ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПИТАННЯ АЛГЕБРИ І МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
40
1994

Міністерство освіти України

ВІСНИК
Львівського університету

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

Випуск 40

ПИТАННЯ АЛГЕБРИ
І МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Львів
Видавництво "Світ"
1994

УДК 513

Вісник містить статті з теорії функцій, алгебри, топології, теорії пружності, крайових задач для диференціальних рівнянь.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

Бібліогр. у кінці статей.

Відповідальний за випуск доц. Є.М.Парасюк

Адреса редколегії:
290000 Львів, вул. Університетська, 1.

Університет, кафедра диференціальних рівнянь.
Тел.: 79-45-93

В $\frac{1602110000-049}{225-94}$ Замовне

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Сингулярно збурені задачі досліджені у багатьох працях. Найбільше вивчений випадок звичайного примежового шару, найменше - ситуація, коли примежовий шар описується рівняннями у частинних похідних.

Розглянемо подібний випадок для псевдопараболічного рівняння. А саме, в області $\mathcal{D}=\{(x,t): 0\le x\le l, 0<t\le T\}$ маємо задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,t)u=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ u(x,0)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ - малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t)$, $f(x,t)$ - достатньо гладкі у $\mathcal{D}$ функції;

2/ $a(x,t)>0$ у $\mathcal{D}$.

За цих припущень існує єдиний класичний розв"язок задачі /1/-/2/ [4].

Побудуємо асимптотику до деякого порядку N розв"язку задачі /1/, /2/ за степенями малого параметра ε, при цьому використаємо метод примежового шару [1]. Асимптотичне розвинення шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\tau=t/\varepsilon$.

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у співвідношення /3/. Їх визначаємо стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ є розв"язками граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь /t входить як параметр/:

$$-\frac{\partial^2\bar{u}_i}{\partial x^2}+a(x,t)\bar{u}_i=f_i(x,t); \qquad /4/$$

$$\bar{u}_i(0,t)=0,\ \bar{u}_i(l,t)=0, \qquad /5/$$

де $f_0(x,t)\equiv 0,\ f_i(x,t)=-\left(\frac{\partial u_{i-1}}{\partial t}-\frac{\partial^3\bar{u}_{i-1}}{\partial x^2\partial t}\right)\ (i=1,\dots,N).$ Як бачимо, вони визначаються рекурентно. Існування та єдиність розв"язку задач /4/, /5/ за наших припущень випливає з праці [3].

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)\ (i=0,\dots,N)$ в околі $t=0$ є розв"язками змішаних задач:

$$\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}-\frac{\partial^3\Pi_i}{\partial x^2\partial\tau}-\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial x^2}+a(x,0)\Pi_i=g_i(x,\tau); \qquad /6/$$

$$\Pi_i(0,\tau)=0,\ \Pi_i(l,\tau)=0; \qquad /7/$$

$$\Pi_i(x,0)=-\bar{u}_i(x,0), \qquad /8/$$

де $g_0(x,\tau)\equiv 0$, $g_i(x,\tau)\ (i=1,\dots,N)$ легко виписуються явним чином і лінійно залежать від $\Pi_j(x,\tau)\ (j<i)$.

Функції $\Pi_i(x,\tau)(i=0,\dots,N)$ визначаємо рекурентно як розв"язки змішаних задач /6/-/8/ для псевдопараболічних рівнянь. Доведемо, що вони дійсно є функціями примежового шару, тобто експоненціально спадають при $\tau\to\infty$. Покажемо наявність відповідної оцінки тільки для функції $\Pi_0(x,\tau)$, оцінки для $\Pi_i(x,\tau)\ (i=1,\dots,N)$ одержуємо аналогічно.

Виходимо з тотожності

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\Pi_0^2-2\Pi_0\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2\right]+2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\Pi_0}{\partial\tau}\,\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}-\Pi_0\cdot\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right]+2\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2+2a(x,0)\,\Pi_0^2=0. \qquad /9/$$

Інтегрування /9/ по x від 0 до l з урахуванням граничних умов /7/ дає

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^l\left[\Pi_0^2-2\Pi_0\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2\right]dx+2\int_0^l\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2dx+2\int_0^l a(x,0)\Pi_0^2\,dx=0. \qquad /10/$$

Звідси одержуємо диференціальну нерівність

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^l\left[\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2+\Pi_0^2\right]dx+2\alpha\int\limits_0^l\left[\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2+\Pi_0^2\right]dx\leq 0, \qquad /11/$$

де $\alpha=\min\left[1,\min\limits_{x\in[0,l]}a(x,0)\right]$.

Розв"язуючи диференціальну нерівність /11/, одержуємо

$$\int\limits_0^l\left[\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2+\Pi_0^2\right]dx\leq ce^{-2\alpha\tau}, \qquad /12/$$

де $c>0$ – константа, звідки, очевидно, випливає

$$\int\limits_0^l\Pi_0^2\,dx\leq ce^{-2\alpha\tau},\quad \int\limits_0^l\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right)^2dx\leq ce^{-2\alpha\tau}. \qquad /13/$$

З цього і випливає потрібна оцінка

$$|\Pi_0(x,\tau)|\leq c_1e^{-\alpha\tau}, \qquad /14/$$

де C_1 – константа.

Застосування методу інтегралів енергії [2] дає

$$\|R_N\|_{L_2(\mathcal{D})}\leq K\varepsilon^{N+1}, \qquad /15/$$

де константа K не залежить від ε.

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Припустимо, що в області $\mathcal{D}$ виконуються умови /1/, /2/. Тоді розв"язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичне зображення /3/, де $\bar{u}_i(x,t)\ (i=0,\dots,N)$ – розв"язок двоточкових задач /4/, /5/; функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)\ (i=0,\dots,N)$ – розв"язки задач /6/–/8/; залишковий член допускає оцінку /15/.

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3–122. 2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 4. Bohm M., Showalter R.E. A nonliner pseudoparabolic diffusion equation // SIAM J. Math. Anal. 1985. Vol.16. P. 980-999.

Стаття надійшла до редколегії 18.01.93

УДК 517.946

В.В.Волошин, В.М.Цимбал

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

У прямокутнику $\mathcal{D}:\{0<x<l,\ 0<t\le T\}$, $(0<l<\infty,\ 0<T<\infty)$ розглянемо задачу для системи інтегродиференціальних рівнянь з малим дійсним параметром $\varepsilon>0$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\varepsilon\Lambda(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+A(x,t)u(x,t)+\int_0^t B(x,\tau)u(x,\tau)d\tau=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u_i|_{x=0}=0,\ i=\overline{1,k},\quad u_i|_{x=l}=0,\ i=\overline{k+1,n}, \qquad /2/$$

$$u|_{t=0}=0, \qquad /3/$$

де $\Lambda(t)=diag\{\lambda_1(t),\lambda_2(t),\dots,\lambda_n(t)\}$, $A(x,t)$ – $n\times n$ матриця, $f(x,t)=colcn\{f_1(x,t),f_2(x,t),\dots,f_n(x,t)\}$, $B(x,t)$ – $n\times n$ матриця задані в $\bar{\mathcal{D}}$. Нехай у кожній точці $t\in[0,T]$ перші $k\ (0\le k\le n)$ з величин $\lambda_i(t)$ додатні, решта $n-k$ від"ємні.

Нехай $N\ge1$ – задане ціле число і виконані такі умови:

1/ функції $a_{ij}(x,t), f_i(x,t), b_{ij}(x,t), \lambda_i(t)$ достатньо гладкі;

2/ умови узгодженості $f_i(0,0)=0,\ i=\overline{1,k}$, $f_i(l,0)=0,\ i=\overline{k+1,n}$.

Користуючись методом Вішика-Люстерніка [2], побудуємо асимптотичний розклад розв"язку задачі /1/-/3/ за малим параметром ε.

Зауважимо, що при довільному $\varepsilon>0$ задача однозначно розв"язальна [1].

Розв"язок шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i u^i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi^i(\xi,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q^i(\eta,t)+\varepsilon^{N+1}R_N, \quad /4/$$

де $\xi=\dfrac{x}{\varepsilon}$, $\eta=\dfrac{l-x}{\varepsilon}$, функції $u^i(x,t), \Pi^i(\xi,t), Q^i(\eta,t), R_N$ визначаються з процедури, що наведена нижче.

Функції $u^i(x,t)\ (i=\overline{0,N})$ визначаємо з рівнянь, які знаходимо, якщо в систему /1/ підставляємо перший з рядів /4/ і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Отримуємо задачі

$$\frac{\partial u^i(x,t)}{\partial t}+A(x,t)\,u^i(x,t)+\int_0^t B(x,\tau)\,u^i(x,\tau)\,d\tau=F^i(x,t), \qquad /5/$$

$$u^i\big|_{t=0}=0, \qquad /6/$$

де $F^0(x,t)=f(x,t)$, $F^i(x,t)=-\Lambda(t)\dfrac{\partial u^{i-1}(x,t)}{\partial x}$ $(i=\overline{1,N})$.

Як відомо, задача /5/-/6/ для кожного i має єдиний розв"язок, який можна побудувати методом послідовних наближень.

Розв"язок потрібно підправити в околі $x=0$. Для цього служать функції $\Pi^i(\xi,t)$. Виконуємо заміну $\xi=x/\varepsilon$, розкладаємо $A(x,t)$ та $B(x,t)$ у скінченну стрічку Тейлора, підставляємо в однорідну систему /1/. Отримуємо задачі для визначення $\Pi^i(\xi,t)$:

$$\frac{\partial \Pi^i(\xi,t)}{\partial t}+\Lambda(t)\frac{\partial \Pi^i(\xi,t)}{\partial \xi}+A(0,t)\Pi^i(\xi,t)+\int_0^t B(0,\tau)\Pi^i(\xi,\tau)\,d\tau=\psi^i(\xi,t), \qquad /7/$$

$$\Pi^i_s\big|_{\xi=0}=-u^i_s\big|_{x=0}, \quad s=\overline{1,K}, \qquad /8/$$

$$\Pi^i\big|_{t=0}=0, \qquad /9/$$

де $\psi^0(\xi,t)=0$, $\psi^i(\xi,t)$ лінійно виражаються через $\Pi^j(\xi,t)$, $\dfrac{\partial \Pi^j(\xi,t)}{\partial\xi}$ та інтеграли від цих функцій $(j=\overline{0,i-1})$.

Якщо $\lambda=\min\limits_j\{\lambda_j(t)\}$, $j=\overline{1,K}$, то з огляду на скінченність області залежності для гіперболічних рівнянь $\Pi^i(\xi,t)$ $(i=\overline{0,N})$ не дорівнює нулю лише у граничній смузі F між $0t$ і крайньою правою характеристикою системи /7/, що виходить з точки $(0,0)$.

Аналогічно потрібно підправити розв"язок в околі $x=l$. Виконуємо заміну $\eta=\dfrac{l-x}{\varepsilon}$, розкладаємо $A(x,t),B(x,t)$ в скінченну стрічку Тейлора в околі $x=l$ і підставляємо в однорідну систему /1/.

Зрівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, отримаємо задачі для визначення $Q^i(\eta,t)$:

$$\frac{\partial Q^i(\eta,t)}{\partial t}+\Lambda(t)\frac{\partial Q^i(\eta,t)}{\partial \eta}+A(l,t)Q^i(\eta,t)+\int_0^t B(l,\tau)Q^i(\eta,\tau)\,d\tau=\psi^{*i}(\eta,t), \qquad /10/$$

$$Q^i_s\big|_{\eta=0}=-u^i_s\big|_{x=l}, \quad s=\overline{K+1,n}, \qquad /11/$$

$$Q^i\big|_{t=0}=0, \qquad /12/$$

де $\psi^{*0}(\eta,t)=0$, $\psi^{*i}(\eta,t)$ лінійно виражаються через $Q^j(\eta,t)$, $\dfrac{\partial Q^j}{\partial\eta}$ та інтеграли від цих функцій $(j=\overline{0,i-1})$.

З аналогічних міркувань, функції $Q^{i}(\eta, t)$ також не дорівнюють нулю лише у граничній смузі.

Для доведення асимптотичної коректності розкладу потрібно отримати оцінку залишкового члена R_N, що є розв"язком задачі

$$\frac{\partial R_N}{\partial t} + \varepsilon \Lambda(t) \frac{\partial R_N}{\partial x} + A(x,t) R_N + \int_0^t B(x,\tau) R_N(x,\tau) d\tau = F(x,t,\varepsilon), \qquad /13/$$

$$R_{N_i}\big|_{x=0} = 0, \ i = \overline{1,K}, \ R_{N_i}\big|_{x=l} = 0, \ i = \overline{K+1,n}, \qquad /14/$$

$$R_N\big|_{t=0} = 0, \qquad /15/$$

де $F(x,t,\varepsilon)$ отримується після підстановки /4/ в /1/, причому до кожного доданка /4/ застосовуємо оператор з урахуванням відповідного регуляризуючого перетворення.

Відповідну оцінку можна отримати, використовуючи метод інтегралів енергії [3]:

$$\iint_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} R_{N_i}^2 dx dt \leqslant C \iint_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} F_i^2 dx dt, \qquad /16/$$

де константа C не залежить від ε.

Таким чином, доведена така теорема.

Теорема. Нехай виконуються умови 1/, 2/. Тоді розв"язок задачі /1/-/3/ зображається у вигляді /4/, функції $\Pi^{i}(\xi,t)$ і $Q^{i}(\eta,t)$ типу примежового шару, що ліквідують нев"язку в околах $x=0$, $x=l$ відповідно, R_N задовольняє /16/.

Зауваження 1. Аналогічна асимптотика справедлива у випадку залежності Λ не тільки від t, а й від x, але у цьому випадку слід вимагати додаткових умов узгодження у точках $(0,0)$ і $(l,0)$.

Зауваження 2. Аналогічний випадок сингулярного збурення для гіперболічної системи першого порядку розглянутий у праці [4].

1. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Ученые зап. Латв. гос.ун-та. Т.20. № 3. С.87-104.1958. 2. В и ш и к М.И. Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. Т.12. № 5. С.3-122, 1957. 3. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 4. Ц ы м б а л В.Н. Смешанная задача для гиперболической системы первого порядка с малым параметром // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1976. Т.4. С.7-11.

Стаття надійшла до редколегії 10.04.93

УДК 517.956

Г.І.Берегова, В.М.Кирилич

ГІПЕРБОЛІЧНА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА В КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ

В області $G := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a(t) < x < b(t),\ a(0) = b(0) = 0,\ a(t), b(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)\}$ розглянемо гіперболічну систему рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x,t;u) f_i(t), \quad i = \overline{1,n}; \qquad /1/$$

причому $\lambda_i(a(t),t) - a'(t) > 0, \quad i = \overline{1,p+q},$

$$\lambda_i(b(t),t) - b'(t) < 0, \quad i = \overline{p+1,n}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \qquad /2/$$
$$0 \le p \le n, \quad 0 \le q \le n.$$

Тут крім функцій $u_i(x,t)$ невідомими вважаються також $f_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$. Для системи /1/ задаються граничні та додаткові умови:

$$u_i(a(t),t) = h_i^a(t), \quad i = \overline{1,p+q}, \qquad /3/$$
$$u_i(b(t),t) = h_i^b(t), \quad i = \overline{p+1,n}, \quad t \in \mathbb{R}_+;$$
$$u_i(0,t) = \omega_i(t), \quad i = \overline{1,n}; \quad t \in \mathbb{R}_+. \qquad /4/$$

Припускаємо, що $\lambda_i(x,t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ $(i = \overline{1,n})$, а $F_i, F'_{ix}, F'_{iu} \in C(G_t \times \mathbb{R}^n)$, $F_i(0,0;\omega(0)) \ne 0$ $(i = \overline{1,n})$. Звідси, зокрема, випливає, що $F_i(x,t;u) \ne 0$ для всіх $(x,t) \in G_\varepsilon$. Крім цього, вважаємо, що h_i^a $(i = \overline{1,p+q})$, h_i^b $(i = \overline{p+1,n})$, ω_i $(i = \overline{1,n}) \in C^1(G_t)$ і виконуються умови узгодження $h_i^a(0) = h_i^b(0) = \omega_i(0)$, $i = \overline{p+1,p+q}$.

Усі величини вважаються дійснозначними.

Для гіперболічних систем і рівнянь вивчено багато обернених задач. Докладний аналіз та огляд літератури містить, зокрема, праця [3]. Література з обернених гіперболічних задач у криволінійному секторі нам невідома.

Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо виконуються згадані вище припущення, то задача /1/-/4/ має в G_ε єдиний класичний $(u \in C^1(G_\varepsilon), f \in C(\mathbb{R}_+))$ розв'язок.

Доводимо теорему за такою схемою [1, 2].

Через $\varphi_i(\tau;x,t)$ позначаємо розв"язок диференціального рівняння $d\xi/d\tau = \lambda_i(\xi,\tau)$ з умовою $\varphi_i(t;x,t)=x\ (i=\overline{1,n})$. Припускаючи, що в системі /1/ функції $f_i(t)$ неперервно диференційовні та інтегруючи вздовж характеристик, приходимо до системи інтегрофункціональних рівнянь

$$u_i(x,t)=h_i(t_i(x,t))+\int_{t_i(x,t)}^{t} F_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u)\,f_i(\tau)\,d\tau, \quad i=\overline{1,n},\ (x,t)\in G_t, \qquad /5/$$

де $t_i(x,t):=\min\{\tau;(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\in G_t\}$;

$$h_i(t_i(x,t))=\begin{cases} h_i^a(t_i(x,t)), & i=\overline{1,p+q}, \\ h_i^b(t_i(x,t)), & i=\overline{p+1,n}. \end{cases} \qquad /6/$$

Враховуючи умови /4/, маємо

$$\omega_i(t)=h_i(t_i(0,t))+\int_{t_i(0,t)}^{t} F_i(\varphi_i(\tau;0,t),\tau;u)\,f_i(\tau)\,d\tau,\ i=\overline{1,n},\ t\in R_+. \qquad /7/$$

Вводимо функції $W_i(x,t)=\dfrac{\partial u_i}{\partial x}\ (i=\overline{1,n})$.

Тоді

$$u_i(x,t)=h_i^a(t)+\int_{a(t)}^{x} W_i(\xi,t)\,d\xi,\quad i=\overline{1,p+q}, \qquad /8/$$

$$u_i(x,t)=h_i^b(t)+\int_{b(t)}^{x} W_i(\xi,t)\,d\xi,\quad i=\overline{p+1,n}.$$

Диференціюємо тепер /5/ по x, /7/ по t. У результаті з урахуванням /8/ маємо

$$\begin{aligned} W_i(x,t)=\{&h_i^{a\prime}(t_i(x,t))-F_i(a(t_i(x,t)),t_i(x,t);h_1^a(t_i(x,t)),\ldots,\\ &h_{p+q}^a(t_i(x,t)),u_{p+q+1}(a(t_i(x,t)),t_i(x,t)),\ldots,u_n(a(t_i(x,t)),\\ &t_i(x,t)))\cdot f_i(t_i(x,t))\}\cdot t'_{ix}(x,t)+\\ &+\int_{t_i(x,t)}^{t}\{F'_{ix}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))+\\ &+F'_{iu}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))\cdot W_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\}\times\\ &\times\varphi'_{ix}(\tau;x,t)\,f_i(\tau)\,d\tau,\qquad i=\overline{1,p+q}, \end{aligned} \qquad /9/$$

$$W_i(x,t)=\{h_i^{b\prime}(t_i(x,t))-F_i(b(t_i(x,t)),t_i(x,t);$$

$$u_1(b(t_i(x,t),t_i(x,t)),\dots,u_p(b(t_i(x,t),t_i(x,t)),$$

$$h^b_{p+1}(t_i(x,t)),\dots,h^b_n(t_i(x,t)))\}\cdot t'_{i_x}(x,t)+$$

$$+\int_{t_i(x,t)}^{t}\{F'_{ix}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))+$$

$$+F'_{iu}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau);u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\times$$

$$\times W_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\}\cdot\varphi'_{ix}(\tau;x,t)f_i(\tau)d\tau,$$

$$i=\overline{p+1,n};$$

$$f_i(t)=\frac{1}{F_i(0,t;\omega(t))}\{F_i(a(t_i(0,t),t_i(0,t);u(a(t_i(0,t),t_i(0,t)))\times$$

$$\times t'_{i_t}(0,t)f_i(t_i(0,t))-\int_{t_i(0,t)}^{t}(F'_{ix}+F'_{iu}W_i(\varphi_i(\tau;0,t),\tau))\times$$

$$\times\varphi'_{i_t}(\tau;0,t)f_i(\tau)d\tau+\omega'_i(t)-h^a_i(t_i(0,t))\,t'_{i_t}(0,t)\}\qquad /10/$$

$$i=\overline{1,p+q};$$

$$f_i(t)=\frac{1}{F_i(0,t;\omega(t))}\{F_i(b(t_i(0,t),t_i(0,t);u(b(t_i(0,t),t_i(0,t)))\times$$

$$\times t'_{i_t}(0,t)f_i(t_i(0,t))-\int_{t_i(0,t)}^{t}(F'_{ix}+F'_{iu}W_i(\varphi_i(\tau;0,t),\tau))\times$$

$$\times\varphi'_{i_t}(\tau;0,t)f_i(\tau)d\tau+\omega'_i(t)-h^b_i(t_i(0,t))\cdot t'_{i_t}(0,t)\},\ i=\overline{p+1,n}.$$

Таким чином, для визначення функцій u_i, u'_{ix}, f_i ($i=\overline{1,n}$) одержуємо систему інтегрофункціональних рівнянь типу Вольтерра /5/, /9/–/10/, яка в G_ε розв"язується методом ітерацій [2].

