Таким чином, ми довели, що розв"язок задачі термопружності єдиний для напружень, деформацій і температури, а для переміщень маємо $u_i' = u_i''$ + лінійний член, який відповідає жорсткому поворотові і переміщенню.

1. К о л я н о Ю.М., К о в а л ь ч у к Б.В., Г о й О.И. Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела, учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока // Изв. высших уч. заведений. Математика. 1988. № 9. С.81-83. 2. Н о в а ц к и й В. Теория упругости. М., 1975. 3. П о д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 5.05.93

УДК 517.956

В.С.Грицевич, Б.В.Ковальчук

РОЗВ"ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ПРЯМОКУТНІЙ ТОНКІЙ ПЛАСТИНЦІ, ЩО НАГРІВАЄТЬСЯ ПРОГРАМОВАНИМ РУХОМИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Нехай прямокутна у плані тонка пластинка, яка займає область $0 \leq x_1 \leq D_1,\ 0 \leq x_2 \leq D_2$, нагрівається точковим джерелом тепла, що рухається кусково-лінійною траєкторією за такою програмою:

$$x_i^* = x_i^k + v_i^k(\tau - \tau^k),\ i = 1,2;\ \tau \in [\tau^k, \tau^{k+1}],$$

де $0, \tau^1, \ldots, \tau^N$ задані вузлові моменти часу;

$$v_i^k = (x_i^{k+1} - x_i^k)/\Delta\tau^k,\quad \Delta\tau^k = \tau^{k+1} - \tau^k.$$

Програма інтенсивності нагрівання задається формулою

$$W(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} W_k[S_+(\tau - \tau^k) - S_+(\tau - \tau^{k+1})].$$

Розглянемо нестаціонарну задачу теплопровідності для цієї пластинки за умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$-\Delta T + \varkappa^2 T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{W(\tau)}{2\lambda h}\delta(x_1 - x_1^*(\tau), x_2 - x_2^*(\tau))S_+(\tau),$$

$$\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T\right)\Big|_\Gamma = 0,\ T\Big|_{\tau=0} = 0,\ \varkappa^2 = \frac{\alpha_z}{\lambda h}.$$

Розв"язок задачі шукаємо у вигляді розкладу за системою ортонормованих функцій:

де $\quad X_{ij}(x_1,x_2)=\varphi_{1i}(x_1)\varphi_{2j}(x_2),\ \varphi_{sr}(x_s)=\dfrac{\nu_{sr}\cos\nu_{sr}x_s+\beta\sin\nu_{sr}x_s}{\sqrt{\frac{1}{2}(\nu_{sr}^2+\beta^2)D_s+\beta}}$,

ν_{sr} — r -й корінь трансцендентного рівняння

$$tg\,D_s\nu_{sr}=\frac{2\beta\nu_{sr}}{\nu_{sr}^2-\beta^2}\ ;\quad s=1,2\ ;\ r=1,2,3,\dots;\ \beta=\frac{\alpha}{\lambda}\ .$$

Невідомі функції $T_{ij}(\tau)$ знаходимо у вигляді інтеграла

$$T_{ij}(\tau)=\frac{a}{2\lambda h}\int_0^{\tau}W(\xi)X_{ij}\Big|_{\substack{x_1=x_1^*(\tau)\\ x_2=x_2^*(\tau)}}e^{-\varrho_{ij}(\tau-\xi)}d\xi\ ,$$

де $\varrho_{ij}=a(\mu_{ij}+\varkappa^2),\ \mu_{ij}=\nu_{1i}^2+\nu_{2j}^2$.

Шукане температурне поле має вигляд

$$T(x_1,x_2,\tau)=\frac{a}{2\lambda h}\sum_{k=0}^{N-1}W_k\,\Phi_k(x_1,x_2,\tau),$$

