ній леми Гельфонда порядок похідної залишається той самий, а множина точок інтерполяції розширюється до $|m|, |t| < \lambda N$.

Протиріччя, яке доводить теорему, отримуємо з оцінки нулів $F(z)$ і теореми про нулі (/2/, теорема 1/.

При алгебраїчних періодах отримуємо оцінку модуля еліптичних функцій Якобі. Для еліптичних функцій Вейєрштрасса подібні оцінки отримані у праці /3/.

1. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., 1968.
2. Brownawell W.D., Masser D.W. Multiplicity estimates for analitic functions (I)// J. Reine Angew. Math. 1980. Vol. 314. P.200-216.
3. Холявка Я.М. О совместных приближениях инвариантов эллиптической функции алгебраическими числами: Диофантовы приближения. В 2 ч. М., 1986. Ч.2. С.114.121.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.93

УДК 539.377

Б.В.Ковальчук, О.І.Гой

УЗАГАЛЬНЕНЕ ЕНЕРГЕТИЧНЕ РІВНЯННЯ І ТЕОРЕМА ЄДИНОСТІ РОЗВ"ЯЗКУ КРАЙОВОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА

У монографії /3/ наведені диференціальні рівняння узагальненої термопружності анізотропних тіл для випадку, коли час релаксації теплового потоку є однаковим для всіх напрямів. У багатьох випадках час релаксації теплового потоку має різні значення для головних напрямів, і тоді узагальнений закон теплопровідності набуває вигляду

$$\left(1+\tau_p \frac{\partial}{\partial \tau}\right) q_p = -\lambda_{pj}^t \, t_{,j} \quad (p,j=1,2,3), \qquad /1/$$

де τ_p – час релаксації теплового потоку в напрямі осі x_p; λ_{pj}^t – коефіцієнти теплопровідності; q_p – компоненти вектора теплового потоку; t – температурне поле.

На основі /1/ у праці /1/ одержані інтегродиференціальні рівняння теплопровідності анізотропного тіла, які враховують ортотропію часу релаксації теплового потоку для головних напрямів.

Для такої релаксаційної моделі виводимо узагальнену формулу закону збереження енергії для термопружного середовища, тобто одержуємо основне енергетичне рівняння, і за допомогою цього рівняння доводимо теорему єдиності і розв"язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла.

<u>Основне енергетичне рівняння</u>. Вважаємо, що анізотропне тіло, яке займає область Ω, обмежену поверхнею S, у початковому стані має температуру t_0. Унаслідок дії теплових або силових факторів тіло буде деформуватися, а його температура змінюватись. У тілі виникатимуть переміщення $u_i(x,\tau)$ і приріст температури $\theta = t - t_0 \quad (x \in \Omega,\ \tau > 0)$.
Зміна температури спричиняє виникнення деформацій e_{ij} і напружень σ_{ij}, які є функціями координат x_i і часу τ.

Якщо припустити, що зміна температури невелика і не спричиняє істотних змін властивостей, матеріалу, то в цьому випадку співвідношення Дюгамеля-Неймана для анізотропного тіла записуємо як [2, 3]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\, e_{kl} - \beta_{ij}\theta \quad (i,j = 1,2,3). \qquad /2/$$

Тут c_{ijkl} - декартові компоненти тензора пружної жорсткості анізотропного тіла; $\beta_{ij} = \alpha^t_{kl} c_{ijkl}$, де α^t_{ij} - температурні коефіцієнти лінійного розширення анізотропного тіла.

Для виведення енергетичного рівняння виходимо з рівняння руху:

$$\sigma_{ij} + x_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (i,j = 1,2,3), \qquad /3/$$

де x_i - компоненти вектора масових сил.

