Отже, з використанням апарату симетричних та асиметричних узагальнених функцій, можна розв"язувати задачі теплопровідності для тонкої пластинки із джерелом тепла, що рухається довільною ламаною траєкторією і має змінну в часі потужність.

Стаття надійшла до редколегії 5.05.93

УДК 517.956

В.С.Грицевич

ДВОВИМІРНІ АСИМЕТРИЧНІ УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Вивчення двовимірних узагальнених сингулярних функцій є актуальним з огляду на застосування їх для розв"язування конкретних задач математичної фізики [1, 4, 6]. Однак автори розглядають сингулярні узагальнені функції як джерела зосереджених фізичних впливів, тому обмежуються розглядом симетричних узагальнених функцій. Водночас узагальнені функції можна застосовувати також з іншою метою - для моделювання неоднорідних фізичних параметрів композитних тіл. У цьому випадку з теоретико-числового погляду /розрізи Дедекінда/ найбільш коректним є застосування асиметричних узагальнених функцій /АУФ/. Одновимірні АУФ вже досліджені у працях [2, 3, 5].

Розглянемо обмежену плоску відкриту область з кусково-гладкою межею Γ, σ - розбиття V на підобласті з кусково-гладкими межами, що не перетинається, $V=\bigcup\limits_{m=1}^{M} V_m$. Нехай $\{\Gamma_K\}, K=\overline{1,N}$ - множина ребер, які розділяють підобласті так, що ребро Γ_K розміщене між підобластями з номерами τ_K^1 та τ_K^2 і належить $V_{\tau_K^2}$, а вектор нормалі $\bar{n}_K$ напрямлений від $V_{\tau_K^1}$ до $V_{\tau_K^2}$. Позначимо через $S_m(\bar{x})$ характеристичну функцію m-ї підобласті.

Нехай K -деяка множина функцій, визначених у V. Назвемо K_* Σ -розширенням множини K, якщо довільну функцію $f\in K_*$ можна зобразити у вигляді

$$f(\bar{x})=\sum_{m=1}^{M} f_m(\bar{x})S_m(\bar{x}),$$

де $f_m(\bar{x})\in K, m=\overline{1,M}$. Очевидно, $K\subset K_*$, оскільки $\sum\limits_{m=1}^{M} S_m(\bar{x})=1$ у V. Якщо K утворює кільце відносно додавання і множення,

то легко бачити, що K_* також утворює кільце з операціями, визначеними таким чином:
для довільних $u(\bar{x}), v(\bar{x}) \in K_*$

$$u(\bar{x}) + v(\bar{x}) = \sum_{m=1}^{M} \left[u_m(\bar{x}) + v_m(\bar{x}) \right] S_m(\bar{x}),$$

$$u(x) v(\bar{x}) = \sum_{m=1}^{M} u_m(\bar{x}) v_m(\bar{x}) S_m(\bar{x}).$$

Якщо $v(\bar{x}) \neq 0$, то можна визначити також операцію ділення за формулою

$$\frac{u(\bar{x})}{v(\bar{x})} = \sum_{m=1}^{M} \frac{u_m(\bar{x})}{v_m(\bar{x})} S_m(\bar{x}).$$

Коректність уведених операцій перевіряється тривіально.

Нехай $\mathcal{D}(V)$ позначає множину нескінченно-диференційовних фінітних функцій, заданих у V. Як множину основних функцій оберемо $\mathcal{D}_*(V)$, тобто Σ-розширення $\mathcal{D}(V)$. На $\mathcal{D}_*(V)$ визначимо класичну похідну у напрямі $\bar{z}$ за формулою

$$\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial \psi_m}{\partial z} S_m(\bar{x}) \quad \text{для} \quad \psi \in \mathcal{D}_*(V).$$

Легко бачити, що $\mathcal{D}_*(V)$ замкнута відносно операції класичного диференціювання. Визначимо збіжність у $\mathcal{D}_*(V)$ таким чином. Послідовність $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ із $\mathcal{D}_*(V)$ збігається до функції $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$, якщо існує така відкрита множина V', що $\bar{V}' \subset V$, $supp\ \psi^{(K)} \subset V$ і при кожному $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ послідовність класичних похідних $\{D^K \psi^{(K)}(\bar{x})\}$ рівномірно прямує до $\{D^\alpha \psi(\bar{x})\}$ при $K \to \infty$, де $D^\alpha = \partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} / \partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}$.
Множина $\mathcal{D}_*(V)$ із введеною на ній збіжністю утворює простір основних функцій $\mathcal{D}_*(V)$.