I. К и р и л и ч В.М. Задача про визначення правої частини одновимірної гіперболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.36. С.92-97. 2. О р л о в с к и й Д.Г. К задаче определения правой части гиперболической системы // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19. № 8. С.137-146. 3. Р о м а н о в В.Г. Обратные задачи математической физики. М., 1984. 263 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.04.93

УДК 517.946

М.І.Іванчов

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

У даній праці для оберненої задачі визначення коефіцієнта температуропровідності з'ясована можливість задання як умови перевизначення нелокальної умови зі змінними коефіцієнтами.

В області $\mathcal{D}=\{(x,t): 0<x<h,\ 0<t<T\}$ розглянемо задачу знаходження пари функцій $\{a(t),\ u(x,t)\}$ з умов

$$u_t = a(t)u_{xx} \qquad (x,t)\in\mathcal{D}, \qquad /1/$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le h, \qquad /2/$$

$$u(0,t)=\mu_1(t), \qquad 0\le t\le T, \qquad /3/$$

$$u(h,t)=\mu_2(t), \qquad 0\le t\le T, \qquad /4/$$

$$\nu_1(t)u_x(0,t)-\nu_2(t)u_x(h,t)=\varkappa(t), \quad 0\le t\le T, \qquad /5/$$

де $a(t)$ – додатна і неперервна на $[0,T]$ функція, а $u(x,t)\in C^{2,1}(\mathcal{D})\cap C^{1,0}(\overline{\mathcal{D}})$ [1].

Припускаючи, що значення

$$u_x(h,t)=p(t) \qquad /6/$$

відоме, з умови /5/ визначаємо

$$u_x(0,t)=(\nu_2(t)p(t)+\varkappa(t))\nu_1^{-1}(t). \qquad /7/$$

Використовуючи функцію Гріна, знаходимо розв'язок задачі /1/, /2/, /6/, /7/, підставляємо його в умови /3/, /4/, звідки отримуємо систему рівнянь відносно $a(t)$ і $p(t)$:

$$\mu_1(t)+\mu_2(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^h\varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{a(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$
$$\times\frac{p(\tau)(\nu_1(\tau)-\nu_2(\tau))-\varkappa(\tau)}{\nu_1(\tau)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau, \qquad /8/$$

$$\mu_1(t)-\mu_2(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^h\varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{a(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$
$$\times\frac{p(\tau)(\nu_1(\tau)+\nu_2(\tau))+\varkappa(\tau)}{\nu_1(\tau)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau. \qquad /9/$$

Визначаючи з рівняння /9/ $p(t)$ і підставляючи її в /8/, шляхом диференціювання отримуємо рівняння відносно $a(t)$:

$$a(t)=\Big((1+\beta(t))\mu_1'(t)+(1-\beta(t))\mu_2'(t)\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^{h/2}(\varphi''(\xi)+\varphi''(h-\xi))\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\alpha(t)}\Big)d\xi-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\Big(\frac{\varkappa(\tau)}{\nu_1(\tau)+\nu_2(\tau)}\Big)'\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\Big)d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{\beta'(\tau)d\tau}{\sqrt{\alpha(\tau)(\alpha(t)-\alpha(\tau))}}\int_0^{h/2}(\varphi'(\xi)+\varphi'(h-\xi))\times$$

$$\times\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}-\frac{(\xi+mh)^2}{4\alpha(\tau)}\Big)d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\frac{\beta(\tau)a(\tau)d\tau}{\sqrt{\alpha^3(\tau)(\alpha(t)-\alpha(\tau))}}\int_0^{h/2}(\varphi''(\xi)-$$

$$-\varphi''(h-\xi))\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(\xi+mh)\exp\Big(-\frac{(\xi+mh)^2}{4\alpha(\tau)}-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\Big)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{\mu_2'(\sigma)-\mu_1'(\sigma)}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}d\sigma\int_\sigma^t\beta'(\tau)\sqrt{\frac{\alpha(\tau)-\alpha(\sigma)}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}-$$

$$-\frac{m^2h^2}{4(\alpha(\tau)-\alpha(\sigma))}\Big)d\tau+\frac{h^2}{4\pi}\int_0^t\frac{\mu_2'(\sigma)-\mu_1'(\sigma)}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}d\sigma\int_\sigma^t\frac{\beta(\tau)a(\tau)}{\sqrt{(\alpha(t)-\alpha(\tau))(\alpha(\tau)-\alpha(\sigma))}}\times$$

$$\times\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{n^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}+\frac{m^2}{\alpha(\tau)-\alpha(\sigma)}\Big)\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}-\frac{m^2h^2}{4(\alpha(\tau)-\alpha(\sigma))}\Big)d\tau\Big)^{-1},\qquad /10/$$

де $$\beta(t)=\frac{\nu_1(t)-\nu_2(t)}{\nu_1(t)+\nu_2(t)}\;. \qquad /11/$$

Застосовуючи до рівняння /10/ принцип Шаудера, приходимо до існування розв"язку $a(t)$ рівняння /10/. Підставляючи його в рівняння /1/ і розв"язуючи задачу /1/-/4/, знаходимо $u(x,t)$. Отже, справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1/ $\varphi(x)\in C^2[0,h]$, $\mu_i(t)\in C^1[0,T]$, $\nu_i(t)\in C^1[0,T]$, $(i=1,2)$; $\varkappa(t)\in C^1[0,T]$;

2/ $(1+\beta(t))\mu_1'(t)+(1-\beta(t))\mu_2'(t)>0$, $\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\geq 0$,

$\beta(t)\geq 0$, $\beta'(t)\geq 0$, $\left(\dfrac{\varkappa(t)}{\nu_1(t)+\nu_2(t)}\right)'\leq 0$ на $[0,T]$;

$\varphi'(x)\geq 0$ на $[0,h]$; $\varphi''(x)+\varphi''(h-x)\geq 0$, $\varphi''(x)-\varphi''(h-x)\leq 0$

на $[0,h/2]$; $(1+\beta(t))\varphi''(x)+(1-\beta(t))\varphi''(h-x)\geq 0$ на $[0,h/2]\times[0,T]$;

3/ $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(h)=\mu_2(0)$, $\nu_1(0)\varphi'(0)-\nu_2(0)\varphi'(h)=\varkappa(0)$.

Тоді при досить малому $T>0$ існує хоча б один розв"язок задачі /I/-/5/.

Справедлива також теорема єдиності розв"язку задачі /I/-/5/.

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

$\varphi(x)\in C^2[0,h]$, $\mu_i(t),\nu_i(t)\in C^1[0,T]$, $(i=1,2)$, $\nu_1^2(t)+\nu_2^2(t)>0$ на $[0,T]$, $\nu_1(t)\mu_1'(t)+\nu_2(t)\mu_2'(t)\neq 0$ на $[0,T]$. Тоді задача /I/-/5/ не може мати більше як один розв"язок.

Доведення. Для різниці двох розв"язків $u_i(x,t),(i=1,2)$ задачі /I/-/5/ отримуємо:

$$v_t=a_1(t)v_{xx}+q(t)\omega(x,t),\quad (x,t)\in\mathcal{D}; \qquad /12/$$

$$v(x,0)=0,\quad 0\leq x\leq h; \qquad /13/$$

$$v(0,t)=0,\quad v(h,t)=0,\quad 0\leq t\leq T; \qquad /14/$$

$$\nu_1(t)v_x(0,t)-\nu_2(t)v_x(h,t)=0,\quad 0\leq t\leq T, \qquad /15/$$

де $q(t)=a_1(t)-a_2(t)$, $\omega(x,t)=u_{2xx}(x,t)$.

Розв"язуючи задачу /12/-/14/ і підставляючи її розв"язок в /15/, після деяких стандартних перетворень приходимо до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду відносно функції $q(t)$:

$$q(t)+\int_0^t K(t,\tau)q(\tau)d\tau=0 \qquad /16/$$

з неперервним ядром $K(t,\tau)$:

$$K(t,\tau)=\frac{a_1(t)}{\omega(0,t)+\nu(t)\omega(h,t)}\int_\tau^t\frac{d\sigma}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}\int_0^h\omega(\xi,\tau)\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\left(\frac{\xi+2nh}{(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{3/2}}-\right.\right.$$

$$-\frac{3a(\sigma)(\xi+2nh)}{2(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{5/2}}+\frac{a(\sigma)(\xi+2nh)^3}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{7/2}}\Bigg)\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)+\Bigg(\frac{-\nu'(\sigma)(\xi+(2n-1)h)}{(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{3/2}}+$$

$$+\frac{3a(\sigma)\nu(\sigma)(\xi+(2n-1)h)}{2(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{5/2}}-\frac{a(\sigma)\nu(\sigma)(\xi+(2n-1)h)^3}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^{7/2}}\Bigg)\exp\left(\frac{(\xi+(2n-1)h)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)\Bigg)d\xi,$$

де $\nu(t)=\dfrac{\nu_2(t)}{\nu_1(t)}$, $\alpha(t)=\int\limits_0^t a(\tau)d\tau$.

З /І6/ маємо, що $q(t)\equiv 0$ на $[0,T]$, а звідси і $v(x,t)\equiv 0$ в $\mathfrak{D}$. Теорема доведена.

Зауважимо, що в теоремі 2 з'ясована також єдиність розв'язку оберненої задачі знаходження невідомих функцій $\{q(t), v(x,t)\}$ з рівняння /І2/ та умов /2/-/5/.

І. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., І967. 2. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., І959.

Стаття надійшла до редколегії І7.02.93

УДК 5І7.957:5І9.642.8

М.М.Бокало, В.М.Флюд

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ В ПІДШИПНИКУ КОЧЕННЯ

Метою нашої публікації є описання математичної моделі нестаціонарного теплового поля, яке виникає в роликовому підшипнику внаслідок тертя між роликами й біговою доріжкою. Вважаємо, що внутрішня обойма підшипника нерухома, а зовнішня – рухається з постійною кутовою швидкістю ω та у фіксованому відносно внутрішньої обойми радіальному напрямі на зовнішню обойму діє постійна сила F. Крім цього, припускаємо, що підшипник охолоджується потоком повітря /рідини/. Обмежимось розглядом розподілу температури по перетині внутрішньої обойми площиною, яка пролягає через серединне коло бігової доріжки. У полярній системі координат даний процес моделюється таким чином: знайти функцію $u(r,\varphi,t)$, яка є розв'язком рівняння

$$\frac{1}{a^2}\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\left[r\ \frac{\partial u}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \qquad /1/$$

в області $Q=\Omega\times(0,+\infty)$, де $\Omega=\{(r,\varphi)\mid R_1<r<R_2\}$ – кільце, та задовільняє початкову умову

$$u(r,\varphi,0)=u_0(r,\varphi), \qquad /2/$$

і граничні умови

$$\lambda(u)\ \frac{\partial u}{\partial r}=\sigma(u-\bar{u}) \quad \text{при} \quad r=R_1, \qquad /3/$$

$$\lambda(u)\ \frac{\partial u}{\partial r}=\beta(u)k(u)N(\varphi,t)v+$$
$$+\bar{\mu}(\varphi,t)(\bar{u}-u) \quad \text{при} \quad r=R_2. \qquad /4/$$

Тут $u_0(r,\varphi)$ – початковий розподіл температури у внутрішній обоймі; $a^2,\lambda(u)$ – відповідно усереднений коефіцієнт температуропровідності і коефіцієнт теплопровідності /залежний від температури/ внутрішньої обойми; σ – коефіцієнт конвективного теплообміну між циліндричною стінкою обойми й охолоджувальним повітрям /рідиною/; $k(u)$ – коефіцієнт тертя між біговою доріжкою і роликами /залежний від температури/; $\beta(u)$ визначає, яка кількість тепла, що виникає внаслідок тертя між роликами і біговою доріжкою, потрапляє у внутрішню обойму /за Блоком, $\beta(u)=\lambda(u)/(\lambda(u)+\lambda_0(u))$, де $\lambda_0(u)$ – коефіцієнт теплопровідності роликів; $\bar{u}$ – температура охолоджувального повітря /рідини/; $v=2\pi R_2\,\omega$ – лінійна швидкість руху роликів по біговій доріжці внутрішньої обойми [1, 3]. Крім цього,

$$N(\varphi,t)=p(\varphi-vt)h(\varphi),$$
$$\bar{\mu}(\varphi,t)=\mu(\varphi-vt),$$

де $p(y)$, $\mu(y)$ – періодичні функції з періодом $l=\pi/z$ такі, що $p(y)=0{,}5(\cos(\pi y/s)+1), \mu(y)=0$, якщо $|y|<s$, і $p(y)=0$, $\mu(y)=0{,}5\sigma_0[\cos\pi(|y|-l)/(l-s)+1]$, якщо $s\le|y|\le l$; $h(\varphi)=$ $=\pi F(\cos\varphi-0{,}5)/(0{,}307kz)$, якщо $|\varphi|\le\pi/3$, $h(\varphi)=0$, якщо $|\varphi|>\pi/3$.

Тут через z, k, s, σ_0 позначені відповідно кількість роликів у підшипнику, площа поверхні стикання ролика з біговою доріжкою, довжина спільної частини серединного кола і поверхні стикання, максимальне значення коефіцієнта конвективного теплообміну між зовнішньою циліндричною стінкою внутрішньої обойми та охолоджувальним повітрям /рідиною/.

Складена програма для ЕОМ знаходження числового розв"язку задачі /1/-/4/ на основі методу різницевих схем [2]. Виходячи з цього, розраховане нестаціонарне теплове поле в обоймі роликового підшипника опори шарошки бурового долота. Отримані результати узгоджуються з експериментальними даними.

I. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М., 1979. 2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1982. 3. Ярышев М.И. Теоретические основы измерения нестационарных процессов. М., 1976.

Стаття надійшла до редколегії I7.03.93

УДК 5I7.947

Л.І.Комарницька

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ, НЕ РОЗВ"ЯЗАНОГО ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ

У деяких задачах гідродинаміки виникають лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними, не розв"язані відносно старшої похідної по часу:

$$D_t^l L_0(x;D_x)u+\sum_{k=0}^{l-1} D_t^k L_{l-k}(x;D_x)u=f(t,x). \qquad /1/$$

Велике прикладне значення цих рівнянь пояснює численність досліджень з питань постановок крайових задач, якісного вивчення розв"язків, спектральних властивостей операторів L_0. Зокрема, у праці [4] розглянуті змішані крайові задачі для рівнянь вигляду /1/, де $L_0(x;D_x)$ – еліптичний оператор порядку $2m$ відносно змінних $x=(x_1,\dots,x_p)$.

У даній статті досліджується задача з нелокальними умовами по часу для рівняння вигляду /1/ зі змінними по x коефіцієнтами у випадку однієї просторової змінної. Тут продовжені дослідження, розпочаті у праці [2].

I. Розглянемо в області $Q=[0,T]\times G, G=[0,\pi]$ задачу

$$L(u)\equiv\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathcal{L}^m u+\sum_{\substack{\beta\le m\\ l\le n-1}} a_{\beta l}\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathcal{L}^\beta u=f(t,x), \qquad /2/$$

$$M_r(u)\equiv\sum_{\substack{\beta\le m\\ l\le n-1}} A^r_{\beta l}\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathcal{L}^\beta u\Big|_{t=0}-\mu\sum_{\substack{\beta\le m\\ l\le n-1}} A^r_{\beta l}\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathcal{L}^\beta u\Big|_{t=T}=0\ (r=\overline{1,n}), \qquad /3/$$

$$\mathcal{L}^i u\big|_{x=0}=\mathcal{L}^i u\big|_{x=\pi}=0\quad (i=\overline{0,m-1}), \qquad /4/$$

де $a_{\beta l}, A^{\tau}_{\beta l} \in \mathbb{R}$, $a_{m,0} \neq 0$, $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$\mathcal{L} \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + q(x)$, $\mathcal{L}^0 u \equiv u$, $\mathcal{L}^i u = \mathcal{L}\mathcal{L}^{i-1}u$,

функції $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ – достатньо гладкі на $[0,\pi]$.

Розв"язок задачі шукаємо в гільбертовому просторі $C^n([0,T], W_2^{2m}(G))$ $(m,n \in \mathbb{Z}_+, n \geq 2)$ функцій $u(t,x)$ таких, що функції $\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}$ $(j=\overline{0,n})$ для кожного $t \in [0,T]$ належать простору $W_2^{2m}(G)$ і неперервні по t в нормі $W_2^{2m}(G)$.

Норма в просторі $C^n([0,T], W_2^s(G))$ задається формулою

$$\|u(t,x)\|^2_{C^n([0,T],W_2^s(G))} = \int_0^T \sum_{j=0}^{n} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} \right\|^2_{W_2^s(G)} dt. \qquad /5/$$

При $s = 2m$ шуканий розв"язок буде розв"язком майже всюди, а при $s \geq 2m+1$, згідно з теоремою вкладення Соболева, – класичним.

2. Розв"язок задачі /2/–/4/ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \qquad /6/$$

де $X_k(x)$ – власні функції задачі Штурма–Ліувілля:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(p(x)X'(x)\right) + q(x)X(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad /7/$$

Зауважимо, що згідно з лемою [1, розд. 5], $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора $\mathcal{L}$.

Відомо, що всі власні значення λ_k задачі /7/ дійсні, різні і невід"ємні, а власні функції $\{X_k(x)\}$ утворюють ортогональну систему, яка є повною в просторі $L_2[0,\pi]$, причому справедливі оцінки

$$d_1 k^2 \leq \lambda_k \leq d_2 k^2 \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad /8/$$

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} \left| X_k^{(j)}(x) \right| \leq \tilde{c}_j k^j \qquad (j = \overline{0,2m}), \qquad /9/$$

де $d_1, d_2, \tilde{c}_j$ – додатні сталі.

Кожна з функцій $u_k(t)$ $(k \in \mathbb{N})$ визначається як розв"язок задачі

$$L_k(u_k) \equiv \lambda_k^m u_k^{(n)}(t) + \sum_{\substack{\beta \leq m \\ l \leq n-1}} a_{\beta l} \lambda_k^{\beta} u_k^{(l)}(t) = f_k(t), \qquad /10/$$

$$M_{k\tau}(u_k) \equiv \sum_{\substack{\beta \leq m \\ l \leq n-1}} A^{\tau}_{\beta l} \lambda_k^{\beta} \left[u_k^{(l)}(0) - \mu u_k^{(l)}(T)\right] = 0 \quad (\tau = \overline{1,n}), \qquad /11/$$

де $f_k(t) = \int_0^{\pi} f(t,x) X_k(x)\,dx$.

Припустимо, що корені $\nu_j(\lambda_k)(j=\overline{1,n})$ характеристичного рівняння

$$P(\nu)\equiv\nu^n+\sum_{\substack{\beta\le m\\ l\le n-1}}a_{\beta l}\,\frac{\lambda_k^\beta}{\lambda_k^m}\,\nu^l=0 \qquad /12/$$

попарно різні і не дорівнюють нулю. Зауважимо, що $|\nu_j(\lambda_k)|\le C(j=\overline{1,n})$, де стала C не залежить від k

Для кожного $k\in N$ однорідне рівняння

$$L_k(u_k)=0 \qquad /13/$$

має фундаментальну систему розв"язків

$$u_{kj}(t)=e^{\nu_j(\lambda_k)t}\quad (j=\overline{1,n};\ k\in N).$$

Розв"язок задачі /13/–/11/ має вигляд

$$u_k(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j(k)e^{\nu_j(\lambda_k)t}\quad (k\in N), \qquad /14/$$

де сталі $C_j(k)$ визначаються зі системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n}c_j(k)\sum_{\substack{\beta\le m\\ l\le n-1}}A_{\beta l}^{r}\,\lambda_k^\beta\,\nu_j^l(\lambda_k)\,(1-\mu e^{\nu_j(\lambda_k)T})=0\ (r=\overline{1,n}), \qquad /15/$$

визначник якої

$$\Delta(\lambda_k)=A(\lambda_k)\prod_{j=1}^{n}(1-\mu e^{\nu_j(\lambda_k)T})\prod_{n\ge i>j\ge 1}(\nu_i(\lambda_k)-\nu_j(\lambda_k)), \qquad /16/$$

$$A(\lambda_k)=\det\Big\|\sum_{\beta\le m}A_{\beta l}^{r}\lambda_k^\beta\Big\|_{\substack{r=\overline{1,n}\\ l=\overline{0,n-1}}}.$$

На основі попередньо згаданого і теореми про єдиність розвинення функції в ряд Фур"є отримаємо твердження.

<u>Теорема 1.</u> Для єдиності розв"язку задачі /2/–/4/ в просторі $C^n([0,T],W_2^{2m}(G))$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\Delta(\lambda_k)\ne 0,\ k\in N. \qquad /17/$$

Доведення аналогічне доведенню теореми с.3 [3, розд. 2].

3. Розглянемо питання про існування розв"язку задачі /2/–/4/ з простору $C^n([0,T],W_2^{2m}(G))$. Нехай виконується умова /17/. Тоді для кожного $\lambda_k\ (k\in N)$ існує функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі /13/–/11/, за допомогою якої розв"язок задачі /10/–/11/ зображається у вигляді:

$$u_k(t)=\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau. \qquad /18/$$

У квадраті $K_T=\{(t,\tau):\ 0\le t;\ \tau\le T\}$ крім сторін $\tau=0$ і $\tau=T$ функція $G_k(t,\tau)$ визначається формулою

$$G_K(t,\tau)=g_K(t,\tau)+\frac{1}{2(n-1)A(\lambda_K)}\sum_{z=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta\le m}(-1)^{z+s}\times$$
$$\times A_{\beta l}^{z}\lambda_K^{\beta}\nu_\alpha^l(\lambda_K)e^{\nu_\gamma(\lambda_K)t-\nu_\alpha(\lambda_K)\tau}A_{z,s}(\lambda_K)S_{n-s}[\nu_\gamma(\lambda_K)]\times$$
$$\times(1+\mu e^{\nu_\alpha(\lambda_K)T})(1-\mu e^{\nu_\gamma(\lambda_K)T})^{-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\ne\alpha}}^{n}(\nu_j(\lambda_K)-\nu_\alpha(\lambda_K))^{-1}\times$$
$$\times\prod_{\substack{j=1\\ j\ne\gamma}}^{n}(\nu_j(\lambda_K)-\nu_\gamma(\lambda_K))^{-1}, \qquad /19/$$

де $A_{z,s}(\lambda_K)$ – визначник, отриманий з визначника $A(\lambda_K)$ викресленням z -го рядка і s -го стовпця; $S_{n-s}[\nu_\gamma(\lambda_K)]$ – сума всеможливих добутків чисел $\nu_1(\lambda_K),\ldots,\nu_{\gamma-1}(\lambda_K),\ \nu_{\gamma+1}(\lambda_K),\ldots,\nu_n(\lambda_K)$, взятих у кількості $n-s$ штук; $S_0[\nu_\gamma(\lambda_K)]\equiv 1$;

$$g_K(t,\tau)=\frac{sgn(t-\tau)}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{n-1}e^{\nu_\alpha(\lambda_K)(t-\tau)}\prod_{\substack{j=1\\ j\ne\alpha}}^{n}(\nu_j(\lambda_K)-\nu_\alpha(\lambda_K))^{-1}$$

На сторонах $\tau=0$ $(\tau=T)$ квадрата K_T функція $G_K(t,\tau)$ доозначується за неперервністю справа /зліва/.

Теорема 2. Нехай існують сталі $M_i>0$ і $\gamma_i\in\mathbb{N}$, $i=1,2,3$ такі, що для всіх /крім скінченного числа/ значень λ_K $(k\in\mathbb{N})$ виконуються нерівності

$$|A(\lambda_K)|\ge M_1\lambda_K^{-\gamma_1-\varepsilon/8}, \qquad /20/$$

$$|1-\mu e^{\nu_\alpha(\lambda_K)T}|\ge M_2\lambda_K^{-\gamma_2-\varepsilon/8} \quad (\alpha=\overline{1,n}), \qquad /21/$$

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\ne\alpha}}^{n}|\nu_j(\lambda_K)-\nu_\alpha(\lambda_K)|\ge M_3\lambda_K^{-\gamma_3-\varepsilon/8} \quad (\alpha=\overline{1,n}),\ 0<\varepsilon<1, \qquad /22/$$

і нехай $p(x)\in C^{2\psi-1}[0,\pi]$, $q(x)\in C^{2\psi-2}[0,\pi]$, $f(t,x)\in C^0([0,T],W_2^{2\psi}(G))$ $(\psi=m+mn+\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_3+1)$ задовольняє умови

$$\mathcal{L}^i f\big|_{x=0}=\mathcal{L}^i f\big|_{x=\pi}=0 \quad (i=\overline{0,\psi-1}). \qquad /23/$$

Тоді існує розв"язок задачі /2/–/4/, який належить простору $C^n([0,T],W_2^{2m}(G))$ і неперервно залежить від $f(t,x)$.

Доведення. Розв"язок задачі /2/–/4/ формально зображається у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T G_K(t,\tau)f_K(\tau)d\tau X_K(x). \qquad /24/$$

Якщо $f(t,x)$ задовольняє умови теореми, то

$$\max_{0\le t\le T}|f_K(t)|\le\frac{M_4}{\lambda_K^{\psi}}\|f(t,x)\|_{C^0([0,T],W_2^{2\psi}(G))}. \qquad /25/$$

З оцінок /8/, /9/, /20/–/22/, /25/ і формул /18/, /19/, /24/ випливає оцінка для норми функції $u(t,x)$:

$$\|u(t,x)\|_{C^n([0,T],W_2^{2m}(G))} \leq T\cdot C(n)\cdot M_4 \|f(t,x)\|_{C^0([0,T],W_2^{2q}(G))} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2+\varepsilon}. \quad /26/$$

З нерівності /26/ випливає доведення теореми.

4. З'ясуємо, коли виконуються оцінки /20/–/22/. Розглянемо нерівність /20/. Визначник $A(\lambda_k)$ є поліномом степеня не вище mn відносно λ_k, який можна зобразити у вигляді

$$A(\lambda_k)=\sum_{j\leq mn} A_j \lambda_k^j , \quad /27/$$

де кожний з коефіцієнтів A_j є сумою добутків, складених з коефіцієнтів $A_{\beta l}^{z}$ в умовах /3/.

<u>Теорема 3.</u> Для майже всіх /відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{mn+1}$/ векторів $(A_0, A_1, \ldots, A_{mn})$ нерівність /20/ виконується при $\gamma_1 \geq 1$ для всіх /крім скінченного числа/ значень λ_k.

<u>Доведення.</u> Розрізнятимемо два випадки: $A_0 \neq 0$ і $A_0=A_1=\ldots=A_p=0\ (0\leq p\leq mn)$.

У першому випадку доведення аналогічне доведенню теореми 4.4 [3, розд. 2], у другому – доведення випливає з теореми 2.4 [3, розд. 1].

Позначимо через a вектор, компонентами якого є коефіцієнти $a_{\beta 0}$ рівняння /12/, тобто $a=(a_{m,0}, a_{m-1,0}, \ldots, a_{0,0})$.

<u>Теорема 4.</u> Для майже всіх /відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^2$/ векторів $(\ln|\mu|, T)$ або $(\frac{\varphi}{\pi}, \frac{T}{\pi})$, де $\varphi=\arg\mu$, або для майже всіх /відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{m+1}$/ векторів a нерівності /21/ виконуються при $\gamma_2 \geq 1$ для всіх значень $\lambda_k (\lambda_k > \mathcal{K},\ \mathcal{K}=\mathcal{K}(\varphi, T, \ln|\mu|, a_{\beta 0}))$.

<u>Доведення.</u> Позначимо $a_\alpha(\lambda_k)=\operatorname{Re} \nu_\alpha(\lambda_k)$, $b_\alpha(\lambda_k)=\operatorname{Im} \nu_\alpha(\lambda_k)$. Оцінюючи ліву частину нерівності /21/, отримуємо

$$|1-\mu e^{\nu_\alpha(\lambda_k)T}|=|1-|\mu|e^{a_\alpha(\lambda_k)T}\cos(\varphi+b_\alpha(\lambda_k)T)-i|\mu|e^{a_\alpha(\lambda_k)T}\sin(\varphi+b_\alpha(\lambda_k)T)|=$$
$$=\sqrt{1-2|\mu|e^{a_\alpha(\lambda_k)T}\cos(\varphi+b_\alpha(\lambda_k)T)+|\mu|^2e^{2a_\alpha(\lambda_k)T}} > |1-|\mu|e^{a_\alpha(\lambda_k)T}| > \quad /28/$$
$$> C_1 |\ln|\mu|+a_\alpha(\lambda_k)T|,\quad C_1=\max\{1; e^{-CT+\ln|\mu|}\}.$$

Якщо в /28/ $a_\alpha(\lambda_k)\neq 0$, то доведення теореми аналогічне доведенню теореми 4.4 [3, розд. 2] при $|\mu|\neq 1$ або теореми 2.6 [3, розд. 3] при $|\mu|=1$.

Якщо ж в /28/ $a_\alpha(\lambda_k)=0, |\mu|=1$, то враховуючи, що $b_\alpha(\lambda_k)\neq 0$, маємо

$$|1-\mu e^{\nu_\alpha(\lambda_k)T}| > |\sin(\varphi+b_\alpha(\lambda_k)T)| \geq 2\left|\frac{\varphi+b_\alpha(\lambda_k)T}{\pi}-d(\lambda_k)\right|, \quad /29/$$

де $d(\lambda_k) \in \mathbb{Z}$ задовольняє нерівність $\left|\frac{\varphi+\theta_\alpha(\lambda_k)T}{\pi} - d(\lambda_k)\right| \leq \frac{1}{2}$. Далі доведення аналогічне доведенню теореми 4.4 [3, розд. 2] при $\mu \neq \pm 1$ або теореми 2.6 [3, розд. 3] при $\mu = \pm 1$.

В усіх інших випадках $|1-\mu e^{\nu_\alpha(\lambda_k)T}| \geq K > 0$.

Розглянемо нерівність /22/. Для дискримінанта $\mathcal{D}(P)$ характеристичного многочлена

$$P(\nu) = \nu^n + \sum_{i=0}^{n-1} \nu^i p_i(\lambda_k, a_{\beta i})$$

Можливі два наступних зображення:

$$\mathcal{D}(P) = \prod_{n \geq \alpha > \beta \geq 1} [\nu_\alpha(\lambda_k) - \nu_\beta(\lambda_k)]^2, \qquad /30/$$

$$\mathcal{D}(P) = \pm n^n p_0^{n-1} + F, \qquad /31/$$

де p_0 лінійно залежить від $a_{m,0}$, F містить степені p_0 менші, ніж $n-1$.

З формули /31/ для кожного $\lambda_k (k \in \mathbb{N})$ маємо

$$\left|\frac{\partial^{n-1}\mathcal{D}(P)}{\partial a_{m,0}^{n-1}}\right| = n^n (n-1)! \geq 1. \qquad /32/$$

З нерівності /32/ і лем 2.1 і 2.2 [3 розд. 1] випливає, що для майже всіх /відносно міри Лебега/ чисел $a_{m,0}$ справедлива оцінка

$$|\mathcal{D}(P)| \geq C_1 \lambda_k^{-(n-1)-\varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < 1) \qquad /33/$$

для всіх /крім скінченного числа/ значень λ_k.

З формули /30/, оцінки /33/ і нерівності

$$|\nu_\alpha(\lambda_k) - \nu_\beta(\lambda_k)| \leq C_2 \quad (\alpha, \beta = \overline{1,n};\ \alpha \neq \beta)$$

випливає наступна теорема.

Теорема 5. Для майже всіх /відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$ / чисел $a_{m,0}$ нерівності /22/ виконуються при $\gamma_3 \geq (n-1)/2$ для всіх /крім скінченного числа/ значень $\lambda_k (k \in \mathbb{N})$.

Зауваження. 1. Результати роботи переносяться на випадок, коли корені рівняння /12/ кратні. 2. Результати роботи переносяться на випадок багатьох просторових змінних, коли $\mathcal{L} \equiv -div(k(x)\nabla) + a(x)$.

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1971. 512 с. 2. Комарницька Л.І., Пташник Б.Й. Задача з нелокальними умовами для диференціального рівняння з частинними похідними, яке не розв"язане відносно старшої похідної по часу // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями.

Чернівці, 1990. С.86-95. 3. П т а ш н и к Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 264 с. 4. У с п е н с к и й С.В., Д е м и д е н к о Г.В. О смешанных краевых задачах для одного класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной // Дифференц. уравнения с частн. производными // Тр. семинара акад. С.Л.Соболева. Новосибирск, 1980. № 2. С.92-115.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.93

УДК 517.956.47

Г.П.Лопушанська, А.І.Сошко

ПРО ЗАДАЧУ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ

Нехай $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – задані функції з $L_{1,loc}(R_+)$ [1]. Розглянемо задачу знаходження регулярного розв"язку $u(x,t)$ рівняння

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad /1/$$

в області $\Omega = \{(x,t): x \in (h;0), t>0\}$, який задовольняє умови

$$u(0,t) = \alpha(t),\ u(h,t) = \beta(t),\ u_x(0,t) = \gamma(t), \qquad /2/$$

і невідомих функцій $\varphi(x)$, $\omega(t)$ таких, що

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_x(h,t) = \omega(t). \qquad /3/$$

Як у праці [2], розв"язком задачі /1/-/3/ називаємо таку функцію $u(x,t)$, що $\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & (x,t)\in\Omega \\ 0, & (x,t)\bar{\in}\Omega \end{cases}$ задовольняє у просторі $D'(R^2)$ рівняння

$$\tilde{u}_t - a^2 \tilde{u}_{xx} = F(x,t), \qquad /4/$$

де $F(x,t) = \theta(-x)\theta(x-h)\varphi(x)\cdot\delta(t) + a^2\theta(t)[\alpha(t)\cdot\delta'(x) -$
$-\beta(t)\delta'(x-h) + \gamma(t)\cdot\delta(x) - \omega(t)\cdot\delta(x-h)]$,

а невідомі функції визначаємо з умови $\tilde{u} = 0$ поза Ω.

Згідно з [1], узагальнена функція

$$\tilde{u}(x,t) = \varepsilon(x,t) * F(x,t) \qquad /5/$$

є єдиним у просторі $D'_+(R^2)$ узагальнених функцій, що дорівнюють нулю при $t<0$, розв"язком рівняння /4/ /тут $\varepsilon(x,t)$ – фундаментальна функція оператора $\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$. При $\alpha, \beta, \gamma, \omega \in L_{1,loc}(R_+)$ і $\varphi(x)$ обмеженій або із $L_2(h;0)$ функція /5/ інтегрована у кожній скінченній області $(h;0)\times[t_1;t_2]$ і має вигляд

$$\tilde{u}(x,t) = a^2\int_0^t[\alpha(\tau)\mathcal{E}_x(x,t-\tau)-\beta(\tau)\mathcal{E}_x(x-h,t-\tau)+$$
$$+\gamma(\tau)\mathcal{E}(x,t-\tau)-\omega(\tau)\mathcal{E}(x-h,t-\tau)]d\tau+\int_h^0\varphi(\xi)\mathcal{E}(x-\xi,t)d\xi. \qquad /6/$$

Застосовуємо умову $\tilde{u}(x,t)=0$ при $x<h$ та $x>0$. Із єдиності розв"язків основних граничних задач для рівняння /1/ в областях $(-\infty;h)\times(0;+\infty)$ та $(0;+\infty)\times(0;+\infty)$ випливає, що ця умова рівносильна тому, що

$$\lim_{x\to h-}\tilde{u}(x,t)=\lim_{x\to 0+}\tilde{u}(x,t)=0,\quad \lim_{t\to 0+}\tilde{u}(x,t)=0,\quad x<h,\ x>0.$$

Використовуючи властивості одновимірних параболічних потенціалів, отримуємо систему інтегральних рівнянь I-го роду для знаходження невідомих $\varphi(x)$ та $\omega(t)$:

$$\frac{1}{a^2}\int_h^0\varphi(\xi)\mathcal{E}(-\xi,t)d\xi-\int_0^t\omega(\tau)\mathcal{E}(-h;t-\tau)d\tau=\frac{1}{2a^2}\alpha(t)+$$
$$+\int_0^t[\beta(\tau)\mathcal{E}_x(-h,t-\tau)-\gamma(\tau)\mathcal{E}(0,t-\tau)]d\tau,$$
$$\frac{1}{a^2}\int_h^0\varphi(\xi)\mathcal{E}(h-\xi,t)d\xi-\int_0^t\omega(\tau)\mathcal{E}(0,t-\tau)d\tau=\frac{1}{2a^2}\beta(t)-\int_0^t[\alpha(\tau)\mathcal{E}_x(h,t-\tau)-$$
$$-\gamma(\tau)\mathcal{E}(h,t-\tau)]d\tau.$$

Якщо зробити перетворення Лапласа за змінною t, вважаючи, що $\alpha(t)\doteq A(p),\ \beta(t)\doteq B(p),\ \gamma(t)\doteq\Gamma(p),\ \omega(t)\doteq M(p)$, то отримуємо

$$-\frac{1}{a^2}\int_h^0\varphi(\xi)e^{-(\xi-h)\frac{\sqrt{p}}{a}}d\xi+M(p)=$$
$$=(A(p)e^{-\frac{|h|\sqrt{p}}{a}}-B(p))\frac{\sqrt{p}}{a}+\Gamma(p)e^{-\frac{|h|\sqrt{p}}{a}}, \qquad /7/$$
$$-\frac{1}{a^2}\int_h^0\varphi(\xi)e^{(\xi-h)\frac{\sqrt{p}}{a}}d\xi+M(p)=(-A(p)\frac{\sqrt{p}}{a}+\Gamma(p)e^{-\frac{h\sqrt{p}}{a}}+B(p)\frac{\sqrt{p}}{a},$$

а звідси

$$\frac{1}{a\sqrt{p}}\int_h^0\varphi(\xi)\,sh\frac{\sqrt{p}}{a}(\xi-h)d\xi=A\,ch\frac{\sqrt{p}|h|}{a}-B-\frac{a}{\sqrt{p}}\Gamma\cdot sh\frac{\sqrt{p}}{a}|h|. \qquad /8/$$

Нехай $\frac{\sqrt{p}}{a}|h|=b+k\pi i,\ b>0,\ i=\sqrt{-1}$. Функції $\omega_k(\xi)=$
$=\operatorname{Im}\frac{a}{\sqrt{p}}sh\frac{\sqrt{p}}{a}(\xi-h)\Big|_{\frac{\sqrt{p}}{a}=\frac{b+k\pi i}{|h|}}=\frac{1}{b^2+k^2\pi^2}[b\,ch\frac{b(\xi-h)}{|h|}\sin\frac{k\pi(\xi-h)}{|h|}-$
$-k\pi\,sh\frac{b(\xi-h)}{|h|}\cos\frac{k\pi(\xi-h)}{|h|}]$ утворюють лінійно незалежну в $L_2(h;0)$ систему. Будуємо за нею ортонормовану систему

$$\psi_K(\xi)=\sum_{l=1}^{K} A_{Kl}\,\omega_l(\xi),\quad \omega_K(\xi)=\sum_{l=1}^{K} B_{Kl}\,\psi_l(\xi), \qquad /9/$$

де A_{Kl}, B_{Kl} – певні сталі. Тоді з /8/ знаходимо коефіцієнти

$$c_K=\int_h^0\varphi(\xi)\psi_K(\xi)d\xi=a^2\sum_{l=1}^{K}A_{Kl}\,Jm\Big[A\big((b+l\pi i)^2\frac{a^2}{h^2}\big)(-1)^l ch\, b - \qquad /10/$$

$$-B\big((b+l\pi i)^2\frac{a^2}{h^2}\big)-\frac{a(b-l\pi i)}{b^2+l^2\pi^2}\Gamma\big((b+l\pi i)^2\frac{a^2}{h^2}\big)(-1)^l sh\, b\Big]$$

розвинення функції $\varphi(\xi)$ в ряд Фур"є

$$\varphi(\xi)=\sum_{K=1}^{\infty}c_K\psi_K(\xi),\quad \xi\in(h;0) \qquad /11/$$

за системою $\psi_K(\xi)$. Якщо

$$\sum_{l=1}^{K}A_{Kl}\,R\big((b+l\pi i)^2\frac{a^2}{h^2}\big)=o\big(\frac{1}{K}\big),\quad K\to\infty \qquad /12/$$

при заміні $R(p)$ на $A(p)$, $B(p)$ та $\Gamma(p)$, то збігається ряд $\sum_{K=1}^{\infty}c_K^2$, і, за теоремою Ріса-Фішера, /11/ визначає функцію $\varphi(\xi)\in L_2(h;0)$. Тепер із /7/ знаходимо

$$M(p)=-B\frac{\sqrt{p}}{a}+\big(A\frac{\sqrt{p}}{a}+\Gamma\big)e^{-|h|\frac{\sqrt{p}}{a}}+\frac{1}{a^2}\int_h^0\varphi(\xi)e^{-(\xi-h)\frac{\sqrt{p}}{a}}d\xi. \qquad /13/$$

Згідно з /10/-/12/, інтегральний вираз у /13/ є $O(\frac{1}{\sqrt{p}})$ при $p\to\infty$. При $\beta\in L_{1,loc}(R_+)\ \lim_{t\to 0}\beta*\frac{1}{\sqrt{t}}=2\lim_{t\to 0}\int_0^{\sqrt{t}}\beta(t-u^2)du=0$, тому $B\sqrt{p}=p\frac{B}{\sqrt{p}}$ є зображенням $\beta(t)*\frac{1}{t\sqrt{\pi t}}$ і за додаткової умови $\beta(t)*\frac{1}{t\sqrt{t}}\in L_{1,loc}(R_+)$ із /13/ знаходимо, що оригіналом для $M(p)$ є функція $\omega(t)$ із $L_{1,loc}(R_+)$. Таким чином, доведена така теорема.

<u>Теорема.</u> Нехай $\alpha(t),\beta(t),\gamma(t),\beta(t)*\frac{1}{t\sqrt{t}}\in L_{1,loc}(R_+)$ і виконується /12/. Існує єдиний розв"язок $u(x,t)$ задачі /1/-/3/, визначений формулою /6/ в області Ω, функція $\varphi(x)\in L_2(h;0)$ і визначається коефіцієнтами /10/ розвинення /11/ в ряд Фур"є за ортонормованою системою /9/, а $\omega(t)\in L_{1,loc}(R_+)$ і визначається як оригінал для $M(p)$, заданої формулою /13/.

Запропонований метод поширюється на випадок, коли задані функції $\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)$ є узагальненими функціями із просторів $\mathcal{D}'_+(b)$ [1].

1. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. М., 1981. 2. Л о п у ш а н с к а я Г.П. О решении некоторых классов обратных краевых задач в пространстве распределений. Львов, 1990. 12 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ. № 48-Ук 90.

Стаття надійшла до редколегії 03.03.93

УДК 515.12

Л.Є.Базилевич, М.М.Зарічний

ПРО ДЕЯКІ ПСЕВДОВНУТРІШНОСТІ У ГІПЕРПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТОВОГО КУБА

Компакт A, що лежить у гільбертовому кубі Q, називається антиопуклим [8], якщо для всіх його замкнених підмножин B_1, B_2, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ їхні замкнені опуклі оболонки не перетинаються: $conv(B_1) \cap conv(B_2) = \emptyset$.

Нехай $exp\, Q$ – гіперпростір гільбертового куба Q. За теоремою Веста-Кертіса-Шорі [6], $exp\, Q \cong Q$. Позначимо через $\mathcal{L}$ гіперпростір непорожніх антиопуклих компактів у Q.

Нагадаємо, що псевдовнутрішністю гільбертового куба $Q=[-1,1]^{\omega}$ називається множина $s=(-1,1)^{\omega} \subset Q$ [3]. У Q розглядається стандартна метрика

$$d((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i|.$$

<u>Теорема 1.</u> Пара $(exp\, Q, \mathcal{L})$ гомеоморфна парі (Q, s).

<u>Доведення.</u> Покажемо спочатку, що множина $\mathcal{L}$ є типу G_δ в $exp\, Q$.

Для кожного натурального n нехай $\mathcal{M}_n = \{A \in exp\, Q \mid$ існують $B_1, B_2 \in exp\, Q$, $B_1 \cup B_2 \subset A$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $diam\, (conv(B_1) \cap conv(B_2)) \geq 1/n\}$.
Легко бачити, що всі $\mathcal{M}_n$ замкнені в $exp\, Q$ і що $\cup\{\mathcal{M}_n \mid n \in \mathbb{N}\} = exp\, Q \setminus \mathcal{L}$.

Покажемо, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує відображення $f_\varepsilon : exp\, Q \longrightarrow \mathcal{L}$, ε – близьке до тотожного відображення. Нехай $m \in \mathbb{N}$ таке, що $2^{-m} < \varepsilon$. Існує злічена сім"я відображень $\{g_i : Q \to [-1,1] \mid i \in \mathbb{N}\}$ з такою властивістю: для кожних $A, B \in exp\, Q$, $A \cap B = \emptyset$ існує $i \in \mathbb{N}$, таке, що $g_i(A) \cap g_i(B) = \emptyset$. Визначимо, тепер відображення $h : Q \to Q$ формулою $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (y_i)_{i=1}^{\infty}$, де

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{, якщо } i \leq m+2, \\ g_{i-m-2}((x_i)_{i=1}^{\infty}) & \text{, якщо } i \geq m+2. \end{cases}$$

Легко бачити, що $f_\varepsilon = exp\, h$ є шуканим відображенням.

З довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що кожна компактна підмножина в $exp\,Q\setminus\mathcal{L}$ є Z - множиною в $exp\,Q$ /нагадаємо, що замкнена підмножина $A\subset X$ називається Z -множиною в X якщо тотожне відображення 1_X апроксимується відображеннями в $X\setminus A$ [3]/. Як наслідок, одержуємо, що множина $exp\,Q\setminus\mathcal{L}$ є σ-Z - множиною, тобто зліченним об"єднанням Z -множин.

Для доведення гомеоморфізму пар $(exp\,Q,\mathcal{L})$ і $(Q,\ s)$ скористаємося технікою Z -скелетоїдів, розвиненою в праці [5]. Достатньо показати, що множина $exp\,Q\setminus\mathcal{L}$ містить Z -скелетоїд, тобто об"єднання зліченної зростаючої сім"ї Z -множин $A_1\subset A_2\subset\ldots$, що виконується умова: для кожного $\varepsilon > 0$ кожної Z -множини $B\subset exp\,Q$ і кожного $m\in\mathbb{N}$ існує $n\in\mathbb{N};\ m\leqslant n$ і автогомеоморфізм $h: exp\,Q\to exp\,Q$ такий, що $d(h,1_{expQ})<\varepsilon, h|_B = id,\ h(B)\subset A_m$.

Нескладно переконатися, що можна вибрати Z -скелетоїд у вигляді $A_n = \{A\in exp([-1,1]\times Q)\mid A$, що містить відрізок довжини $\geqslant 1/n$, паралельний першому співмножнику $\}$ /див. аналогічні міркування у праці [1] .

Розглянутий гіперпростір $\mathcal{L}$ допускає алгебраїчну інтерпретацію, яка дає змогу проводити паралелі з деякими іншими гіперпросторами компактних підмножин у гільбертовому просторі. Легко бачити, що замкнена опукла оболонка $conv(A)$ для $A\in\mathcal{L}$ афінно гомеоморфна просторові ймовірнісних мір PA . Отже, A є множиною твірних для вільної $\mathbb{P}$ -алгебри $(PA,\psi A)$, де $\mathbb{P}=(P,\eta,\psi)$ - монада ймовірнісних мір [2].

Гільбертів куб Q має структуру /півґратки Лоусона [7] з операціями $\wedge,\vee: Q\times Q\to Q$:

$$((x_i)_{i=1}^{\infty})\wedge((y_i)_{i=1}^{\infty}) = (min\{x_i,y_i\})_{i=1}^{\infty},$$

$$((x_i)_{i=1}^{\infty})\vee((y_i)_{i=1}^{\infty}) = (max\{x_i,y_i\})_{i=1}^{\infty}.$$

Позначимо через $\mathcal{L}_1$ /відповідно $\mathcal{L}_2$ / підмножину, що складається з компактів A , для яких найменша замкнена підґратка /відповідно підпівґратка/ $h(A)$, що містить A , є вільною /півґраткою з множиною твірних A .

Для кожного $A\in exp\,Q$ нехай $I\varphi(A)$ - найменший добуток вигляду $\prod_{i=1}^{\infty}[a_i,\ b_i]\subset Q$, що містить A . Приймаємо $\mathcal{L}_3=\{A\in exp\,Q\mid$; для кожних $B_1,B_2\in exp A,\ B_1\cap B_2=\emptyset$ маємо $I\varphi(B_1)\cap I\varphi(B_2)=\emptyset\}$.
У праці [9] показано, що елементи множини $\mathcal{L}_3$ є множинами твірних вільних $\mathbb{L}$ -алгебр, де $\mathbb{L}=(\lambda,\eta,\mu)$ - монада суперрозширення.

Доведення наступної теореми повторює доведення теореми I.

Теорема 2. Пари $(\exp Q, \mathcal{L}_i)$ гомеоморфні парі (Q, s).

Відзначимо, що теорема 1 анонсована у праці [4].

I. Базилевич Л.Є. Поповнені простори функцій на континуумах Пеано // Укр. мат. журн. 1992. Т.44. № 9. С.1165-1170. 2. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 3. Чепмэн Т. Лекции о Q-многообразиях. М., 1981. 4. Bazylevych L.E. On topology of the hyperspace of anticonvex sets // Тез.IX междунар. конф. по топологии и ее прил. К., 1992. С.56. 5. Bessaga Cz., Pełczyński A. Selected topics in infinite-dimensional topology. Warszawa, 1975. 6. Curtis D.W., Schori R.M. Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes // Fund. Math. 1978. T.101. P.19-38. 7. Johnstone P. Stone spaces. London, 1982. 8. Mill J. van. A counterexample in ANR-theory // Topol. Appl. 1981. Vol.12. P.315-320. 9. Zarichnyi M.M. On covariant topological functors, II // Q. and A. General Topology. 1991. Vol.9. N1. P.1-32.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.93

УДК 515.12+519.46

А.Б.Телейко

ПРО ГІПЕРПРОСТОРИ ІДЕАЛІВ У КОМПАКТНИХ ПІВГРУПАХ

Нехай S – компактна гаусдорфова півгрупа, T – компактна підпівгрупа в S. Нагадаємо, що непорожня множина $\mathcal{L} \subset S$ називається лівим T-ідеалом в S, якщо $T\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Лівий T-ідеал називається мінімальним, якщо він не містить жодного лівого T-ідеалу як власну підмножину. Кожний мінімальний T-ідеал замкнений в S [2]. Позначимо через $\mathcal{L}_T(S)$ $(\mathcal{ML}_T(S))$ множину замкнених /мінімальних/ лівих T-ідеалів в S.

Нагадаємо, що на множині $\exp(X)$ непорожніх замкнених підмножин простору X вводиться топологія В'єторіса [1]. Базу цієї топології утворюють множини вигляду
$\langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \{A \in \exp(X) \mid A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k,\ A \cap U_i \neq \emptyset$ для всіх $i = 1, \ldots, k\}$.

Теорема 1. Множина $\mathcal{L}_T(S)$ замкнена в $\exp(S)$.

Доведення. Припускаючи протилежне, одержуємо, що існує $A \in cl(\mathcal{L}_T(S))$, для якого TA не міститься в A, тобто $ta \notin A$, для деяких $t \in T$ і $a \in A$. Із неперервності множення та регулярності S випливає, що існують відкриті в S множини U, V, W, для яких $t \in U, a \in V \subset W, A \subset W$ і $UV \cap W = \emptyset$. Тоді $A \in \langle V, W \rangle$, і отже, існує $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_T(S) \cap \langle V, W \rangle$. Якщо $l \in \mathcal{L} \cap V$, то $tl \in T\mathcal{L} \subset \mathcal{L} \subset W$. З іншого боку, $tl \in UV$ і одержуємо суперечність.

З компактності T випливає, що існує мінімальний лівий T-ідеал $\mathcal{L}_0 \subset T$ [2].

<u>Твердження 1.</u> $M\mathcal{L}_T(S) = M\mathcal{L}_{L_0}(S)$.

<u>Доведення.</u> Нехай $\mathcal{L} \in M\mathcal{L}_T(S)$, тоді $\mathcal{L}_0\mathcal{L} \subset T\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, і отже, $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{L_0}(S)$. Якщо $U \in \mathcal{L}_{L_0}(S)$ і $U \subset \mathcal{L}$, то $T\mathcal{L}_0 U \subset U \subset \mathcal{L}$, тому $\mathcal{L}_0 U = \mathcal{L}$ за мінімальністю $\mathcal{L}$. Звідси $U = \mathcal{L}$ і $\mathcal{L} \in M\mathcal{L}_{L_0}(S)$.

Навпаки, якщо $\mathcal{L} \in M\mathcal{L}_{L_0}(S)$, то $T\mathcal{L} = T\mathcal{L}_0\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0\mathcal{L} = \mathcal{L}$, оскільки $\mathcal{L}_0 l = \mathcal{L}$ для кожного $l \in C$ [2]. Отже, $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_T(S)$. Нехай $U \in \mathcal{L}_T(S)$ і $U \subset \mathcal{L}$, тоді $U \supset TU \supset \mathcal{L}_0 U = \mathcal{L}$, звідки $\mathcal{L} = U$ і $\mathcal{L} \in M\mathcal{L}_T(S)$.

<u>Твердження 2.</u> Підмножина $\mathcal{L} \subset S$ є мінімальним лівим $\mathcal{L}_0$-ідеалом тоді і тільки тоді, коли існує $x \in S$, для якого $\mathcal{L}_0 x = \mathcal{L}$.

<u>Доведення</u> подане у праці [2].

Природно ввести відношення еквівалентності $\sim$ на S:
$a \sim b \Leftrightarrow \mathcal{L}_0 a = \mathcal{L}_0 b$, $a, b \in S$.

Введемо такі позначення.

Нехай $\{U_a \mid a \in T\}$ – множина класів еквівалентності відношення $\sim$. Для кожного $a \in T$ нехай $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_0 a$, де $a \in U_\alpha$. Тоді $\mathcal{L}_\alpha$ – єдиний мінімальний лівий T-ідеал, що міститься в U_α.

Зауважимо, також, що $\mathcal{L}_0 U_\alpha = \mathcal{L}_\alpha$ і $U_\alpha = \mathcal{L}_0^{[-1]}\mathcal{L}_\alpha$ /нагадаємо, що $A^{[-1]}B = \{a \in S \mid Aa \subset B\}$, $A, B \subset S$ [2]/.

<u>Теорема 2.</u> Для кожного $A \in \mathcal{L}_{L_0}(S)$ множини $\cup\{U_\alpha \mid \mathcal{L}_\alpha \subset A\}$ і $F = \cup\{\mathcal{L}_\alpha \mid \mathcal{L}_\alpha \subset A\}$ замкнені в S.

<u>Доведення.</u> Нехай $A \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Тоді, оскільки A – лівий $\mathcal{L}_0$-ідеал, то $\mathcal{L}_\alpha \subset A$. Звідси $\mathcal{L}_0^{[-1]}(S \setminus A) = S \setminus \cup\{U_\alpha \mid \mathcal{L}_\alpha \subset A\}$. Проте множина $\mathcal{L}_0^{[-1]}(S \setminus A)$ відкрита в S, бо відкритою в S є множина $S \setminus A$ [2]. Отже, множина $\cup\{U_\alpha \mid \mathcal{L}_\alpha \subset A\}$ замкнена в S.

Другу частину теореми доводимо від супротивного. Нехай $a \in cl(F) \setminus F$. Оскільки $cl(F) \subset cl(A) = A \subset \cup\{U_\alpha \mid \mathcal{L}_\alpha \subset A\}$, то знайдеться α таке, що $a \in U_\alpha \setminus \mathcal{L}_\alpha$. Оскільки множина $\mathcal{L}_\alpha$ замкнена в S, то існують окіл Oa точки a і окіл $O\mathcal{L}_\alpha$ множини $\mathcal{L}_\alpha$, що не перетинаються. Враховуючи, що $a \in U_\alpha$, для довільного $l \in \mathcal{L}_0$ одержуємо: $la \in \mathcal{L}_\alpha \subset O\mathcal{L}_\alpha$. Отже, за неперервністю множення знайдуться окіл Ol точки l і окіл $O_1 a$ точки a такі, що $Ol \cdot O_1 a \subset O\mathcal{L}_\alpha$. Однак $\mathcal{L}_0$ – компакт, і отже, існує окіл

$\tilde{O}a$ точки a, для якого виконуються такі включення: $\tilde{O}a \subset Oa$ і $\mathcal{L}_0 \cdot Oa \subset O\mathcal{L}_\alpha$. Оскільки $a \in cl(F)$, то $\tilde{O}a \cap F \neq \phi$. Нехай $f \in \tilde{O}a \cap F$. Тоді $f \in F$, а отже, $f \in \mathcal{L}_0 f \subset O\mathcal{L}_\alpha$, тобто $O\mathcal{L}_\alpha \cap \tilde{O}a \neq \phi$ і одержуємо суперечність. Отже, $cl(F) = F$. Теорема доведена.

Наслідок 1. Множина $\cup M\mathcal{L}_{L_0}(S)$ замкнена в S.

Доведення. Достатньо замість A взяти S.

Теорема 3. Множина $M\mathcal{L}_{L_0}(S)$ замкнена в $exp(S)$.

Доведення. Припускаємо протилежне. Тоді існує замкнена в S множина A така, що $A \in cl(M\mathcal{L}_{L_0}(S)) \setminus M\mathcal{L}_{L_0}(S)$. Оскільки за теоремою 1, $cl(M\mathcal{L}_{L_0}(S)) \subset cl(\mathcal{L}_{L_0}(S)) = \mathcal{L}_{L_0}(S)$, то A – лівий $\mathcal{L}_0$ - ідеал. Нехай $a \in A$ – довільне. Тоді для будь-якого околу Oa точки a маємо $A \in \langle Oa, S \rangle$, тобто існує $\mathcal{L}_\alpha \in \langle Oa, S \rangle$, і отже, $\mathcal{L}_\alpha \cap Oa \neq \phi$. Звідси $a \in \cup\{\mathcal{L}_\alpha | \mathcal{L}_\alpha \subset S\}$ /оскільки за наслідком 1, множина $\cup\{\mathcal{L}_\alpha | \mathcal{L}_\alpha \subset S\}$ замкнена в S /. Отже, знайдеться $a \in T$ таке, що $a \in \mathcal{L}_\alpha$. Оскільки A – лівий $\mathcal{L}_0$ - ідеал, то $A = \cup\{\mathcal{L}_\alpha | a \in T_1\}$ для деякої підмножини $T_1 \subset T$, причому $|T_1| \geq 2$, бо A – не мінімальний ідеал.

Нехай $\mathcal{L}_\alpha \subset A$ і $\mathcal{L}_\beta \subset A$, $\alpha, \beta \in T_1, \alpha \neq \beta$ і $a_1 \in \mathcal{L}_\alpha$. З нормальності S одержуємо, що існують околи $O\mathcal{L}_\alpha$ і $O\mathcal{L}_\beta$ множин $\mathcal{L}_\alpha$ і $\mathcal{L}_\beta$, які не перетинаються. Оскільки $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_0 a_1$ і $\mathcal{L}_0$ - компакт, то знайдеться окіл Oa_1 точки a_1, для якого $\mathcal{L}_0 \cdot Oa_1 \subset O\mathcal{L}_\alpha$. Тоді $A \in \langle Oa_1, O\mathcal{L}_\beta, S \rangle$ і, отже, для деякого $\gamma \in T$ $\mathcal{L}_\gamma \in \langle Oa_1, O\mathcal{L}_\beta, S \rangle$. Звідси $\mathcal{L}_\gamma \cap Oa_1 \neq \phi$ і

$$\mathcal{L}_\gamma \cap \mathcal{L}_\beta \neq \phi. \qquad (*)$$

Нехай $f \in \mathcal{L}_\gamma \cap Oa_1$. Тоді $\mathcal{L}_0 f \subset O\mathcal{L}_\alpha$ і $\mathcal{L}_0 f = \mathcal{L}_\gamma$. Тобто, враховуючи $(*)$, одержуємо, що $O\mathcal{L}_\alpha \cap O\mathcal{L}_\beta \neq \phi$, а це суперечить виборові $O\mathcal{L}_\alpha$ і $O\mathcal{L}_\beta$. Теорема доведена.

Наслідок 2. Множина $M\mathcal{L}_T(S)$ замкнена в $exp(S)$.

Доведення безпосередньо випливає з твердження 2.

1. Федорчук В.В., Филлипов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 2. Wallace A.D. Relative ideals in semigroups. I (Fausett's Theorem)//Colloq. Math. 9(1962). P. 55-61.

Стаття надійшла до редколегії 30.05.93

В.Р.Зеліско

ПРО ПРЯМУ СУМУ І ПРЯМИЙ ДОБУТОК МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

Нехай $A(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ - невироджена кліткова-діагональна многочленна матриця вигляду $A(x) = diag(A_1(x), \dots, A_m(x))$, яку називають прямою сумою матриць $A_1(x), \dots, A_m(x)$ і позначають $A(x) = A_1(x) \oplus \dots \oplus A_m(x)$ [1]. Якщо $A_i(x) = B_i(x) C_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, де $B_i(x)$ - регулярні матриці степеня r, то, очевидно, $A(x) = B(x)\,C(x)$, де $B(x) = B_1(x) \oplus \dots \oplus B_m(x)$ регулярна матриця. Обернене твердження правильне не завжди [1, 3], а тому виокремимо клас таких многочленних матриць, для яких воно справджується.

Многочленна матриця $A(x)$ називається матрицею простої структури, якщо всі її елементарні дільники лінійні, тобто якщо в її канонічній діагональній формі $diag(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x))$ многочлени $\varepsilon_i(x)$ мають вигляд $\varepsilon_i(x) = (x - \alpha_{1i}) \dots (x - \alpha_{ki})$, $i = \overline{1,n}$, де $\alpha_{ki} \neq \alpha_{ei}$ при $k \neq l$.

<u>Теорема 1.</u> Многочленна матриця $A(x) = A_1(x) \oplus \dots \oplus A_m(x)$ є матрицею простої структури тоді і тільки тоді, коли $A_1(x), \dots, A_m(x)$ - матриці простої структури.

<u>Доведення.</u> Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $A(x) = A_1(x) \oplus \dots \oplus A_m(x)$, де порядки матриць $A_j(x)$ дорівнюють n_j, $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$. Якщо $A(x)$ - многочленна матриця простої структури, то для будь-якого кореня α кратності k її характеристичного многочлена $\det A(x)$ маємо $rang\, A(\alpha) = n - k$. Якби для деякого j матриця $A_j(x)$ не була матрицею простої структури, то $rang\, A_j(\alpha) > n - k_j$, де k_j - кратність кореня α многочлена $\det A_j(x)$, і оскільки $k = k_1 + \dots + k_m$, то $\sum_{j=1}^{m} (n_j - k_j) > n - k$, що суперечить умові $rang\, A(\alpha) = rang\, A_1(\alpha) + \dots + rang\, A_m(\alpha)$.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай многочленні матриці $A_i(x)$ $i = \overline{1,m}$ - матриці простої структури, тобто для кожного кореня α кратності k_i многочлена $\det A_i(x)$ маємо $rang\, A_i(\alpha) = n_i - k_i$. Тоді $rang\, A(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} rang\, A_i(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} (n_i - k_i) = \sum_{i=1}^{m} n_i - \sum_{i=1}^{m} k_i = n - k$, тобто $A(x)$ - матриця простої структури.

Зауваження I. Відомо, що унітальна многочленна матриця простої структури розкладається в добуток лінійних унітальних матриць простої структури [1], тому пряма сума унітальних многочленних матриць однакового степеня розкладається в добуток клітково-діагональних унітальних лінійних множників.

Нехай $A(x), B(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ – невироджені многочленні матриці. Як і в праці [2], прямий /кронекерівський/ добуток матриць $A(x)$ і $B(x)$ визначаємо блоковою матрицею

$$A(x) \otimes B(x) = \left\| \begin{matrix} a_{11}(x)B(x) \dots a_{1n}(x)B(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}(x)B(x) \dots a_{nn}(x)B(x) \end{matrix} \right\| .$$

Теорема 2. Нехай $A_1(x), A_2(x)$ – невироджені многочленні матриці простої структури. Прямий добуток $A_1(x) \otimes A_2(x)$ є матрицею простої структури тоді і тільки тоді, коли $(\det A_1(x), \det A_2(x)) = 1$.

Доведення. Зведемо многочленні матриці $A_1(x)$ і $A_2(x)$ до відповідних канонічних діагональних форм:

$$P_1(x)A_1(x)Q_1(x) = diag(\varepsilon_1^{(1)}(x), \dots, \varepsilon_n^{(1)}(x)),$$

$$P_2(x)A_2(x)Q_2(x) = diag(\varepsilon_1^{(2)}(x), \dots, \varepsilon_n^{(2)}(x)).$$

Звідси, використовуючи властивості прямого добутку матриць [2], отримуємо $diag(\varepsilon_1^{(1)}(x), \dots, \varepsilon_n^{(1)}(x)) \otimes diag(\varepsilon_1^{(2)}(x), \dots, \varepsilon_n^{(2)}(x)) =$
$= (P_1(x) \otimes P_2(x))(A_1(x) \otimes A_2(x))(Q_1(x) \otimes Q_2(x))$.

Враховуючи те, що матриці $P_1(x) \otimes P_2(x)$ і $Q_1(x) \otimes Q_2(x)$ оборотні над $\mathbb{C}[x]$, бачимо, що канонічною діагональною формою матриці $A_1(x) \otimes A_2(x)$ є матриця

$$diag(\varepsilon_1^{(1)}(x), \dots, \varepsilon_n^{(1)}(x)) \otimes diag(\varepsilon_1^{(2)}(x), \dots, \varepsilon_n^{(2)}(x)), \quad /I/$$

тому $A_1(x) \otimes A_2(x)$ є матрицею простої структури тоді і тільки тоді, коли такою є матриця /I/. Отже, надалі доводячи теорему, розглядатимемо прямий добуток вигляду /I/.

Необхідність. Нехай $A_1(x)$ і $A_2(x)$ – многочленні матриці простої структури. Якщо α – спільний корінь многочленів $\det A_1(x)$ і $\det A_2(x)$, то в матриці /I/ принаймні один діагональний елемент має вигляд $(x-\alpha)^2 \varepsilon_n'(x)$, тому дефект матриці $A_1(\alpha) \otimes A_2(\alpha)$ менший, ніж алгебраїчна кратність цього кореня, а це суперечить тому, що матриця $A_1(x) \otimes A_2(x)$ має просту структуру.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай $A_1(x)$ і $A_2(x)$ – многочленні матриці простої структури, тобто для кожного кореня α многочлена $\det A_1(x)$ кратності k та кореня β многочлена $\det A_2(x)$ кратності l маємо $\operatorname{rang} A_1(\alpha)=n-k$ і $\operatorname{rang} A_2(\alpha)=n-l$. Якщо $(\det A_1(x), \det A_2(x))=1$, то кожний корінь ω_i кратності k_i многочлена $\det(A_1(x)\otimes A_2(x))$ є коренем одного з многочленів $\det A_1(x)$ або $\det A_2(x)$ кратності k_i/n. Нехай корінь ω_i многочлена $\det(A_1(x)\otimes A_2(x))$ є коренем $\det A_1(x)$. Тоді $A_2(\omega_i)$ – невироджена матриця. Якщо $\operatorname{rang} A_1(\omega_i)=n-p_i$, тобто в матриці $\operatorname{diag}(\varepsilon_1^{(1)}(\omega_i),\ldots,\varepsilon_n^{(1)}(\omega_i))$ є $n-p_i$ ненульових діагональних елементів, а в матриці $\operatorname{diag}(\varepsilon_1^{(2)}(\omega_i),\ldots$ $\ldots,\varepsilon_n^{(2)}(\omega_i))$ всі діагональні елементи – ненульові, то в матриці $\operatorname{diag}(\varepsilon_1^{(1)}(\omega_i),\ldots,\varepsilon_n^{(1)}(\omega_i))\otimes \operatorname{diag}(\varepsilon_1^{(2)}(\omega_i),\ldots,\varepsilon_n^{(2)}(\omega_i))$ є $(n-p_i)\,n$ ненульових елементів, тобто для кореня ω_i многочлена $\det(A_1(x)\otimes A_2(x))$ кратності $p_i n$ маємо

$$\operatorname{rang}(A_1(\omega_i)\otimes A_2(\omega_i))=n^2-p_i n,$$

тому $A_1(x)\otimes A_2(x)$ – матриця простої структури. Теорема доведена.

<u>Зауваження 2.</u> Якщо $A(x)$ і $B(x)$ – унітальні многочленні матриці простої структури, то $A(x)=(Ex-A_1)\ldots(Ex-A_s)$ і $B(x)=(Ex-B_1)\ldots(Ex-B_s)$, і за властивостями прямого добутку матриць [2] маємо:

$$A(x)\otimes B(x)=(Ex-A_1)\otimes(Ex-B_1)\ldots(Ex-A_s)\otimes(Ex-B_s).$$

Якщо ж, крім цього, характеристичні многочлени матриць $A(x)$ і $B(x)$ взаємно прості, що згідно з теоремою 2 $A(x)\otimes B(x)$, яка є унітальною многочленною матрицею, повністю розкладається в добуток лінійних унітальних множників.

Відзначимо, нарешті, що згідно з відомими результатами, наприклад із праці [2], теореми 1 і 2 можна використати, досліджуючи існування та єдиність розв"язків лінійних і многочленних матричних рівнянь.

1. К а з і м і р с ь к и й П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К., 1981. 2. Л а н к а с т е р П. Теория матриц. М., 1978. 3. П е т р и ч к о в и ч В.М. Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизация клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Мат. заметки. 1985. Т.37. Вып. 6. С.789-796.

Стаття надійшла до редколегії 19.03.93

УДК 512.74

В.І.Андрійчук

АЛГЕБРАЇЧНІ ТОРИ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Нехай K – поле алгебраїчних функцій від одної змінної з псевдоскінченним, за Аксом [3], полем констант $\varkappa$. Назвемо поле псевдоглобальним полем.

Мета цієї статті – показати, що частину результатів з арифметики алгебраїчних торів, визначених над глобальними полями, можна перенести на випадок псевдоглобальних полів. Це можливо завдяки тому, що для псевдоглобальних полів існує аналог глобальної теорії полів класів [1].

Нехай T – алгебраїчний тор над полем K, L/K – скінченне розширення Галуа поля K з групою Галуа G. Вважаємо, що тор T розщеплюється над полем L, тобто $T\otimes_K L = G^{z}_{m,L}$, де $G_m = Spec\, K[t,t^{-1}]$.

Далі для G-модуля M через $H^n(G,M)$ позначаємо когомології Галуа групи G з коефіцієнтами в M.

Ω означає множину всіх нормувань поля K, K_v – поповнення поля K за нормуванням $v\in\Omega$. Якщо $S\subset\Omega$, то група $T(K)$ – K-раціональних точок тора T вкладається у прямий добуток $\prod_{v\in S} T(K_v)$. Нехай $\overline{T(K)}$ – замикання $T(K)$ відносно топології прямого добутку, $A(T,S)=\prod_{v\in S} T(K_v)/\overline{T(K)}$ і $A(T)=A(T,\Omega)$.

<u>Теорема 1.</u> Нехай K – псевдоглобальне поле, T – тор над полем K, T розщеплюється над скінченним розширенням Галуа L поля K. Якщо S – скінченна множина нормувань поля K така, що для всіх $w|v$, $v\in S$ групи розкладу G_w циклічні, то $A(T,S)=0$.

Доведення теореми 1 та наступної теореми 2 грунтується на аналогах теорем двоїстості Тейта-Накаями для торів над загальними локальними полями та для торів над псевдоглобальними полями.

<u>Теорема А</u> /двоїстість Тейта-Накаями/. 1. Нехай k – загальне локальне поле, l/k – скінченне розширення Галуа, $G=Gal(l/k)$, T – тор, що розщеплюється над l, $\hat{T}$ – модуль раціональних характерів тора T, $T(l)=Hom(\hat{T},l^*)$. Тоді

$$H^n(G,\hat{T})\cong H^{2-n}(G,T(l)).$$

2. Нехай K – псевдоглобальне поле, L/K – скінченне розширення Галуа, $G=Gal(L/K)$, C_L – група класів ідеалів поля L, T – тор, який розщеплюється над L, $C_L(T)=Hom(\hat{T},C_L)$. Тоді

$$H^n(G,\hat{T})\cong H^{2-n}(G,C_L(T)).$$

<u>Доведення</u>. Нехай M – G – модуль l^* у випадку 1 і G – модуль C_L у випадку 2. Аналог локальної теорії полів класів для загальних локальних полів [4] у випадку 1 та глобальної теорії полів класів для псевдоглобальних полів [1] у випадку 2 показує, що $H^2(G,M)$ – циклічна група порядку $|G|$, і якщо α – твірна групи $H^2(G,M)$ і H – підгрупа групи G, то $H^1(H,M)=0$ і $H^2(H,M)$ – циклічна група порядку $|H|$, породжена обмеженням α на H. Звідси, використовуючи міркування, наведені у праці [2], одержуємо доведення теореми А.

<u>Доведення теореми I.</u> Запишемо для тора T канонічну точну послідовність [2]

$$0\to\hat{T}\to\hat{M}\to\hat{N}\to 0,$$

де $\hat{M}$ – пермутаційний G -модуль скінченного типу, $H^n(H,\hat{N})=0$ для всіх підгруп H групи G, а також відповідну двоїсту послідовність торів над полем L:

$$0\to N\to M\to T\to 0. \qquad /1/$$

Нехай w – продовження на L нормування v поля K, L_w – поповнення поля L відносно нормування w, G_w – відповідна група розкладу. Точній послідовності /1/ відповідає точна послідовність G_w -модулів:

$$0\to N(L_w)\to M(L_w)\to T(L_w)\to 0.$$

Запишемо відповідну точну послідовність когомологій Галуа:

$$M(K_v)\to T(K_v)\to H^1(G_w,N(L_w))\to H^1(G_w,M(L_w)).$$

Тут $H^1(G_w,M(L_w))=0$ і $H^1(G_w,N(L_w))\cong H^1(G_w,\hat{N})$ за двоїстістю Тейта-Накаями.

Якщо S_0 – скінченна множина нормувань поля K з нециклічними групами розкладу, то для всіх $v\notin S_0$ справедлива рівність [2]

$$H^1(G_w,N(L_w))=H^1(G_w,\hat{N})=0.$$

Точна послідовність когомологій показує, що для скінченної множини $S\subset\mathcal{P}$, $S\cap S_0=\varnothing$ маємо епіморфізм

$$\prod_{v\in S}M(K_v)\to\prod_{v\in S}T(K_v).$$

Звідси, наслідуючи міркування праці [2], одержуємо доведення теореми 1.

Наслідок 2. Нехай S_0 – скінченна множина нормувань поля K з нециклічними групами розкладу, $S = S_0 \cup S_1$. Тоді $A(T) = A(T,S) = A(T,S_0)$.

Для псевдоглобальних полів характеристики 0 справедливий наступний аналог теореми Воскресенського про тори над числовими полями.

Теорема 2. Нехай K – псевдоглобальне поле характеристики 0, тобто $\mathrm{char}\, \mathcal{K} = 0$. $T \hookrightarrow V(T)$ – вкладення тора у гладкий повний многовид над K. $Ш(T) = \mathrm{Ker}(H^1(G, T(L)) \to \bigoplus_{v \in \Omega} H^1(G_v, T(L_w))$ – група Шафаревича-Тейта тора T. Існує точна послідовність груп

$$0 \to A(T) \to H^1(G, \mathrm{Pic}\, V_L(T)) \to Ш(T) \to 0.$$

Доведення. Застосуємо двоїстість Тейта-Накаями для псевдоглобального поля за використанням міркувань, якими користуються для доведення точності цієї послідовності у випадку числового основного поля [2]:

Наслідок 1. Група $A(T)$ скінченна.

Наслідок 2. Якщо всі групи розкладу $v G_v$ циклічні, то $A(T) = 0$ і $Ш(T) = H^1(G, \mathrm{Pic}\, V_2(T))$.

1. А н д р і й ч у к В.І. S -квазиконечные поля и поля классов // Междунар. конф. по алгебре, посвящ. памяти А.И.Ширшова. Барнаул, 20-25 авг. 1991 г.: Тез. докл. по алгебраичес. геометрии и применениям алгебры. С.37. 2. В о с к р е с е н с к и й В.Е. Алгебраические торы. М., 1977. 3. Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann. Math. 1968. Vol. 88. №2. 4. Serre J.P. Corps locaux. Paris; Hermann. 1963.

Стаття надійшла до редколегії 13.04.93

УДК 510 + 511

М.Я.Комарницький, Р.Є.Кокорузь

ЛОКАЛЬНІ КІЛЬЦЯ В ЕЛЕМЕНТАРНОМУ ТОПОСІ, ВИЗНАЧЕНІ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТУЇЦІОНІСТСЬКОГО РАДИКАЛА ДЖЕКОБСОНА

Нехай A_{nn} – теорія нетривіальних комутативних кілець [1] в елементарному топосі $\mathcal{E}$. У ряді праць розглянуті деякі додаткові аксіоми, накладаючи які на моделі теорії A_{nn}, можна довести, що кільце є полем, локальним кільцем або має іншу властивість. Відомо, що кожна формула логіки першого порядку, яка є вивідною в інтуїціоністському численні предикатів, істинна на будь-якій моделі в елементарному топосі [1]. Ми будемо користуватись інтуїціоністською системою, викладеною в праці [5].

К.Малвей [4] досліджував три види аксіом поля:

$$F.1 \quad (a=0)\vee(a\in U),$$
$$F.2 \quad \neg(a=0)\Rightarrow(a\in U),$$
$$F.3 \quad \neg(a\in U)\Rightarrow(a=0),$$

де $U \xrightarrow{u} A$ – підоб"єкт одиниць кільця A, і довів, що вони інтуїціоністськи нееквівалентні. П.Т.Джонстоун [3] в свою чергу розглядав інші типи аксіом, які дали змогу вивчати інші види кілець. Зокрема, він видокремив чотири види аксіоми локального кільця:

$$L.0 \quad (a\in U)\vee(b\in U)\vee\neg(a+b\in U),$$
$$L.1 \quad (a+b\in U)\Rightarrow((a\in U)\vee(b\in U)),$$
$$L.3 \quad ((a+b\in U)\wedge\neg(a\in U))\Rightarrow(b\in U),$$
$$L.4 \quad (\neg(a\in U)\wedge\neg(b\in U))\Rightarrow\neg(a+b\in U).$$

У цій же праці проаналізовані можливі імплікації між аксіомами поля і локального кільця.

У даній статті аналізується поняття радикала Джекобсона комутативного кільця в топосі, яке використовується для дослідження локальних кілець, а також вводиться поняття півпростоти за Джекобсоном і досліджується його вплив на схему аксіом Джонстоуна.

Розглянемо формулу $\mathcal{J}(a)=(\forall b)((1-ab)\in U)$.
Підоб"єкт $\mathcal{J} \xrightarrow{i} A$ кільця A в елементарному топосі $\mathcal{E}$, який є інтерпретацією цієї формули, називатимемо радикалом Джекоб-

сона кільця A. Надалі, для скорочення формули використовуватимемо запис $(a \in \mathcal{T})$.

<u>Твердження 1.</u> Радикал Джекобсона $\mathcal{T} \xrightarrow{\bar{j}} A$ кільця A є ідеалом у цьому кільці.

<u>Доведення.</u> Оскільки підоб"єкт $\mathcal{T} \xrightarrow{\bar{j}} A$ є інтерпретацією формули $\mathcal{T}(a)$, то для доведення твердження потрібно перевірити звідність в інтуїціоністській логіці формул:

1/ $(\mathcal{T}(a) \wedge \mathcal{T}(b)) \Rightarrow \mathcal{T}(a+b)$;

2/ $\mathcal{T}(a) \Rightarrow \mathcal{T}(-a)$;

3/ $\mathcal{T}(a) \Rightarrow (\forall a')\mathcal{T}(aa')$.

Запишемо формулу $(a \in \mathcal{T})$ у вигляді

$$\mathcal{T}(a) = (\forall a')(\exists a'')((1-aa')a''=1).$$

Тоді
$$Ann, (1-aa')a''=1,\ (1-ba_1')a'''=1 \vdash Ann,$$
$$((1-aa')a''=1) \wedge ((1-ba')a'''=1) \wedge$$
$$\wedge ((1+aba'^2)a^{IV}=1) \vdash$$
$$\vdash Ann, (1-(a+b)a'a^{IV})(1+aba'^2)a''a'''=1 \vdash$$
$$\vdash Ann, (\exists a'')((1-(a+b)a')a''=1).$$

Звідси
$$Ann, ((\exists a'')((1-aa')a''=1)) \wedge$$
$$\wedge ((\exists a'')((1-ba_1')a''=1)) \vdash (\exists a'')((1-(a+b)a')a''=1).$$

Використовуючи теорему дедукції та правило введення квантора загальності, остаточно отримуємо

$$Ann, \vdash ((a \in \mathcal{T}) \wedge (b \in \mathcal{T})) \Rightarrow (a+b \in \mathcal{T}).$$

Аналогічно доводиться решта аксіом ідеала.