Підставивши /2/ в рівняння руху /3/, дістанемо рівняння

$$c_{ijkl}\, u_{k,lj} + x_i = \rho\ddot{u}_i + \beta_{ij}\theta_{,j} \,. \qquad /4/$$

Помноживши тепер рівняння /4/ на $v_i = \dot{u}_i$, зінтегруємо його по області Ω, а потім застосуємо теорему Гаусса-Остроградського. У результаті одержимо рівняння

$$\frac{dK}{d\tau} + \frac{dW_e}{d\tau} = \int_\Omega x_i v_i\, d\Omega + \int_S p_i v_i\, dS + \int_\Omega \beta_{ij}\dot{e}_{ij}\theta\, d\Omega, \qquad /5/$$

де

$$K = \frac{\rho}{2}\int_\Omega v_i v_i\, d\Omega\,, \quad W_e = \frac{1}{2}\int_\Omega c_{ijkl}\, e_{kl}\, d\Omega\,. \qquad /6/$$

Формула /5/ виражає закон збереження енергії для термопружного тіла. Для явного врахування температурних факторів у рівнянні /5/ використаємо інтегродиференціальне рівняння узагальненої термопружності анізотропного тіла.

Допустивши, що в початковий момент часу швидкість нагрівання та швидкість переміщення дорівнюють нулю і внутрішні джерела тепла відсутні, інтегродиференціальне рівняння теплопровідності запишемо у вигляді [1]

$$\frac{\lambda_{ij}^{t}}{\tau_i}\int_0^{\tau}\theta_{,ij}(M,\zeta)\exp\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}d\zeta=t_0\beta_{ij}\dot{e}_{ij}+c_e\dot{\theta}-\omega_t, \qquad /7/$$

де c_e – об"ємна теплоємність за сталої деформації; ω_t – густина внутрішніх джерел тепла. При цьому враховано, що на основі співвідношення Коші $e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ з умови $\dot{u}\big|_{\tau=0}=0$ випливає, що в початковий момент часу швидкість деформацій $\dot{e}_{ij}\big|_{\tau=0}=0$.

Помноживши рівняння /7/ на θ та зінтегрувавши по області Ω, матимемо

$$\frac{\lambda_{ij}^{t}}{\tau_i}\int_{\Omega}\left[\int_0^{\tau}\theta(M,\tau)\theta_{,ij}(M,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta\right]d\Omega=$$

$$=t_0\int_{\Omega}\beta_{ij}\dot{e}_{ij}\theta d\Omega+c_l\int_{\Omega}\theta\dot{\theta}d\Omega-\int_{\Omega}\theta\omega_t d\Omega. \qquad /8/$$

Із рівнянь /5/ і /8/, врахувавши співвідношення $(\lambda_{ij}^{t}\theta_{,i}\theta)_{,j}=$ $=\lambda_{ij}^{t}\theta\theta_{,ij}+\lambda_{ij}^{t}\theta_{,i}\theta_{,j}$ після застосування теореми Гаусса-Остроградського одержимо основне енергетичне рівняння

$$\frac{dP_t}{d\tau}+\frac{dK}{d\tau}+\frac{dW_e}{d\tau}+\mathcal{X}_t=\int_{\Omega}x_i v_i d\Omega+\int_{S}p_i v_i dS+$$

$$+\frac{1}{t_c}\int_{\Omega}\theta\omega_t d\Omega+\frac{\lambda_{ij}^{t}}{t_c\tau_i}\int_{S}\left[\int_0^{\tau}\theta(M,\tau)\theta_{,i}(M,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta\right]n_j dS, \qquad /9/$$

де функції теплової енергії і диссипації мають вигляд

$$P_t = \frac{c_e}{2t_0}\int_\Omega \theta^2 d\Omega, \quad \chi_t = \frac{\lambda_{ij}^t}{t_0\tau_i}\int_\Omega \left[\int_0^\tau \theta_{,j}(M,\tau)\theta_{,i}(M,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta\right]d\Omega. \quad /10/$$

Ми одержали узагальнений закон збереження енергії для термопружного середовища. Права частина формули /9/ містить джерела, які створюють поле деформації і температури.

