УДК 519.21

Я.І.Єлейко

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ ВІДНОВЛЕННЯ

Нехай x_t – напівмарківський процес зі скінченною множиною станів $\{1,2,\dots,m\}$ та неперервним часом.

Позначимо

$$\tau = \inf\{t>0;\, x_t \neq x_0\};$$

$$F_{ij}(t) = P\{\tau<t,\, x_\tau = j / x_0 = i\};$$

$$F_i(t) = P\{\tau < t / x_0 = i\}.$$

Тоді

$$F_i(t) = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(t).$$

Вважаємо, що всі перехідні ймовірності

$$p_{ij} = P\{x_\tau = j / x_0 = i\} > 0.$$

Тоді, матриця, складена з перехідних ймовірностей, нерозкладна, а отже, існує для вкладеного ланцюга Маркова $x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \dots, x_{\tau_n}, \dots$ єдиний стаціонарний розподіл $\rho_1, \dots, \rho_m$:

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i = 1; \quad \sum_{j=1}^{m} \rho_{ji} p_j = \rho_i \; ; \; \rho_i > 0 \;\; \forall i,$$

де $\tau_1 = \tau_1 \tau_2, \dots \tau_n$ – послідовність стрибків процесу.

Розглянемо функцію відновлення

$$U_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t,\, x_{\tau_n} = j\},$$

де P_i – умовна ймовірність за умови $x_0 = i$.

Асимптотика функції відновлення відіграє важливу роль у дослідженні асимптотичних властивостей функціоналів, згаданих на напівмарківському процесі. Вона відома у випадку, коли середній час перебування в станах процесом x_t є скінченним. Якщо, середній час перебування в станах є нескінченним, асимптотика функції відновлення досліджена лише за умови*

$$1 - F_i(t) \sim a_i t^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t}\right),\; t \to \infty, \qquad /1/$$

де $L\left(\frac{1}{t}\right)$ – повільно змінна в нулі функція; $\alpha \in (0,1)$.

* Шуренков В.М., Елейко Я.И. Предельные распределения временных средних для полумарковского процесса с конечным числом состояний // Укр. мат. журн. 1979. № 5. С.598-603.

Визначимо асимптотику функції відновлення у випадку, коли $\alpha = 1$ у формулі /1/.

<u>Теорема.</u> Нехай x_t – напівмарківський процес зі скінченною множиною станів $\{1,2,\dots,m\}$ і неперервним часом.
Якщо

$$F_{ij}(\infty)-F_{ij}(t)\sim a_{ij}\frac{1}{t}L\left(\frac{1}{t}\right),\ t\to\infty, \qquad /2/$$

то

$$U_{ij}(t)\sim\frac{1}{m_i(t)}\int_0^\infty c_{ij}(u)du,\ t\to\infty,$$

де

$$m_i(t)=\int_0^t P_i\{\tau_i>u\}du;$$

$$c_{ij}(t)=\sum_{n=0}^\infty P_i\{\tau_n<t,\ \tau_i>t,\ x_{\tau_n}=j\};$$

τ_i – момент першого повернення у стан i.

<u>Доведення.</u> Згідно з формулою повної ймовірності за моментом першого повернення у стан

$$\begin{aligned}U_{ij}(t)&=\sum_{n=0}^\infty P_i\{\tau_i>t,\ x_{\tau_n}=j,\ \tau_n<t\}+\\&+\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^n\int_0^t P_i\{\tau_i\in dy,\ \tau_i=\tau_k\}P_i\{\tau_{n-k}<t-y,\ x_{\tau_{n-k}}=j\}=\\&=c_{ij}(t)+\int_0^t P_i\{\tau_i\in dy\}U_{ij}(t-y).\end{aligned} \qquad /3/$$

Рівняння /3/ є рівнянням відновлення. Його розв"язок записуємо у вигляді

$$U_{ij}(t)=\int_0^t c_{ij}(t-y)\hat{U}_i(dy),$$

де

$$\hat{U}_i(t)=\sum_{n=0}^\infty\hat{F}_i^{n*}(t),$$

$$\hat{F}_i^{0*}(t)=1,\ t>0,$$

$$\hat{F}^{1*}(t)=P_i\{\tau_i<t\},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\hat{F}_i^{n*}(t)=\int_0^t\hat{F}_i^{n-1*}(t-u)\hat{F}_i(du).$$

$\hat{U}_i(t)$ – функція відновлення, побудована за функцією розподілу $\hat{F}_i(t)$. З умов теореми випливає, що

$$1-\hat{F}_i(t)\sim c_i\frac{1}{t}L\left(\frac{1}{t}\right),\ t\to\infty, \qquad /4/$$

де

$$c_i=\sum_{i_1\neq i,\dots,i_n\neq i}p_{ii_1}\cdots p_{i_{n-1}i}\frac{1}{t}L\left(\frac{1}{t}\right)\left(a_{ii_1}+\dots+a_{i_{n-1}i}\right). \qquad /5/$$

Ряд/ /4/ є збіжним, оскільки мажорантним рядом є ряд

$$\sum_n p^n na ,$$

де $p = \max_{i,j} p_{ij}$, $a = \max_{i,j} a_{ij}$.
Оскільки згідно з /4/ $1 - \hat{F}_i(t)$ є правильно змінною з параметром $\alpha = 1$, тоді

$$\hat{U}_i(t) \sim \frac{t}{m_i(t)} , \quad t \to \infty .$$

З умов теореми випливає також, що $c_{ij}(t) = O(\frac{1}{t}), t \to \infty$.
Тоді відповідно до вузлової теореми відновлення

$$U_{ij}(t) = \int_0^t c_{ij}(t-u)\hat{U}_i(du) \sim$$

$$\sim \frac{1}{m_i(t)} \int_0^\infty c_{ij}(u)du .$$

Теорема доведена.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.93

УДК 511

Я.М.Холявка

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДІВ ТА МОДУЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ

Нехай $sn\, z$ – еліптична функція Якобі, $\varkappa$ – модуль $sn\, z$; $4\omega, 2\omega'$ – довільна фіксована пара основних періодів [1], ξ_1, ξ_2, ξ_3 – наближувальні алгебраїчні числа, $n = deg\, \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $L = \ln n + \sum_{i=1}^{3} \ln L(\xi_i)(deg \xi_i)^{-1}$.

Теорема. Існує ефективна постійна $\Lambda = \Lambda(\varkappa)$ така, що

$$|\omega - \xi_1| + |\omega' - \xi_2| + |\varkappa - \xi_3| > exp(-\Lambda n^2 L^2).$$

Доводимо цю теорему другим методом Гельфонда з таким вибором допоміжної функції та параметрів:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}\, z^k sn^l z ;$$

$4m\xi_1 + 2t\xi_2, m, t \in \mathbb{Z}, |m|, |t| < N$ – вузли інтерполяції;

$$K = \lambda^4 nL, L = \lambda^{-3} \ln \lambda K, N = \lambda^{-1}\sqrt{K}, S = \lambda L,$$

де λ – достатньо велике число; S – порядок похідної. В основ-