Розглянемо $\mathcal{D}'_*(V)$ - множину лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}_*(V)$; $f \in \mathcal{D}'_*(V)$ означає, що кожній $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$ відповідає число (f, ψ). Елементи множини $\mathcal{D}'_*(V)$ назвемо асиметричними узагальненими функціями. Слабу збіжність у $\mathcal{D}'_*(V)$ визначимо як збіжність відповідних значень функціоналів. Тим самим $\mathcal{D}'_*(V)$ перетворюється у простір АУФ. Рівність узагальнених функцій $f, g \in \mathcal{D}'_*(V)$ визначимо за умовою $(f, \psi) = (g, \psi)$ для всіх $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$.

Нехай $C^\infty_*(V)$ є Σ - розширенням простору $C^\infty(V)$. Очевидно, $\mathcal{D}_*(V) \subset C^\infty_*(V)$. Довільну $f \in C^\infty_*(V)$ можна розглядати як лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{D}_*(V)$, отже, у цьому розумінні $C^\infty_*(V) \subset \mathcal{D}'_*(V)$.

Визначимо на $C_*^{\infty}(V)$ операцію диференціювання у напрямі $\bar{z}$ за формулою

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \psi\right) = -\left(f, \left\{\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\}\right) - \sum_{K=1}^{N} \int_0^{l_K} f\Big|_{\Gamma_K} [\psi]_K \cos(\bar{n}_K, \bar{z})\, dy_K,$$

для довільних $f \in C_*^{\infty}(V), \psi \in \mathcal{D}_*(V)$

де

$$[p]_K = p\Big|_{\Gamma_K} - p\Big|_{\Gamma_K^-}, \quad p\Big|_{\Gamma_K^-} = \lim_{\substack{\bar{x} \to \Gamma_K \\ \bar{x} \in V_{z_K^1}}} p(\bar{x}) ;$$

l_K – довжина ребра Γ_K.

Нехай $\mu(y_K)$ – неперервна на $[0, l_K]$. Визначимо АУФ $\mu\delta_K^- \in \mathcal{D}_*'(V)$ за співвідношеннями:

$$\frac{\partial^i}{\partial n_K^i}(\mu\delta_K^-), \psi) = (-1)^i \int_0^{l_K} \mu \frac{\partial^i \psi}{\partial n_K^i}\Big|_{\Gamma_K^-} dy_K,$$

де $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Легко бачити, що

$$\frac{\partial^i}{\partial n_K^i}(\mu\delta_K^-) S_m(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{\partial^i}{\partial n_K^i}(\mu\delta_K^-), & z_K^1 = m; \\ 0, & z_K^1 \neq m. \end{cases}$$

Оскільки функції з $C_*^{\infty}(V)$ локально інтегровані у V і $C_*^{\infty}(V)$ замкнута відносно операції множення, визначимо вид функціонала таким чином

$$(u, \psi) = \int_V u\psi\, dV.$$

Теорема 1. Нехай $u(\bar{x}) \in C_*^{\infty}(V)$. Тоді

$$\operatorname{grad} u = \sum_{m=1}^{M} \operatorname{grad}(u_m) S_m(\bar{x}) + \sum_{K=1}^{N} [u]_K \bar{n}_K \delta_K^-. \qquad /1/$$

Доведення. Для довільної $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$ розглянемо перетворення

$$(\operatorname{grad} u, \psi) = -(u, \{\operatorname{grad}\psi\}) - \sum_{K=1}^{N} \int_0^{l_K} u\Big|_{\Gamma_K} [\psi]_K \bar{n}_K\, dy_K = -\sum_{m=1}^{M} \int_{V_m} u_m \operatorname{grad}\psi_m\, dV_m -$$

$$-\sum_{K=1}^{N} u\Big|_{\Gamma_K} [\psi]_K \bar{n}_K\, dy_K = \sum_{K=1}^{N} \int_0^{l_K} [u\psi]_K \bar{n}_K\, dy_K +$$

$$+ \int_V \{\operatorname{grad} u\} \psi\, dV - \sum_{K=1}^{N} u\Big|_{\Gamma_K} [\psi]_K \bar{n}_K\, dy_K =$$

$$= (\{\operatorname{grad} u\}, \psi) + \sum_{K=1}^{N} ([u]_K \bar{n}_K \delta_K^-, \psi),$$

звідки з огляду на довільність ψ випливає твердження теореми.