<u>Теорема єдиності</u>. Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω з поверхнею S, піддається дії масових сил X_i, поверхневих сил P_i, а також внутрішніх джерел тепла і нагрівання на поверхні.

Припускаємо, що переміщення $u_i(x,\tau)$, які виникають при цьому, і температура $t(x,\tau)$ є функціями класу $C^{(2)}$, а деформації e_{ij} та напруження σ_{ij} – функціями класу $C^{(1)}$ для $x \in \Omega + S$, $\tau > 0$.

За таких умов доведемо теорему єдиності розв"язків рівнянь /4/ і /7/, прийнявши такі крайові умови:

$$P_i(p,\tau) = \sigma_{ij}(p,\tau)n_j, \quad \theta(p,\tau) = \theta_c^S(p,\tau), \quad p \in S, \ \tau > 0, \qquad /11/$$

$$u_i(M,0) = \varphi_i(M), \quad \dot{u}_i(M,0) = \psi_i, \quad \theta(M,0) = \theta_N(M), \quad M \in \Omega. \qquad /12/$$

Нехай u_i', θ' і u_i'', θ'' – різні розв"язки системи рівнянь /4/, /7/ є крайовими умовами /11/, /12/. Тоді величини $u_i^* = u_i' - u_i''$, $\theta^* = \theta' - \theta''$, а також $e_{ij}^* = e_{ij}' - e_{ij}''$, $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}' - \sigma_{ij}''$ будуть задовольняти такі співвідношення:

$$c_{ijkl}\, u_{k,lj}^* = \rho \ddot{u}_i^* + \beta_{ij}\theta_{,j}^*, \qquad /13/$$

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\int_0^\tau \theta_{,ij}^*(M,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta = t_0\beta_{ij}\dot{e}_{ij}^* + c_e\dot{\theta}^*, \qquad /14/$$

$$P_i^*(p,\tau) = 0, \quad \theta^*(p,\tau) = 0, \quad p \in S, \ \tau > 0, \qquad /15/$$

$$u_i^*(M,0) = 0, \quad \dot{u}_i^*(M,0) = 0, \quad \theta^*(M,0) = 0, \quad M \in \Omega. \qquad /16/$$

Оскільки всередині тіла $x_i^* = 0$, $\omega_t^* = 0$, а на поверхні $p_i^* = 0$, $\theta^* = 0$, то на основі /9/ маємо

$$\frac{d}{d\tau}\left(K^* + W_e^* + P_t^*\right) + \chi_t^* = 0. \qquad /17/$$

Якщо зауважити, що вираз $\lambda_{ij}^{t}\theta_{,j}^{*}(M,\tau)\theta_{,i}^{*}(M,\zeta)$ є достатньо визначеною квадратичною формою, то умову /I7/ можна записати так

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}c_{ijkl}e_{ij}^{*}e_{kl}^{*}+\frac{\rho}{2}v_i^{*}v_i^{*}+\frac{c_t}{2\tau}\theta^{*2}\right]d\Omega=$$

$$=-\frac{\lambda_{ij}^{t}}{t_0\tau_i}\int\limits_{\Omega}\left[\int\limits_0^{\tau}\theta_{,j}(M,\tau)\theta_{,i}(M,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta\right]d\Omega\leq 0. \qquad /I8/$$

Зауваживши також, що робота деформації на одиницю об"єму є додатньо визначеною квадратичною формою, зведемо її до суми квадратів за методом Якобі [3].

$$W_e^{*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\right)\varphi_k^{*2}, \quad \Delta_0=1, \qquad /I9/$$

де $\Delta_k=det(c_{m,n})_k \quad (m,n=1,2,\ldots,k)$, /20/

а $\varphi_k^{*}=\sum\limits_{n=1}^{6}c_{kn}e_n^{*} \quad (k=1,2,\ldots,6)$, /2I/

причому $c_{kn}=0$ при $k>n$.