де

$$\Phi_k(x_1,x_2,\tau)=\sum_{i,j=1}^{\infty}e^{-\varrho_{ij}(\tau-\tau^k)}X_{ij}(x_1,x_2)\times$$

$$\times\left[f_{ij}^{k+}(\Delta\tau^k)R_{ij}^{k+}+g_{ij}^{k+}(\Delta\tau^k)S_{ij}^{k+}+f_{ij}^{k-}(\Delta\tau^k)R_{ij}^{k-}+g_{ij}^{k-}(\Delta\tau^k)S_{ij}^{k-}\right],$$

$$\omega_{ij}^{k\pm}=\frac{\nu_{1i}v_1^k\pm\nu_{2j}v_2^k}{2}\ ,$$

$$f_{ij}^{k\pm}(\eta)=e^{\varrho_{ij}\eta}\cos(\omega_{ij}^{k\pm}\eta)-1,\ g_{ij}^{k\pm}(\eta)=e^{\varrho_{ij}\eta}\sin(\omega_{ij}^{k\pm}\eta),$$

$$R_{ij}^{k\pm}=\frac{\varrho_{ij}P_{ij}^{k\pm}-\omega_{ij}^{k\pm}Q_{ij}^{k\pm}}{\varrho_{ij}^2+(\omega_{ij}^{k\pm})^2},\quad S_{ij}^{k\pm}=\frac{\omega_{ij}^{k\pm}P_{ij}^{k\pm}+\varrho_{ij}Q_{ij}^{k\pm}}{\varrho_{ij}^2+(\omega_{ij}^{k\pm})^2}\ ,$$

$$P_{ij}^{k\pm}=\frac{A_{ij}^k\mp D_{ij}^k}{2}\ ,\quad Q_{ij}^{k\pm}=\frac{B_{ij}^k\pm C_{ij}^k}{2}\ ,$$

$$A_{ij}^k=G_{1i}^k\,G_{2j}^k\ ,\quad B_{ij}^k=G_{1i}^k\,H_{2j}^k\ ,$$

$$C_{ij}^k=H_{1i}^k\,G_{2j}^k\ ,\quad D_{ij}^k=H_{1i}^k\,H_{2j}^k\ ,$$

$$G_{sr}^k=\nu_{sr}\cos(\nu_{sr}x_s^k)+\beta\sin(\nu_{sr}x_s^k)\ ,$$

$$H_{sr}^k=-\nu_{sr}\sin(\nu_{sr}x_s^k)+\beta\cos(\nu_{sr}x_s^k).$$

Отже, з використанням апарату симетричних та асиметричних узагальнених функцій, можна розв"язувати задачі теплопровідності для тонкої пластинки із джерелом тепла, що рухається довільною ламаною траєкторією і має змінну в часі потужність.

Стаття надійшла до редколегії 5.05.93

УДК 517.956

В.С.Грицевич

ДВОВИМІРНІ АСИМЕТРИЧНІ УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Вивчення двовимірних узагальнених сингулярних функцій є актуальним з огляду на застосування їх для розв"язування конкретних задач математичної фізики [1, 4, 6]. Однак автори розглядають сингулярні узагальнені функції як джерела зосереджених фізичних впливів, тому обмежуються розглядом симетричних узагальнених функцій. Водночас узагальнені функції можна застосовувати також з іншою метою - для моделювання неоднорідних фізичних параметрів композитних тіл. У цьому випадку з теоретико-числового погляду /розрізи Дедекінда/ найбільш коректним є застосування асиметричних узагальнених функцій /АУФ/. Одновимірні АУФ вже досліджені у працях [2, 3, 5].

Розглянемо обмежену плоску відкриту область з кусково-гладкою межею Γ, σ - розбиття V на підобласті з кусково-гладкими межами, що не перетинається, $V=\bigcup\limits_{m=1}^{M} V_m$. Нехай $\{\Gamma_K\}, K=\overline{1,N}$ - множина ребер, які розділяють підобласті так, що ребро Γ_K розміщене між підобластями з номерами z_K^1 та z_K^2 і належить $V_{z_K^2}$, а вектор нормалі $\bar{n}_K$ напрямлений від $V_{z_K^1}$ до $V_{z_K^2}$. Позначимо через $S_m(\bar{x})$ характеристичну функцію m -ї підобласті.

Нехай K -деяка множина функцій, визначених у V . Назвемо K_* Σ -розширенням множини K , якщо довільну функцію $f\in K_*$ можна зобразити у вигляді

$$f(\bar{x})=\sum_{m=1}^{M} f_m(\bar{x})S_m(\bar{x}),$$

де $f_m(\bar{x})\in K, m=\overline{1,M}$. Очевидно, $K\subset K_*$, оскільки $\sum\limits_{m=1}^{M} S_m(\bar{x})=1$ у V . Якщо K утворює кільце відносно додавання і множення,