<u>Лема 2.</u> Для довільного кільця A в елементарному топосі справедливі такі твердження:

1/ $(a \in \mathcal{U}) \Rightarrow \neg(a \in \mathcal{T})$,

2/ $(a \in \mathcal{T}) \Rightarrow \neg(a \in \mathcal{U})$.

<u>Доведення.</u> $Ann, (a \in \mathcal{U}), (a \in \mathcal{T}) \vdash$
$$\vdash (\exists a')(aa'=1), (\forall a')(\exists a'')((1-aa')a''=1) \vdash (0=1).$$

З іншого боку, $Ann \vdash \neg(0=1)$.

Тому $Ann, (a \in \mathcal{U}) \vdash \neg(a \in \mathcal{T})$ і $Ann, (a \in \mathcal{T}) \vdash \neg(a \in \mathcal{U})$.

Остаточно, за теоремою дедукції, маємо

$$Ann \vdash ((a \in \mathcal{T}) \Rightarrow \neg(a \in \mathcal{U})) \wedge ((a \in \mathcal{U}) \Rightarrow \neg(a \in \mathcal{T})).$$

З допомогою ідеала $\mathcal{T} \xrightarrow{j} A$ можна записати такі аксіоми:

$\mathcal{T}L.0$ $(a \in \mathcal{U}) \vee (b \in \mathcal{U}) \vee ((a+b) \in \mathcal{T})$,

$\mathcal{T}L.1$ $(a \in \mathcal{U}) \vee (a \in \mathcal{T})$,

$\mathcal{T}L.2$ $\neg(a \in \mathcal{T}) \Rightarrow (a \in \mathcal{U})$,

$\mathcal{T}L.3$ $\neg(a \in \mathcal{U}) \Rightarrow (a \in \mathcal{T})$.

Кільце, яке задовольняє одну з цих аксіом, називатимемо локальним кільцем в сенсі Джекобсона.

Твердження 3. Справедлива така діаграма імплікацій:

$$\begin{tikzcd}
& F.2 \arrow[rrr] & & & \mathcal{T}L.2 \arrow[dd] \\
F.1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & & \mathcal{T}L.0 \arrow[r, dash] & \mathcal{T}L.1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& F.3 \arrow[rrr] & & & \mathcal{T}L.3
\end{tikzcd}$$

Доведення. Доведення імплікацій $F.1 \Rightarrow F.2$ і $F.1 \Rightarrow F.3$ можна знайти, наприклад у праці [3, лема 2.I]. Імплікації $F.2 \Rightarrow \mathcal{T}L.2$ і $F.3 \Rightarrow \mathcal{T}L.3$ справедливі, оскільки у випадку $\mathcal{T}=0$ аксіоми $\mathcal{T}L.2$ і $\mathcal{T}L.3$ виконуються на полях типу $F.2$ і $F.3$ відповідно. Оскільки поле, що задовольняє аксіому $F.1$ $\mathcal{U}$ - розв"язне, то

$$Ann, (a=0)\vee(a\in\mathcal{U}),\ (b=0)\vee(b\in\mathcal{U}) \vdash$$

$$\vdash (a\in\mathcal{U})\vee(b\in\mathcal{U})\vee(a+b=0), \text{ але } Ann \vdash (a+b=0) \Rightarrow (a+b\in\mathcal{T}),$$

і тому отримуємо, що $F.1 \Rightarrow \mathcal{T}L.0$.

Імплікація $\mathcal{T}L.0 \Rightarrow \mathcal{T}L.1$ очевидна. Достатньо в аксіомі $\mathcal{T}L.0$ виконати заміну терма b термом 0.

Далі, $Ann, (a\in\mathcal{U}), \neg(a\in\mathcal{T}) \vdash (a\in\mathcal{U})$ і за теоремою дедукції $Ann, (a\in\mathcal{U}) \vdash \neg(a\in\mathcal{T}) \Rightarrow (a\in\mathcal{U})$. Аналогічно $Ann, (a\in\mathcal{T}) \vdash \neg(a\in\mathcal{T}) \Rightarrow (a\in\mathcal{U})$, тому $Ann, (a\in\mathcal{U})\vee(a\in\mathcal{T}) \vdash \neg(a\in\mathcal{T}) \Rightarrow (a\in\mathcal{U})$. Отже, використовуючи теорему дедукції, доходимо висновку, що $\mathcal{T}L.1 \Rightarrow \mathcal{T}L.2$.

Справедливість імплікації $\mathcal{T}L.2 \Rightarrow \mathcal{T}L.3$ визначимо пізніше.

Означення 4. Кільце A в елементарному топосі $\mathcal{E}$ називається строго /слабо/ локальним у сенсі Джекобсона, якщо воно задовольняє аксіому $\mathcal{T}L.0$ /аксіому $\mathcal{T}L.3$ /, і геометричним локальним кільцем у сенсі Джекобсона, якщо воно задовольняє аксіому $\mathcal{T}L.1$.

Теорема 4. Якщо кільце A є строго /слабо, геометричним/ локальним кільцем у сенсі Джекобсона, то воно є строго /слабо, геометричним/ локальним кільцем у сенсі Джонстоуна /з приводу термінології див. працю [3]/.

Доведення. $\mathcal{T}L.0 \Rightarrow L.0$. Цю імплікацію отримуємо, користуючись лемою 2. Дійсно, з леми випливає, що

$$(a+b\in\mathcal{T}) \vdash \neg(a+b\in\mathcal{U}) \vdash$$

$$\vdash (a+b\in\mathcal{U})\vee(a\in\mathcal{U})\vee(b\in\mathcal{U})$$

і, оскільки $(a\in U)\vee(b\in U)\vdash(a\in U)\vee$
$$\vee(b\in U)\vee\neg(a+b\in U).$$
то, остаточно маємо

$$(a\in U)\vee(b\in U)\vee(a+b\in \mathcal{T})\vdash(a\in U)\vee(b\in U)\vee\neg(a+b\in\mathcal{T})$$

і за теоремою дедукції отримуємо потрібне.

$\mathcal{T}L.1 \Rightarrow L.1$. Зауважимо, що аксіома $L.1$ еквівалентна аксіомі $(a\in U)\vee((1-a)\in U)$.

Оскільки $(a\in\mathcal{T})=(\forall a')((1-aa')\in U)\vdash((1-a)\in U)$, то $Ann, (a\in U)\vee(a\in\mathcal{T})\vdash(a\in U)\vee((1-a)\in U)$ і $Ann\vdash((a\in U)\vee(a\in\mathcal{T}))\Rightarrow((a\in U)\vee((1-a)\in U)$.

$\mathcal{T}L.3\Rightarrow L.3$. $Ann, \neg(a\in U)\wedge\neg(b\in U), \mathcal{T}L.3\vdash$
$\vdash Ann, \neg(a\in U), \neg(b\in U), \mathcal{T}L.3\vdash Ann, (a\in\mathcal{T}), (b\in\mathcal{T})\vdash$
$\vdash Ann, (a\in\mathcal{T})\wedge(b\in\mathcal{T})$.

Застосовуючи аксіому 1/ ідеала і лему 2, отримуємо
$Ann, \mathcal{T}L.3, \neg(a\in U)\wedge\neg(b\in U)\vdash\neg((a+b)\in U)$;
а, отже, $Ann, \mathcal{T}L.3\vdash L.3$.

<u>Теорема 5</u>. Справедливі такі імплікації:

1/ $\mathcal{T}L.2\Rightarrow L.2$;

2/ $L.2\Rightarrow\mathcal{T}L.3$.

<u>Доведення</u>. 1. $Ann, ((a+b)\in U)\wedge\neg(a\in U), (b\in\mathcal{T})\vdash$
$\vdash Ann, ((\exists a')((a+b)a'=1)\wedge\neg((\exists a')(aa'=1)), ((\exists a''')$
$(1-ba')a'''=1)\vdash Ann, ((\exists a')((a+b)a'=1))\wedge$
$\wedge\neg((\exists a')(aa'=1))\wedge((\exists a''')(aa'a'''=1)\vdash$
$\vdash((\exists a')(aa'=1))\wedge((\exists a')(aa'=1))\vdash fals.$

Тому $Ann, (a+b\in U)\wedge\neg(a\in U)\vdash(b\in\mathcal{T})$.
Застосовуючи аксіому $\mathcal{T}L.2$, отримуємо
$$Ann, (a+b\in U)\wedge\neg(a\in U)\vdash(b\in U),$$
і за теоремою дедукції
$$Ann, \mathcal{T}L.2\vdash(((a+b)\in U)\wedge\neg(a\in U))\Rightarrow(b\in U).$$

2. Оскільки $\neg(a\in U)\vdash\neg(aa'\in U)$, то
$$Ann, \neg(a\in U), (\forall a)(aa'+(1-aa')=1\in U)\vdash$$
$$\vdash(\forall a')((1-aa')\in U)\vdash(a\in\mathcal{T}).$$
Отже, $Ann, L.2\vdash\neg(a\in U)\Rightarrow(a\in\mathcal{T})$.

Як наслідок цієї теореми отримуємо імплікацію $\mathcal{TL}.2 \Rightarrow \mathcal{TL}.3$, — цим самим завершуючи доведення твердження 3.

Зауважимо, що $\mathcal{TL}.3$ разом з $\mathcal{U}$-розв"язністю дає аксіому $\mathcal{TL}.0$ і в цьому випадку всі аксіоми $L.0-L.3$ і $\mathcal{TL}.0-\mathcal{TL}.3$ еквівалентні.

Оскільки $\mathcal{T} \xrightarrow{1} A$ ідеал в кільці A, то ми можемо розглядати фактор-кільце $\bar{A} = A/\mathcal{T}$. Зауважимо, що оскільки природний гомоморфізм $\pi : A \to \bar{A}$ кілець в елементарному топосі $\mathcal{E}$ є епіморфізмом, то справедлива формула

$$(\forall \bar{a})(\exists a)(\pi(a) = \bar{a}).$$

<u>Означення 6.</u> Кільце A в елементарному топосі $\mathcal{E}$ називається напівпростим у сенсі Джекобсона, якщо на ньому істинна аксіома

$$S\mathcal{T}.1 \quad (a \in \mathcal{T}) \Rightarrow (a = 0),$$

і слабо напівпростим у сенсі Джекобсона, якщо

$$S\mathcal{T}.2 \quad \neg(a = 0) \Rightarrow \neg(a \in \mathcal{T}).$$

Зрозуміло, що $S\mathcal{T}.1 \Rightarrow S\mathcal{T}.2$. Зворотна імплікація неправильна, як бачимо на прикладі топоса Серпінського.

<u>Теорема 7</u>. **Для довільного кільця A справедливі наступні твердження:**

1. Кільцевий фактор/об"єкт $A/\mathcal{T}$ — напівпростий у сенсі Джекобсона.

2. Якщо A задовольняє аксіому $\mathcal{TL}.2$, то $A/\mathcal{T}$ задовольняє аксіому $F.2$.

3. Якщо A задовольняє аксіому $\mathcal{TL}.3$, то $A/\mathcal{T}$ задовольняє аксіому $F.3$.

<u>Доведення.</u> 1. Нехай $\pi : A \to A/\mathcal{T}$ - природний гомоморфізм. Тоді $Ann, \pi(a) = \bar{a}, \pi(a') = \bar{a}', \pi(a'') = \bar{a}'' \vdash$

$$\vdash \pi((1-aa')a'') = (\bar{1} - \bar{a}\bar{a}')\bar{a}''.$$

Отже, маємо

$$Ann, \pi(a) = \bar{a}, \pi(a') = \bar{a}', \pi(a'') = \bar{a}'', (\bar{1} - \bar{a}\bar{a}')\bar{a}'' = \bar{1} \vdash$$
$$\vdash \pi((1-aa')a'') = \bar{1};$$

$$Ann, \bar{a} \in \mathcal{T}(\bar{A}), (\exists a)(\pi(a) = \bar{a}), (\exists a')(\pi(a') = \bar{a}') \vdash$$
$$\vdash (\exists a'')(\pi((1-aa')a'') = \bar{1}) \vdash (\exists a'')(\pi((1-aa')a'') - \bar{1} = \bar{0}) \vdash$$
$$\vdash (\exists a'')(((1-aa')a'' - 1) \in \mathcal{T}(A)) \vdash$$
$$\vdash (\exists a'')((1 + ((1-aa')a'' - 1)) \in \mathcal{U}(A)) \vdash$$
$$\vdash (\exists a'')((1-aa')a'' \in \mathcal{U}(A)) \vdash$$
$$\vdash (a \in \mathcal{T}(A)) \vdash \bar{a} = \pi(a) = \bar{0},$$

тобто $Ann,\ \bar{a} \in \mathcal{T}(\bar{A}) \vdash \bar{a} = \bar{0}$, звідки за теоремою дедукції отримуємо $Ann \vdash (\bar{a} \in \mathcal{T}(\bar{A})) \Rightarrow (\bar{a} = \bar{0})$.

2. Маємо:

$$Ann, \mathcal{TL}.2, \neg(\bar{a} = \bar{0}), \pi(a) = \bar{a} \vdash$$

$$\vdash Ann, \mathcal{TL}.2, \neg(\pi(a) = \bar{0}) \vdash$$

$$\vdash Ann, \mathcal{TL}.2, \neg(a \in \mathcal{T}) \vdash Ann, (a \in \mathcal{U}) \vdash$$

$$\vdash (\exists a')(aa' - 1 = 0) \vdash$$

$$\vdash (\exists a')(\pi(aa' - 1) = \bar{0}) \vdash$$

$$\vdash (\exists a')(\bar{a}\bar{a}' - \bar{1} = \bar{0}) \vdash (\bar{a} \in \mathcal{U}(\bar{A})).$$

Звідси за теоремою дедукції отримуємо:

$$Ann, \mathcal{TL}.2 \vdash \neg(\bar{a} = 0) \Rightarrow (\bar{a} \in \mathcal{U}(\bar{A})).$$

3. Із теореми 4 отримуємо, що $\mathcal{TL}.3 \Rightarrow L.3$, тому це твердження є наслідком леми 2.6 [3].

Ураховуючи результати статті [2] /твердження 13/ і лему 2.7 [3], отримуємо.

<u>Наслідок 8</u>. Кільце A в елементарному топосі $\mathcal{E}$ слабо локальне тоді і тільки тоді, коли його радикал Джекобсона є ендомаксимальним.

<u>Наслідок 9</u>. Довільне поле в елементарному топосі $\mathcal{E}$ напівпросте в сенсі Джекобсона.

1. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983. 2. Dupont P. Maximality and primeness of ideals // Séminaire math. // Inst. math. pure a appl. 1988. Vol. 1. N 5. P. 149-170. 3. Johnstone P.T. Rings, fields and spectra // J. Algebra. 1978. Vol. 1. N 2. P. 238-260. 4. Mulvey C. Intuitionistic algebra and representation of rings // Mem. of the Amer. Math. Soc. 1974. N 148. P. 3-58. 5. Osius G. Logical and set-theoretical tools in elementary topoi // Lecture Notes of Math. 1975. N 445. P. 297-346.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.93

УДК 515.12

Т.О.Банах

ПРО СЛАБКУ ТОПОЛОГІЮ ЗАМКНЕНОЇ ОДИНИЧНОЇ КУЛІ БАНАХОВОГО ПРОСТОРУ

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – банахів простір. Через $B_X=\{x\in X \mid \|x\|\leq 1\}$ позначаємо замкнену одиничну кулю простору X, наділену слабкою топологією, і через $B_{X^{**}}=\{x\in X^{**} \mid \|x\|\leq 1\}$ – одиничну кулю другого спряженого простору X^{**}, наділену $*$ – слабкою топологією. Канонічне вкладення $X\to X^{**}$ індукує вкладення $B_X\subset B_{X^{**}}$, при цьому підмножина B_X усюди щільна у $B_{X^{**}}$ [1].

У даній статті досліджуємо топологію одиничної кулі B_X, тобто топологію пари $(B_{X^{**}}, B_X)$.

Відомо, що куля $B_{X^{**}}$ метризована тоді і лише тоді, коли спряжений простір X^{**} сепарабельний. Тому надалі X –банахів простір із сепарабельним дуальним. Усі відображення вважаємо неперервними.

Нагадаємо, що $Q=[-1,1]^{\omega}$–гільбертів куб, $s=(-1,1)^{\omega}$ – його псевдовнутрішність і $\sum=\{(x_i)_{i=1}^{\infty}\in Q:\ \sup\{|x_i|:\ i\in N\}<1\}$– його радіальна внутрішність. Розглядатимемо такі класи сепарабельних метричних просторів: M_0 – клас компактів, M_1 – клас повнометризованих просторів, A_1 – клас σ-компактних просторів, A_2 – адитивний борелівський клас абсолютних $G_{\delta\sigma}$ -множин і M_2 – мультиплікативний борелівський клас абсолютних $F_{\sigma\delta}$ -множин. Гомеоморфізми позначаються символом « $\cong$ ».

Зауважимо, що якщо простір X є n-вимірним, $n<\infty$, тоді одинична куля $B_X=B_{X^{**}}$ гомеоморфна n –вимірному кубу $[0,1]^n$.

Якщо банахів простір X нескінченновимірний, тоді згідно з теоремою Банаха-Алаоглу [1], $B_{X^{**}}$–метризований опуклий нескінченновимірний компакт в локально опуклому просторі. За теоремою Келлера-Клі [4], куля $B_{X^{**}}$ гомеоморфна гільбертовому кубу $Q=[-1,1]^{\omega}$. Згідно з відомим критерієм рефлексивності, банахів простір X рефлексивний тоді і лише тоді, коли $B_X=B_{X^{**}}$. Звідси випливає твердження.

<u>Твердження 1.</u> Банахів простір X рефлексивний, сепарабельний і нескінченновимірний тоді і лише тоді, коли куля B_X гомеоморфна гільбертовому кубу Q.

Дещо складнішими є так звані банахові простори із польською кулею, тобто банахові простори X , для яких куля B_X - польський /тобто сепарабельний повнометризовний/ простір. У праці [9] доведено, що властивість банахового простору мати повну кулю зберігається ізоморфізмами, тобто не залежить від конкретно вибраної норми. Якщо другий спряжений простір X^{**}- сепарабельний /наприклад, коли X - сепарабельний квазірефлексивний банахів простір/, тоді X має повну кулю [9].

Наступне твердження випливає з теореми 3.3 [3].

Твердження 2. Якщо банахів простір X має польську кулю, тоді пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ гомеоморфна парі (Q, s).

Нагадаємо, що норма $\|\cdot\|$ на банаховому просторі X називається нормою Кадеця, якщо сильна збіжність на одиничній сфері $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ еквівалентна слабкій. Наприклад, норма на гільбертовому просторі, породжена скалярним добутком, є нормою Кадеця. Відомо [7], що кожен сепарабельний банахів простір допускає еквівалентну норму Кадеця.

Із вищенаведених тверджень випливає, що для банахових просторів із польською кулею топологія B_X не залежить від конкретно вибраної норми на X . У загальному випадку це не так. Для прикладу розглянемо банахів простір $X = c_0$ збіжних до нуля послідовностей дійсних чисел, наділений стандартною sup-нормою. Одинична куля B_X /відносно цієї норми/ є топологічним простором першої категорії, тобто є зліченним об"єднанням $B_X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in B_X \mid \forall m > n \ |x_m| \leq 1/2\}$ ніде не щільних /в слабкій топології/ множин. Водночас простір c_0 допускає кадецівську норму $\|\cdot\|_K$. Тоді одинична сфера S_K є всюди щільною в B_K абсолютною G_δ -множиною. Як наслідок, одинична куля B_K /стосовно кадецівської норми/ є берівським простором, тобто не є першої категорії.

Виникає природне запитання: чи існує якась топологічна властивість кулі B_X , яка не залежить від вибраної норми на X .

Для відповіді на це запитання нагадаємо означення сильно універсального простору, яке відіграє фундаментальну роль у нескінченно вимірній топології.

Замкнена підмножина A топологічного простору Y називається Z-множиною, якщо будь-яке відображення $f: Q \to X$ гільбертового куба апроксимується відображеннями в $Y \setminus A$. Вкладення $e: P \to Y$ називається Z-вкладенням, якщо $e(P)$-Z-множина в Y. Множина $A \subset Y$ називається $\sigma - Z$ -множиною, якщо вона є зліченним об"єднанням Z -множин в Y. Символ $(A,B) \Subset \Subset (A',B')$ означає, що $A \subset A'$, $B \subset B'$ і $A \setminus B \subset A' \setminus B'$.