Нарешті, використавши співвідношення

$$e_{ij}^{*}=\begin{cases} e_i^{*} & \text{для } i=j, \\ \frac{1}{2}e_{9-i-j}^{*} & \text{для } i\neq j, \end{cases} \qquad /22/$$

і врахувавши /I9/, умову /I7/ можна записати як

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\right)\varphi_k^{*2}+\frac{1}{2}\rho v_i^{*}v_i^{*}+\frac{c_\varepsilon}{2t_0}\theta^{*2}\right]d\Omega\leq 0. \qquad /23/$$

Із /23/ випливає, що при $\tau>0$ інтеграл зліва не зростає, а з іншого боку при $\tau=0$ на основі /I6/ перетворюється в нуль. Проте оскільки підінтегральна функція додатна, то це можливе тільки за умови, коли інтеграл дорівнює нулю. Звідси у свою чергу випливає, що $\varphi_k^{*}=0$, $v_i^{*}=0$, $\theta^{*}=0$ для $\tau>0$ в області Ω. Врахувавши ці умови, із /2I/ одержимо, що $e_i^{*}=0$, тобто $e_{ij}^{*}=0$, а отже, на основі /2/ і $\sigma_{ij}^{*}=0$. Згідно з одержаними умовами, доходимо висновку, що $\sigma_{ij}'=\sigma_{ij}''$, $e_{ij}'=e_{ij}''$; $\theta'=\theta''$ для $\tau>0$ в області Ω.

Таким чином, ми довели, що розв"язок задачі термопружності єдиний для напружень, деформацій і температури, а для переміщень маємо $u_i' = u_i''$ + лінійний член, який відповідає жорсткому поворотові і переміщенню.

1. К о л я н о Ю.М., К о в а л ь ч у к Б.В., Г о й О.И. Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела, учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока // Изв. высших уч. заведений. Математика. 1988. № 9. С.81-83. 2. Н о в а ц к и й В. Теория упругости. М., 1975. 3. П о д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 5.05.93

УДК 517.956

В.С.Грицевич, Б.В.Ковальчук

РОЗВ"ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ПРЯМОКУТНІЙ ТОНКІЙ ПЛАСТИНЦІ, ЩО НАГРІВАЄТЬСЯ ПРОГРАМОВАНИМ РУХОМИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Нехай прямокутна у плані тонка пластинка, яка займає область $0 \leq x_1 \leq D_1,\ 0 \leq x_2 \leq D_2$, нагрівається точковим джерелом тепла, що рухається кусково-лінійною траєкторією за такою програмою:

$$x_i^* = x_i^K + v_i^K(\tau - \tau^K),\ i = 1,2;\ \tau \in [\tau^K, \tau^{K+1}],$$

де $0, \tau^1, \ldots, \tau^N$ задані вузлові моменти часу;

$v_i^K = (x_i^{K+1} - x_i^K)/\Delta\tau^K, \quad \Delta\tau^K = \tau^{K+1} - \tau^K.$

Програма інтенсивності нагрівання задається формулою

$$W(\tau) = \sum_{K=0}^{N-1} W_K [S_+(\tau - \tau^K) - S_+(\tau - \tau^{K+1})].$$

Розглянемо нестаціонарну задачу теплопровідності для цієї пластинки за умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$-\Delta T + \varkappa^2 T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{W(\tau)}{2\lambda h}\delta(x_1 - x_1^*(\tau), x_2 - x_2^*(\tau))S_+(\tau),$$

$$\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T\right)\Big|_{\Gamma} = 0,\ T\Big|_{\tau=0} = 0,\ \varkappa^2 = \frac{\alpha_z}{\lambda h}.$$

Розв"язок задачі шукаємо у вигляді розкладу за системою ортонормованих функцій: