одиничні функції [3].

Граничну задачу /4/-/6/ розв"язуємо методом продовження функцій [2]. Уводимо нові невідомі функції Φ_m, що збігаються зі шуканими зовні прямокутника $\mathcal{D} = \{(X_1,X_2): |X_1|<A_1, |X_2|<A_2\}$ і дорівнюють нулю у ньому, тобто

$$\Phi_m(X_1,X_2) = \varphi_m(X_1,X_2)\,M(X_1,X_2), \qquad /7/$$

де $M(X_1,X_2) = 1 - M(X_1)M(X_2)$ – характеристична функція області.

Враховуючи правила диференціювання узагальнених функцій та граничні умови /5/ на контурі прямокутника, для функцій Φ_m у просторі узагальнених функцій отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^2\Phi_m}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2\Phi_m}{\partial X_2^2} - \varkappa_m^2\Phi_m = \sum_{i=1}^{2}\Big[\left.\varphi_m\right|_{X_i=A_i} M(X_{i\pm1})\delta'_-(X_i-A_i) -$$

$$- \left.\varphi_m\right|_{X_i=-A_i} M(X_{i\pm1})\delta'_+(X_i+A_i)\Big] - L_m q(X_1,X_2)M(X_1,X_2), \qquad /8/$$

де $\delta'_\pm(X)$ – похідні від асиметричних дельта-функцій [3].

Значення функцій φ_m на контурі прямокутника, що входять у рівняння /8/, розкладаємо у ряди Фур"є та підставляємо ці розклади у /8/. Розв"язки отриманих рівнянь записуємо як згортку фундаментального розв"язку рівняння Гельмгольца та їхніх правих частин у вигляді

$$\Phi_m(X_1,X_2) = \sum_{i=1}^{2}\left[\mathcal{X}^+_{mi}(X_1,X_2) - \mathcal{X}^-_{mi}(X_1,X_2)\right] + \mathcal{F}_m(X_1,X_2). \qquad /9/$$

Тут
$$\chi_{mi}^{\pm}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A_{i\pm1}}^{A_{i\pm1}}\left[\frac{1}{2}b_{mi0}^{\pm}+\sum_{n=1}^{\infty}b_{min}^{\pm}\cos\lambda_n^{(i\pm1)}\xi+c_{min}^{\pm}\sin\lambda_n^{(i\pm1)}\xi\right]\times$$
$$\times g_m(x_i\mp A_i,\ x_{i\pm1}-\xi)d\xi,\quad g_m(\xi,\zeta)=\frac{\varkappa_m\xi}{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}K_1(\varkappa_m\sqrt{\xi^2+\zeta^2}),$$

$$\mathcal{F}_m(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R^2\setminus D}q(\xi,\zeta)K_0(\varkappa_m\sqrt{(x_1-\xi)^2+(x_2-\zeta)^2})d\xi d\zeta,$$

$\lambda_n^{(i)}=\frac{\pi n}{A_i}$, $K_i(\xi)(i=0,1)$ – функції Макдональда i -го порядку; $b_{min}^{\pm}$, $c_{min}^{\pm}$ – коефіцієнти Фур"є розкладів функцій $\varphi_m|_{x_i=\pm A_i}$ на контурі прямокутника, які знаходимо із нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$b_{mik}^{\pm}+\sum_{n=0}^{\infty}B_{mink}b_{min}^{\pm}=S_{mik}^{\pm},$$
$$c_{mik}^{\pm}+\sum_{n=1}^{\infty}N_{mink}c_{min}^{\pm}=Q_{mik}^{\pm}, \tag{10}$$

де
$$S_{mik}^{\pm}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{mink}(b_{m,i\pm1,n}^{+}+b_{m,i\pm1,n}^{-})+\sum_{n=1}^{\infty}R_{mink}(c_{m,i\pm1,n}^{+}+c_{m,i\pm1,n}^{-})+H_{mik}^{\pm},$$
$$Q_{mik}^{\pm}=\sum_{n=0}^{\infty}F_{mink}(b_{m,i\pm1,n}-b_{m,i\pm1,n})\mp\sum_{n=1}^{\infty}M_{mink}(c_{m,i\pm1,n}^{+}-c_{m,i\pm1,n}^{-})+G_{mik}^{\pm},$$
$$B_{mink}=\frac{1}{\pi A_{i\pm1}}\int\limits_0^{2A_{i\pm1}}f_1(\xi,2A_{i\pm1},\lambda_k^{(i\pm1)},\lambda_n^{(i\pm1)})g_m(2A_i,\xi)d\xi,$$

$$N_{mink}=\frac{1}{\pi A_{i\pm1}}\int\limits_0^{2A_{i\pm1}}f_2(\xi,2A_{i\pm1},\lambda_k^{(i\pm1)},\lambda_n^{(i\pm1)})g_m(2A_i,\xi)d\xi,$$

$$f_1(\xi,2b,\lambda_k,\lambda_n)=\begin{cases}2b-\xi, & n=k=0;\\ (2b-\xi)\cos\lambda_k\xi-\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k\xi, & n=k=1,2,\dots;\\ \frac{2(-1)^{n+k}}{\lambda_n^2-\lambda_k^2}(\lambda_k\sin\lambda_k\xi-\lambda_n\sin\lambda_n\xi), & n\neq k\\ & n,k=0,1,\dots,\end{cases}$$

$$f_2(\xi,2b,\lambda_k,\lambda_n)=\begin{cases}(2b-\xi)\cos\lambda_k\xi+\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k\xi, & n=k=1,2,\dots;\\ \frac{(-1)^{n+k}}{\lambda_k^2-\lambda_n^2}(\lambda_k\sin\lambda_n\xi-\lambda_n\sin\lambda_k\xi), & n\neq k\\ & n,k=1,2,\dots.\end{cases}$$

Значення інших коефіцієнтів системи /10/ через громіздкість одержаних виразів тут не наводимо.

Для коефіцієнтів B_{mink}, N_{mink} на основі властивостей функцій Макдональда отримуємо оцінки

$$B_{mink} = \frac{const}{n^2 k^2} + o\left(\frac{1}{n^2 k^2}\right), \quad N_{mink} = \frac{const}{nk} + o\left(\frac{1}{nk}\right).$$

Аналогічні оцінки отримані для інших коефіцієнтів системи /10/. Ці оцінки дають змогу застосувати до системи /10/ теорію розв"язальності нескінченних систем [1], з якої випливає таке твердження.

<u>Твердження.</u> Система /10/ має єдиний розв"язок, що задовольняє умову

$$\sum_{n=0}^{\infty} [b_{min}^{\pm}]^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [c_{min}^{\pm}]^2 < \infty \quad (m=1,2;\ i=1,2).$$

Наближений розв"язок можна знайти методом редукції.

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977. 2. Коляно Ю.М., Верба И.И. Задача Дирихле для областей с прямоугольными вырезами // Дифференц. уравнения. 1985. Т.21. № 9. С.1624-1626. 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1977. 4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Громовык В.И., Лозбень В.Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. К., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.93