Нагадаємо, що M_0 - клас метричних компактів. Нехай C - деякий клас топологічних просторів. Топологічний простір Y /пара (Y, Z) / називається сильно C -універсальним /сильно (M_0, C) -універсальною/, якщо для будь-якої метрики d на Y, множини $A \in C$ /пари $(A,C) \in (M_0, C)$/, замкненої підмножини $B \subset A$ і відображення $f: A \to Y$ такого, що обмеження $f|B: B \to Y \in Z$ - вкладенням $(\exists f(B, B \cap C) \Subset (Y,Z))$ існує таке Z -вкладення $\bar{f}: A \to Y$, що $\bar{f}|B = f|B$, $d(\bar{f}(a), f(a)) < 1$, $a \in A$ (і $\bar{f}(A,C) \Subset (Y,Z)$).

<u>Гіпотеза</u>. Нехай X -банахів простір із сепарабельним дуальним. Якщо одинична куля B_X не польська, тоді вона сильно M_2 -універсальна.

<u>Твердження.</u>3. Якщо X - банахів простір із сепарабельним спряженим і X містить лінійний підпростір, ізоморфний c_0 тоді куля B_X - сильно M_2 -універсальна, а пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ - - сильно (M_0, M_2) -універсальна.

<u>Доведення</u>. Нехай $T: c_0 \to X$ - оператор вкладення /розглядаємо стандартну sup -норму на c_0 /. Без обмеження загальності $\|T\| \leq 1$ і $T(c_0)$ - підпростір нескінченної ковимірності в X Відомо [6], що куля B_{c_0} сильно M_2 -універсальна, а пара $(B_{c_0^{**}}, B_{c_0})$ сильно (M_0, M_2) -універсальна. Застосовуючи теорему 4.1 [3], одержуємо, що куля B_X сильно M_2 -універсальна, а пара $(B_{X^{**}}, B_X)$-(M_0, M_2)- універсальна.

Пара (Y, Y'), де Y - топологічна копія гільбертового куба, називається (M_0, C) -поглинальною /тут C - деякий клас топологічних просторів/, якщо (i) множина міститься в $\sigma - Z$- підмножині простору Y; (ii) $Y' = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$, де $Y_i \in C$, $i \in \mathbb{N}$ - замкнені множини в Y' і(iii) пара (Y, Y') сильно (M_0, C) -універсальна. У праці [2, 8] доведено, що за певних умов на клас C будь-які дві (M_0, C)- поглинальні пари гомеоморфні. У праці [5] побудовані поглинальні пари для всіх борелівських класів. Зокрема, пара $(Q, A_1) \cong (Q, \Sigma)$ (M_0, A_1) - поглинальна, пара $(Q, \Omega_2) \cong \cong (Q^\omega, A_1^\omega) \cong (Q^\omega, \Sigma^\omega)$ - (M_0, M_2)- поглинальна і пара $(Q, A_2) \cong \cong (Q^\omega, W(Q \setminus \Omega_2, *))$ - (M_0, A_2)-поглинальна. /Тут $* \in Q \setminus \Omega_2$ і $W(Q \setminus \Omega_2, *) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q^\omega \mid \exists n_0$ таке, що $x_i \in Q \setminus \Omega_2$ для $i \leq n_0$ і $x_i = *$ для $i > n_0\}$).

Теорема 1. Нехай $\|\cdot\|$ – норма Кадеця на банаховому просторі X із сепарабельним дуальним X^*. Якщо пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ сильно (M_0, M_2) - універсальна, тоді вона гомеоморфна парі $(Q, Q\setminus A_2)$.

Зауваження 1. У стандартній /не кадецівській/ sup-нормі на $X = c_0$ пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ гомеоморфна парі $(Q, \Omega_2) \cong (Q^\omega, \Sigma^\omega)$ [6].

Наслідок 1. Припустимо, що банахів простір X зі спряженим дуальним містить підпростір, ізоморфний c_0. Якщо норма $\|\cdot\|$ на X – кадецівська, тоді пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ гомеоморфне парі $(Q, Q\setminus A_2)$.

Доведення твердження 4 розіб"ємо на леми.

Лема 1. Для будь-якого банахового простору із сепарабельним спряженим X^* ; $B_X \in M_2$.

Доведення. Із сепарабельності X^* випливає сепарабельність простору X. Нехай $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \subset B_X$ – зліченна всюди щільна множина. Розклад $B_X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} F_n^m$, де $F_n^m = \{x \in X^{**} \mid \|x\| \le 1, \|x - b_m\| \le 1/n\}$, показує, що B_X – $F_{\sigma\delta}$-множина в $B_{X^{**}}$. Оскільки $B_{X^{**}}$ – метризовний компакт, то $B_X \in M_2$. Лема доведена.

Лема 2. Нехай $\|\cdot\|$ – норма Кадеця на банаховому просторі X із сепарабельним спряженим. Тоді $B_{X^{**}} \setminus B_X$ міститься в σ-Z-множині $B_{X^{**}} \setminus S_X$ простору $B_{X^{**}}$ /тут $S_X = \{x \in B_{X^{**}} \mid x \in B_X$ і $\|x\| = 1\}$ - одинична сфера простору X в слабкій топології/.

Доведення. Оскільки $\|\cdot\|$ – норма Кадеця на X, тотожне відображення $(S_X, \|\cdot\|) \to (S_X, weak)$ є гомеоморфізмом. Звідси випливає, що S_X – G_δ - множина в $B_{X^{**}}$, а отже, $B_{X^{**}} \setminus S_X$ – F_σ - множина в $B_{X^{**}}$. Щоб показати, що $B_{X^{**}} \setminus S_X$ – σ-Z- множина, доведемо, що будь-яке відображення $f: Q \to B_{X^{**}}$ апроксимується відображеннями у сферу S_X. Дійсно, нехай $f: Q \to B_{X^{**}}$ – відображення гільбертового куба і $U \subset X^{**}$ – *- слабо відкритий окіл нуля. Необхідно побудувати таке відображення $\bar{f}: Q \to S_X$, що $\bar{f}(q) - f(q) \in U$ для кожного $q \in Q$. Без обмеження загальності, множина U – опукла і симетрична. Нехай $\mathcal{V}$ – таке скінченне покриття компакта Q, що $f(x)_{,} f(y) \in U/3$ для будь-яких $x, y \in V \in \mathcal{V}$ і нехай $\{\lambda_V : Q \to [0,1]\}_{V \in \mathcal{V}}$ – розбиття одиниці, підпорядковане цьому покриттю. Для кожного $V \in \mathcal{V}$ виберемо $x_V \in B_X = \{x \in X \mid \|x\| < 1\} \subset B_{X^{**}}$, $x_V - x \in U/3$ для деякого $x \in f(V)$. /таке x_V існує, оскільки відкрита одинична куля B_X всюди щільна в $B_{X^{**}}$ [1]. Нарешті, задамо відображення $f': Q \to B_{X^{**}}$ формулою $f'(q) = \sum_{V \in \mathcal{V}} \lambda_V(q) x_V$, $q \in Q$. Нескладно пересвідчитися, що $f(q) - f'(q) \in 2U/3$, $q \in Q$, і $f'(Q) \subset conv\{x_V \mid V \in \mathcal{V}\} \subset B_X$. Оскільки множина $U \subset X^{**}$ – *- слабо відкрита, то перетин $X \cap (U/3)$ необмежений за нормою. Тоді існує точка $y \in V \cap X$

з $\|y\| > 2$. Для кожного $q \in Q$ приймаємо, що $f(q)$ – єдина точка перетину променя $f'(q)+[0,\infty)y$ зі сферою S_X . Нескладно перевірити, що побудоване відображення $f: Q \to S_X$ – неперервне /навіть у сильній топології/ і $\bar{f}(q)-f'(q) \in U/3$, $q \in Q$. Враховуючи $f'(q)-f(q) \in 2U/3$, одержуємо, що $\bar{f}(q)-f(q) \in U$ для кожного $q \in Q$. Лема доведена.

Перейдемо тепер до доведення теореми I. Зауважимо, що куля $B_{X^{**}}$ гомеоморфна гільбертовому кубу Q . Оскільки пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ сильно (M_0, M_2) – універсальна, то пара $(B_{X^{**}}, B_{X^{**}} \setminus B_X)$ сильно (M_0, A_2) – універсальна. Із лем 1 і 2 випливає, що пара $(B_{X^{**}}, B_{X^{**}} \setminus B_X)$ (M_0, A_2) – поглинальна, а отже, гомеоморфна парі (Q, Λ_2) . Тобто пара $(B_{X^{**}}, B_X)$ гомеоморфна парі $(Q, Q \setminus \Lambda_2)$.

I. Э д в а р д с Р. Функциональный анализ. М., 2. Banakh T. Strongly universal and absorbing towers and tower manifolds, 1991 (Preprint). 3. Banakh T. The strongly universal property in closed convex sets, 1993 (Preprint). 4. Bessaga C., Pełczyński A. Selected topics in infinite-dimensional topology. Warszawa, 1975. 5. Bestvina M., Mogilski J. Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts // Michigan Math. J. 1986. Vol. 33. N 3. P. 291-313. 6. Gladdines M., Mill J. van. Hyperspaces of peano continua of euclidean spaces, 1992 (Preprint). 7. Diestel J. Geometry of Banach Spaces // Selected Topics. Lecture Notes in Math. 485. Springer-Verlag, 1975. 8. Dijkstra J.J., Mill J. van., Mogilski J. The space of infinite-dimensional compacta and other topological copies of $(l_f^2)^\omega$ // Pacific J. Math. 1992. Vol. 152. P. 255-273. 9. Edgar G.A., Wheeler R.F. Topological properties of Banach spaces // Pacific J. Math. 1984. Vol. 115. N 2. P. 317-350.

Стаття надійшла до редколегії I.06.93

УДК 513.88

О.Я.Мильо, О.Г.Сторож

ПРО ФУНКЦІЮ ВЕЙЛЯ ДЕЯКИХ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ЗВУЖЕНЬ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА

I. Нехай L_0 – замкнений додатно визначений лінійний оператор у гільбертовому просторі H з областю визначення $D(L_0)$ щільною в гільбертовому просторі H , та з індексом дефекту $(m,m), m<\infty$. У дослідженні спектральних властивостей різних класів розширень оператора L_0 важливу роль відіграє абстрактний аналог функції Вейля оператора Штурма-Ліувілля [7], який дробово-лінійним перетворенням відрізняється від характеристичної функції розглядуваного оператора [5, 12].

У цій статті згадані вище поняття трактуються з погляду теорії /абстрактних/ просторів граничних значень /п.г.з./ [1, 2, 4, 5].

Конкретніше, нехай L_K та L_F – відповідно м"яке /крейнове/ та жорстке /фрідріхсове/ розширення оператора L_0 [6] $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ – позитивний п.г.з. оператора L_0, що відповідає розширенню L_F /у сенсі [1, 4], H_e і $(\cdot|\cdot)_e$ – його енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток [2]. Далі нехай $\psi_1, \dots, \psi_r \in H_e$ – лінійно незалежні за модулем $D(L_F)$ /а отже, й за модулем $D(L_0^*)$), L_{min} – звуження оператора L_0 на множину $D(L_{min}) = \{y \in D(L_0): (y|\psi_i)_e = 0, i = \overline{1,r}\}$.

$$L_{max} \overset{def}{=} L_{min}^*, \quad \Psi_y \overset{def}{=} ((y|\psi_1)_e, \dots, (y|\psi_r)_e),$$

$$L_\lambda \overset{def}{=} (L_F - \lambda 1_H)^{-1}, \; Z_\lambda \overset{def}{=} (\Gamma_1 L_\lambda)^*, \; M(\lambda) \overset{def}{=} \Gamma_1 Z_\lambda, \; \lambda < 0.$$

Відомо [11], що $M(\lambda)$ є функцією Вейля оператора L_0 /у сенсі [3] /, яка відповідає п.г.з. $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$. Крім цього, з праць [3, 11, 13] випливає, що

$$\lim_{\lambda \to -\infty} M(\lambda)^{-1} = 0, \quad M(0) = 0. \qquad /1/$$

Приймемо, що $\psi_c^0 = \sum_{i=1}^{r} c_i \psi_i$, де $c = (c_1, \dots, c_r) \in \mathbb{C}^r$, $R(\psi^0) = sp\{\psi_1, \dots, \psi_r\}$. Відомо [9, 10], що $D(L_{max}) = D(L_0^*) \dot{+} R(\psi^0)$. Позначимо через Q проектор $D(L_{max}) \to D(L_0^*)$, що відповідає цьому розкладові, а через $\mathcal{P}$ – проектор $H_e \dot{+} \ker L_0^* \to H_e$ паралельно $\ker L_0^*$ і вважатимемо, що

$$\Gamma_3 y \overset{def}{=} -(\alpha_1(y), \dots, \alpha_r(y)), \quad \Gamma_4 y \overset{def}{=} \Psi \mathcal{P} y$$

/де функціонали α_i визначаються з умови $Qy = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(y) \psi_i$),

$$\hat{\Gamma}_1 y \overset{def}{=} (\Gamma_1 y, \Gamma_3 y), \; \hat{\Gamma}_2 y \overset{def}{=} (\Gamma_2 y, \Gamma_4 y), \; y \in D(L_{max})$$

/тут вважається, що оператори Γ_1, Γ_2 продовжені з $D(L_0^*)$ на $D(L_{max})$ по лінійності нулем на $R(\psi^0)$).

Відомо [9, 10], що $(\mathbb{C}^{m+r}, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2)$ – п.г.з. /у сенсі [1, 5] оператора L_{min}. Метою роботи є побудова функції Вейля $\hat{M}(\lambda)$ [3] оператора L_{min}, яка відповідає цьому п.г.з., і визначення для неї аналогів співвідношень /1/.

2. Позначимо через $\hat{Z}_\lambda(a,c)$ $(a \in \mathbb{C}^m, c \in \mathbb{C}^r)$ розв"язок рівняння $L_{max} y = \lambda y$ такий, що

$$\Gamma_2 y = a, \quad \Gamma_4 y = c. \qquad /2/$$

Оскільки $L_0^* Z_\lambda = \lambda Z_\lambda$ і $\Gamma_2 Z_\lambda a = a$ $(a \in \mathbb{C}^m)$, то

$$y = \hat{Z}_\lambda(a,c) = Z_\lambda \tilde{a} + \lambda L_\lambda \Psi^0 \tilde{c} + \Psi^0 \tilde{c}, \qquad /3/$$

де $\tilde{a} \in \mathbb{C}^m$, $\tilde{c} \in \mathbb{C}^r$ вибираємо виходячи з умови /2/. Як показують безпосередні обчислення:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{F}(\lambda)^{-1}\psi(\lambda) & \mathcal{F}(\lambda)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \qquad /4/$$

де

$$\mathcal{F}(\lambda) = (\lambda \Psi L_\lambda \Psi^0 + \Psi \Psi^0, \ \Psi(\lambda) = \Psi(Z_\lambda - Z_0). \qquad /5/$$

Виходячи з /4/ і /5/ та зі співвідношення $\hat{M}(\lambda) = \hat{\Gamma}_1 \hat{Z}_\lambda$ [8, 11], отримуємо:

<u>Теорема</u>.

$$\hat{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) & \psi(\lambda)^* \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi(\lambda) & \mathcal{F}(\lambda) \end{pmatrix}^{-1}. \qquad /6/$$

<u>Наслідок 1.</u>

$$\hat{M}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\psi\psi^0)^{-1} \end{pmatrix}. \qquad /7/$$

<u>Наслідок 2.</u>

$$\hat{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi(\lambda) & \mathcal{F}(\lambda) \end{pmatrix}^{*-1} \begin{pmatrix} M(\lambda) & 0 \\ 0 & -\mathcal{F}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi(\lambda) & \mathcal{F}(\lambda) \end{pmatrix}^{-1}. \qquad /8/$$

<u>Наслідок 3.</u>

$$\hat{M}(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} M(\lambda)^{-1} & M(\lambda)^{-1}\psi(\lambda)^* \\ \psi(\lambda)M(\lambda)^{-1} & \psi(\lambda)M(\lambda)^{-1}\psi(\lambda)^* - \mathcal{F}(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad /9/$$

<u>Твердження.</u>

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \hat{M}(\lambda)^{-1} = 0. \qquad /10/$$

<u>Доведення.</u> Співвідношення $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \Psi(\lambda) M(\lambda)^{-1} = 0$ випливає з оцінки $\| \Psi(\lambda) M(\lambda)^{-1} a \| \le \| \Psi \| \cdot \| \lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda M(\lambda)^{-1} a \|$ і рівності $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \| \lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda M(\lambda)^{-1} a \| = 0$, у справедливості якої неважко переконатися, якщо в очевидній тотожності $\| \lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda b \|^2 - \lambda \| Z_\lambda b \|^2 = -(M(\lambda) b \mid b)$ прийняти $b = M(\lambda)^{-1} a$ і використати першу з умов /1/.

Із нерівності

$$\| (\lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda) M(\lambda)^{-1} (\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}) g \|^2 \le$$

$$\le \| (\lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda) M(\lambda)^{-1} (\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}) g \| \cdot \| g \|$$

випливає, що $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(\lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda) M(\lambda)^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}) = 0$,
а отже, й $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\psi(\lambda) M(\lambda)^{-1}\psi(\lambda)^* = 0$.

Нарешті, співвідношення $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\mathcal{F}(\lambda) = 0$ випливає з рівності $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} L_F^{-1/2}(\lambda L_\lambda + 1_H) L_F^{-1/2} = 0$, яка є безпосереднім наслідком рівності $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\lambda L_\lambda = -1_H$.

3. Висновки:

а/ $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(\hat{M}(\lambda) - \hat{M}(0))^{-1} = 0;$ /II/

б/ з /II/ та результатів праць [3, II] випливає, що жорстке розширення оператора L_{min} та м"яке розширення оператора L_{min} - це звуження оператора L_{max}, які визначаються умовами

$$\hat{\Gamma}_2 y = 0$$

та відповідно

$$\hat{\Gamma}_1 y - \hat{M}(0)\hat{\Gamma}_2 y = 0.$$

I. Брук В.М. О расширениях симметрических отношений // Мат. заметки. 1977. Т.22. № 6. С.825-834. 2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К., 1984. 3. Деркач В.А., Маламуд М.М. Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. Донецк, 1985. /Препринт/АН УССР. ДонФТИ; 85-9/. 5. Кочубей А.Н. О характеристических функциях симметрических операторов // Изв. АН Арм ССР. Математика. 1980. № 3. С.218-232. 4. Кочубей А.Н. О расширениях положительно определенного оператора // ДАН УССР. Сер. А. 1979. № 3. С.168-171. 6. Крейн М. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов // Мат. сб. 1947. Т.20. С.431-498. 7. Левитан Б.М., Саргсян И.М. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М., 1988. 8. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. К., 1983. 9. Мильо О.Я., Сторож О.Г. Про загальний вигляд максимально акретивного розширення додатно визначеного оператора // Доп. АН УРСР. 1991. № 6. С.19-22. 10. Мильо О.Я. Умови самоспряженості та максимальної акретивності диференціального оператора Штурма-Ліувілля на проміжку з інтегральними граничними умовами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.36. С.34-38. II. Сторож О.Г. Опис деяких класів розширень невід"ємного оператора // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1987. № 10. С.14-16. 12. Штраус А.В. О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т.32. № 1. С.186-207. 13. Штраус А.В. О расширениях полуограниченного оператора // Доп. АН СССР. 1973. Т.211. № 3. С.543-546.

Стаття надійшла до редколегії 12.04.93

УДК 512.21

В.М.Сороківський

ЦІЛІ ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ ЙМОВІРНІСНИХ ЗАКОНІВ ОБМЕЖЕНОГО $l-M$ ІНДЕКСУ

Нехай $F(x)$ - функція розподілу ймовірнісного закону, $\varphi(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} exp(izx)\,dF(x)$ - його характеристична функція, $T(x)=1-F(x)+F(-x)$.

Ціла функція f називається [1] функцією обмеженого $l-M$ індексу, якщо існує число $N\in Z_+$ таке, що для всіх $r>0$ і $n\in Z_+$ виконується нерівність

$$\frac{M(r,f^{(n)})}{n!\,l^n(|z|)}\leqslant \max\left\{\frac{M(r,f^{(k)})}{k!\,l^k(|z|)}:0\leqslant k\leqslant N\right\},$$

де l - додатна неперервна на $[0,+\infty)$ функція; $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$.

<u>Теорема</u>. Нехай функція l - додатна на $[0,+\infty)$ неперервна диференційована, RO - змінна [3] така, що

$$а/\ \underline{\lim}_{r\to\infty}(rl'(r)/l(r))=s>0,\quad б/\ \overline{\lim}_{r\to\infty}(rl'(r)/l(r))=S<\infty.$$

Для того, щоб ціла характеристична функція $\varphi(z)$ була функцією обмеженого $l-M$ індексу, необхідно і досить, щоб

$$\overline{\lim}_{x\to\infty}\frac{x}{l\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{T(x)}\right)}<\infty.$$

Для доведення теореми використана стандартна методика [1, 2].