Якщо $\bar{W}(\bar{x})$ – векторна функція, компоненти якої належать $C_*^\infty(V)$, то можна аналогічно показати, що

$$div\ \bar{w} = \sum_{m=1}^{M} div(\bar{W}_m) S_m(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{N} [\bar{W}]_k^T \bar{n}_k \delta_k^- . \qquad /2/$$

Два потрібних наслідки отримаємо, помноживши обидві частини формул /1/ і /2/ на $S_m(\bar{x})$ і виконавши перетворення

$$S_m\, grad\, u_m = S_m\, grad\, u + \sum_{k, \tau_k^1 = m} [u]_k \bar{n}_k \delta_k^- , \qquad /3/$$

$$S_m\, div\ \bar{W}_m = S_m\, div\ \bar{w} + \sum_{k, \tau_k^1 = m} [\bar{W}]_k^T \bar{n}_k \delta_k^- . \qquad /4/$$

Якщо у формулах /1/, /2/ замість $u, \bar{w}$ прийняти відповідно $S_m u, S_m \bar{W}$, то отримаємо такі співвідношення:

$$grad(S_m u) = S_m\, grad\, u_m - \sum_{k, \tau_k^1 = m} u\Big|_{\Gamma_k^-} \bar{n}_k \delta_k^- + \sum_{k, \tau_k^2 = m} u\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- , \qquad /5/$$

$$div(S_m \bar{W}) = S_m\, div\, \bar{W}_m - \sum_{k, \tau_k^1 = m} \bar{W}^T\Big|_{\Gamma_k^-} \bar{n}_k \delta_k^- + \sum_{k, \tau_k^2 = m} \bar{W}^T\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- , \qquad /6/$$

які з урахуванням /3/, /4/ перетворюються до вигляду

$$grad(S_m u) = S_m\, grad\, u - \sum_{k, \tau_k^1 = m} u\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- + \sum_{k, \tau_k^2 = m} u\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- , \qquad /7/$$

$$div(S_m \bar{W}) = S_m\, div\, \bar{w} - \sum_{k, \tau_k^1 = m} \bar{W}^T\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- + \sum_{k, \tau_k^2 = m} \bar{W}^T\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- . \qquad /8/$$

Теорема 2. Якщо $u(\bar{x}) \in C_*^\infty(V)$, то

$$\Delta u = \sum_{m=1}^{M} S_m \Delta u_m + \sum_{k=1}^{N} \Big[\frac{\partial u}{\partial n_k}\Big]_k \delta_k^- + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial n_k}([u]_k \delta_k^-) . \qquad /9/$$

Доведення. Доведемо спочатку, що $div(\bar{n}_k \mu \delta_k^-) = \frac{\partial}{\partial n_k}(\mu \delta_k^-)$. Дійсно, для довільної $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$ маємо

$$(div(\bar{n}_k \mu \delta_k^-), \psi) = -\int_0^{l_k} \bar{n}_k^T \mu\, grad\, \psi\, dy_k =$$

$$= -\int_0^{l_k} \mu \frac{\partial \psi}{\partial n_k}\, dy_k = \Big(\frac{\partial}{\partial n_k}(\mu \delta_k^-), \psi\Big) .$$

Тоді використавши /1/, /2/ отримуємо

$$\Delta u = div\left(\sum_{m=1}^{M} S_m \, grad\, u_m\right) + \sum_{k=1}^{N} div\left([u]_k \bar{n}_k \delta_k^-\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{M} S_m \Delta u_m + \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{\partial u}{\partial n_k}\right]_k \delta_k^- + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial n_k}\left([u]_k \delta_k^-\right).$$

Таким чином теорема доведена.

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976. 2. Коляно Ю.М., Процюк Б.В. Термоупругость неоднородных и кусочнооднородных пластин, обладающих цилиндрической анизотропией // Обобщен. функции в термоупругости. К., 1980. С. 3-19. 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1973. 4. Ляшко И.И., Емельянов Б.Ф., Боярчук А.Ф. Основы классического и современного математического анализа. К., 1988. 5. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984. 6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: 5-е изд. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 5.05.93