1. Абуараби Ш., Шеремета М.Н. Целые функции ограниченного $l-M$ индекса // Докл. АН УССР. Сер. А. 1989. № 11. С.3-5. 2. Винницкий Б.В. Об одном свойстве целых характеристических функций вероятностных законов. // Изв. вузов. Математика. 1975. № 4. С.95-97.

Стаття надійшла до редколегії 11.05.93

УДК 539.3

Д.В.Грилицький, Б.М.Стасюк

СТАЦІОНАРНА ТЕПЛОВА ЗАДАЧА ТЕРТЯ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ СКІНЧЕННОЇ ШИРИНИ

Нехай маємо пакет, що складається з двох пластин скінченної ширини l та скінченної висоти H_1 і H_2 відповідно. Уздовж осі Oz пластини нескінченні /рис. 1/. Вважаємо, що механічні і теплові характеристики пластин різні і не залежать від температури. Контакт між пластинами такий, що відставання неможливе. Пакет перебуває в умовах плоскої деформації. Бічна поверхня пластин вільна від зовнішнього навантаження. Між пластинами пакета діє притискне навантаження P_0, що має розмірність напружень. Нижня основа пакета жорстко закріплена. Друга пластина лежить на першій і рухається по ній рівномірно зі швидкістю V_0. На площині контакту пластин за рахунок сил тертя відбувається процес стаціонарного теплоутворення. Потрібно визначити розподіл температурного поля і теплового потоку в пакеті за умови, що між складовими пакета існує неідеальний тепловий контакт, а з бічних поверхонь, верхньої та нижньої основ пакета відбувається тепловіддання у зовнішнє середовище. Для розв"язування задачі виберемо декартову систему координат так, як показано на рис. 1.

Запишемо граничні та контактні умови:

$$
\begin{aligned}
&y=H_2: \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial y}+h_2\theta_2=h_2T_2; \\
&y=-H_1: \quad \frac{\partial\theta_1}{\partial y}-h_1\theta_1=-h_1T_1; \\
&y=0: \quad \lambda_1\frac{\partial\theta_1}{\partial y}-\lambda_2\frac{\partial\theta_2}{\partial y}=fV_0P_0; \\
&\qquad \lambda_1\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\theta_2}{\partial y}+h(\theta_1-\theta_2)=0; \\
&x=0: \quad \frac{\partial\theta_k}{\partial x}-h_0\theta_k=-h_0T_0; \\
&x=l: \quad \frac{\partial\theta_k}{\partial x}+h_l\theta_k=h_lT_l; \qquad (k=1,2)
\end{aligned}
\qquad /1/
$$

* Робота виконана при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.

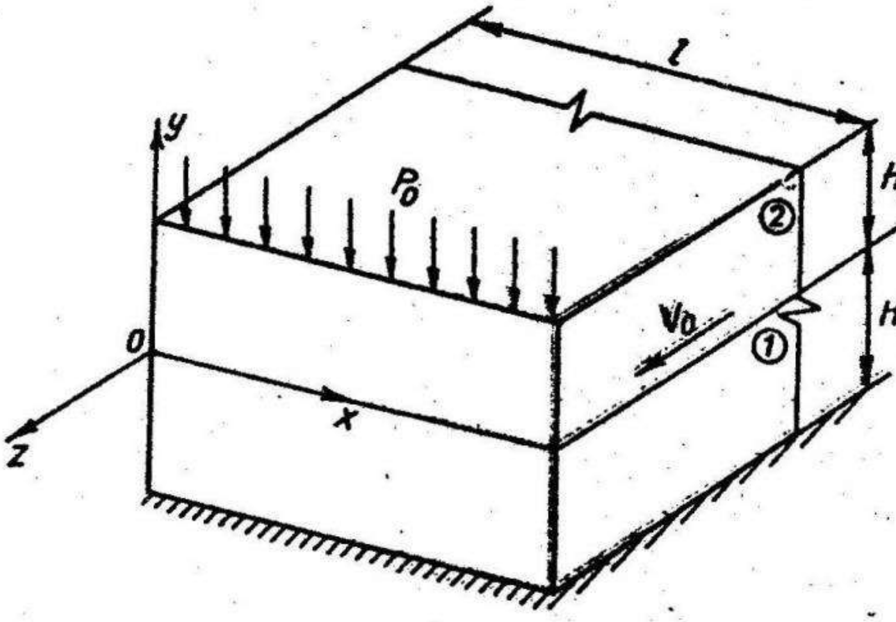


Рис. I.

де $\theta_1(x,y)$, $\theta_2(x,y)$ – температура відповідно першої та другої пластини; h_1, h_2, h_0, h_l – коефіцієнти відносного тепловіддання на нижній, верхній основах та на торцях; T_1, T_2, T_0, T_l – температура навколишнього середовища на нижній, верхній основах та на торцях; λ_1, λ_2 – коефіцієнти теплопровідності; h – термічна провідність площини контакту; f – коефіцієнт тертя.

Поставлена задача зводиться до побудови розв"язку рівняння стаціонарної теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial y^2} = 0 \qquad (k=1,2); \qquad /2/$$

за граничних та контактних умов / I/. Для побудови розв"язку цієї задачі застосуємо інтегральне перетворення зі скінченними межами*. Однорідності граничних умов на торцях досягнемо за допомогою співвідношення:

$$\theta_k(x,y) = C_1 x + C_2 + t_k(x,y); \qquad (k=1,2) \qquad /3/$$

де $t_k(x,y)$ – нова невідома функція; C_1, C_2 – деякі константи. Умови на торцях будуть однорідними, якщо

$$C_1 = \frac{h_0 h_l (T_l - T_0)}{h_0 + h_0 h_l \cdot l + h_l}; \quad C_2 = \frac{h_l T_l + h_0 T_0 + h_0 h_l T_l \cdot l}{h_0 + h_0 h_l \cdot l + h_l}. \qquad /4/$$

---

* Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., 1962. 767 с.

Підставляючи /3/ в /1/, /2/, маємо

$$\frac{\partial^2 t_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_k}{\partial y^2} = 0; \qquad (k=1,2) \qquad /5/$$

$$x=0: \frac{\partial t_k}{\partial x} - h_0 t_k = 0; \quad x=l: \frac{\partial t_k}{\partial x} + h_0 t_k = 0; \qquad /6/$$

$$y=H_2: \frac{\partial t^2}{\partial y} + h_2 t_2 = \varphi_2(x); \quad y=-H_1: \frac{\partial t_1}{\partial y} - h_1 t_1 = \varphi_1(x); \qquad /7/$$

$$y=0: \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} = V_0 f P_0; \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} + h(t_1 - t_2) = 0; \qquad /8/$$

де $\varphi_1(x) = h_1(c_1 x + c_2 - T_1)$; $\varphi_2(x) = h_2(T_2 - c_1 x - c_2)$. Ядро прямого перетворення визначається за формулою

$$\hat{K}_n(x) = \frac{K_n(x)}{R_n}; \qquad /9/$$

$$K_n(x) = \cos\mu_n x + \frac{h_0}{\mu_n}\sin\mu_n x; \qquad /10/$$

$$R_n = \int_0^l K_n^2(x)dx = \frac{\mu_n^2 + h_0^2}{2\mu_n^2} \cdot l + \frac{h_0}{\mu_n^2}\sin^2\mu_n l + \frac{1}{4\mu_n}\left(1 - \frac{h_0^2}{\mu_n^2}\right)\sin 2\mu_n l. \qquad /11/$$

Власні значення μ_n знаходимо з рівняння

$$tg\,\mu_n l = \frac{\mu_n(h_0 + h_l)}{\mu_n^2 - h_0 h_l}. \qquad /12/$$

Застосовуючи інтегральне перетворення з ядром /9/ до рівняння /5/ та умов /7/, /8/, одержуємо

$$\frac{\partial^2 \bar{t}_k}{\partial y^2} - \mu_n^2 \bar{t}_k = 0; \qquad (k=1,2) \qquad /13/$$

$$y=H_2: \frac{d\bar{t}_2}{\partial y} + h_2 \bar{t}_2 = \bar{\varphi}_n^{(2)}; \quad y=-H_1: \frac{d\bar{t}_1}{\partial y} - h_1 \bar{t}_1 = \bar{\varphi}_n^{(1)}; \qquad /14/$$

$$y=0: \lambda_1 \frac{d\bar{t}_1}{dy_1} - \lambda_2 \frac{d\bar{t}_2}{dy} = \bar{\varphi}_n; \quad \lambda_1 \frac{d\bar{t}_1}{dy} + \lambda_2 \frac{d\bar{t}_2}{dy} + h(\bar{t}_1 - \bar{t}_2) = 0, \qquad /15/$$

де $\bar{\varphi}_n^{(1)} = \frac{1}{R_n}\int_0^l \varphi_1(x)K_n(x)dx$; $\bar{\varphi}_n^{(2)} = \frac{1}{R_n}\int_0^l \varphi_2(x)K_n(x)dx$;

$$\bar{\varphi}_n = \frac{V_0 f P_0}{R_n}\int_0^l K_n(x)dx. \qquad /16/$$

Розв"язок рівняння /13/ задається формулою

$$\bar{t}_k(y) - A_{k_n} sh\mu_n y + B_{k_n} ch\mu_n y; \quad (k=1,2) \qquad /17/$$

де сталі A_{k_n} та B_{k_n} , визначаються згідно з умовами /I4/ та /I5/

$$A_{1n}=\frac{\bar{\varphi}_n+\lambda_2\delta_n}{\lambda_1\mu_n+\lambda_2\mu_nF_n}; \quad B_{1n}=\frac{A_{1n}\mathcal{H}_{11}-\bar{\varphi}_n^{(1)}}{\mathcal{H}_{12}}; \qquad /I8/$$

$$A_{2n}=\frac{-\bar{\varphi}_n\cdot F_n+\lambda_1 S_n}{\lambda_1\mu_n+\lambda_2\mu_nF_n}; \quad B_{2n}=\frac{\bar{\varphi}_n^{(2)}-A_{2n}\mathcal{H}_{21}}{\mathcal{H}_{22}};$$

$$\delta_n=\frac{h\mu_n(\bar{\varphi}_n^{(1)}\mathcal{H}_{22}+\bar{\varphi}_n^{(2)}\mathcal{H}_{12})}{\mathcal{H}_{12}(\lambda_2\mu_n\mathcal{H}_{22}+h\mathcal{H}_{21})}; \quad F_n=\frac{\lambda_1\mu_n\mathcal{H}_{12}+h\mathcal{H}_{11}}{\lambda_2\mu_n\mathcal{H}_{22}+h\mathcal{H}_{21}}. \qquad /I9/$$

$$\mathcal{H}_{11}=\mu_n ch\mu_nH_1+h_1 sh\mu_nH_1; \quad \mathcal{H}_{21}=\mu_n ch\mu_nH_2+h_2 sh\mu_nH_2;$$

$$\mathcal{H}_{12}=\mu_n sh\mu_nH_1+h_1 ch\mu_nH_1; \quad \mathcal{H}_{22}=\mu_n sh\mu_nH_2+h_2 ch\mu_nH_2. \qquad /20/$$

Здійснивши обернене перетворення, знаходимо розв"язок задачі для k-ї пластини:

$$\theta_k(x,y)=c_1x+c_2+\sum_{n=1}^{\infty}(A_{k_n}sh\mu_ny+B_{k_n}ch\mu_ny)(\cos\mu_nx+\frac{h_0}{\mu_n}\sin\mu_nx). \quad (k=1,2) \qquad /2I/$$

За законом Фур"є складові вектора густини теплового потоку в k-й пластині дорівнюють

$$q_{x_k}=-\lambda_k\Big(c_1+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_{k_n}sh\mu_ny+B_{k_n}ch\mu_ny)\Big(\frac{h_0}{\mu_n}\cos\mu_nx-\sin\mu_nx\Big)\Big); \qquad /22/$$

$$q_{y_k}=-\lambda_k\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_{k_n}ch\mu_ny+B_{k_n}sh\mu_ny)(\cos\mu_nx+\frac{h_0}{\mu_n}\sin\mu_nx). \qquad /23/$$

З використанням отриманого розв"язку обчислені температурне поле і тепловий потік за таких вхідних даних:
$H_1=0{,}15$ м, $h_1=h_2=20$ м$^{-1}$, $T_1=T_2=T_0=T_l=0$ K, $f=0{,}15$,
$H_2=0{,}1$ м, $h_0=h_l=20$ м$^{-1}$, $P_0=1000$ кН/м^2, $V_0=2$ м/с,
$\lambda_1=\lambda_2=50$ Вт/м·К, $l=0{,}3$ м, $h=1$ кВ/м·К.

Про величину та характер розподілу температурного поля і теплового потоку на основах пластин можна судити з рис. 2,а і рис. 3,а. Розподіл температури і теплового потоку по осі Oy по-

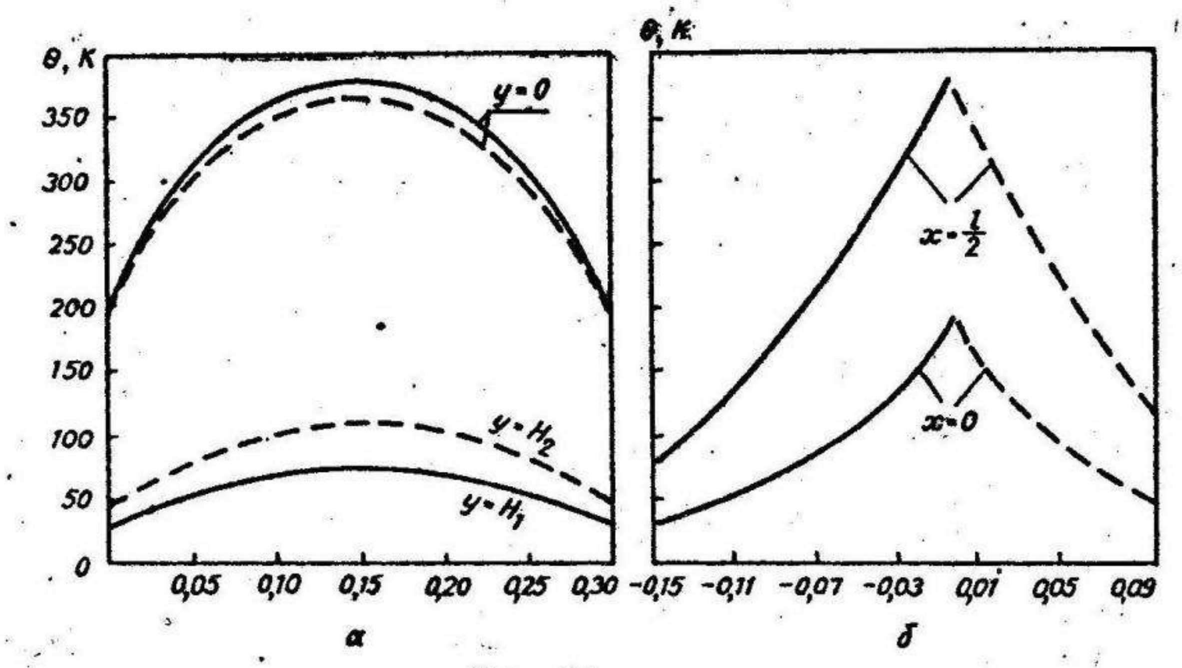

θ, K
350
300
250
200
150
100
50
0
y = 0
y = H₂
y = H₁
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
а
θ, K
x = l/2
x = 0
−0,15
−0,11
−0,07
−0,03
0,01
0,05
0,09
б

Рис. 2.

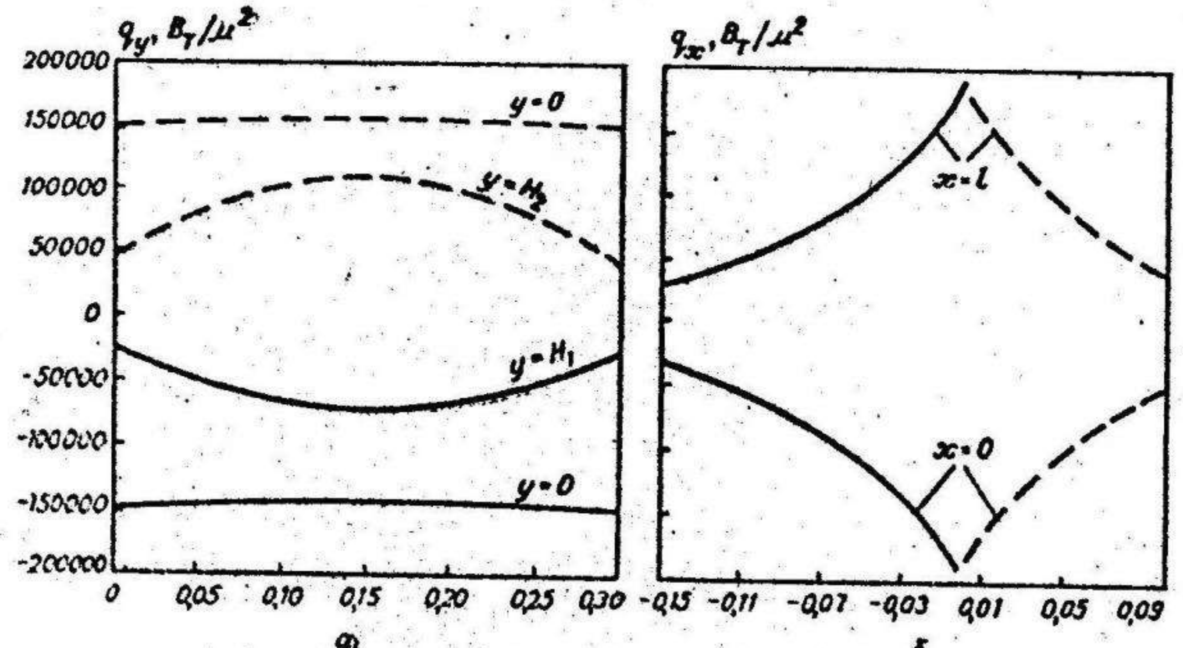

q_y, Вт/м²
200000
150000
100000
50000
0
-50000
-100000
-150000
-200000
y = 0
y = H₂
y = H₁
y = 0
0
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
а
q_x, Вт/м²
x = l
x = 0
-0,15
-0,11
-0,07
-0,03
0,01
0,05
0,09
б

Рис. 3.

даний відповідно на рис. 2, б і рис. 3,б. На обох рисунках суцільною лінією позначені графіки, що стосуються до першої пластини, а штриховою – другої.

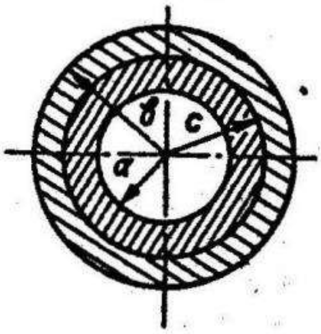
Стаття надійшла до редколегії 10.06.93

УДК 539.3

Д.В.Гриліцький, Ю.І.Мандзик

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ І ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ДВОШАРОВОГО ОРТОТРОПНОГО ЦИЛІНДРА ЗА ФРИКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ*

Розглянемо контактну взаємодію двошарового круглого порожнистого циліндра. Один пустотілий круглий циліндр з внутрішнім радіусом $r'=a$ і зовнішнім радіусом $r'=c$ вставлений у такої ж форми другий циліндр із внутрішнім радіусом $r'=c$ та зовнішнім радіусом $r'=b$ /див. рисунок/.



Матеріали складових пакета є циліндрично-ортотропними. На обох бічних поверхнях задаються радіальні переміщення чи радіальні напруження або ж на одній бічній поверхні задаються радіальні переміщення, а на другій – радіальні напруження. Допустимо, що один з циліндрів обертається відносно іншого з малою кутовою швидкістю ω.

* Робота виконана при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.

За рахунок дії сил тертя, що виникають на стичних поверхнях циліндрів, відбувається стаціонарне теплоутворення. Вважаємо, що між бічними поверхнями пакета та зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона, і тепловий контакт циліндрів є неідеальним. За прийнятих допущень визначимо в тілах температурні поля і теплові потоки, напруження та переміщення, зокрема тиск, що виникає між циліндрами. Оскільки поставлена задача є плоскою та осесиметричною, то всі шукані характеристики будуть функціями лише радіальної координати r'.

Наведемо основні співвідношення, якими користуватимемось у процесі побудови розв"язку задачі [1, 2]. Для зручності введемо безрозмірну змінну r: $r'=br$, де $a/b \leq r \leq 1$.

У подальших формулах параметр i може набувати значення 1 або 2 залежно від того, у якому циліндрі визначається шукана характеристика.

Рівняння теплопровідності:

$$d^2_{rr} t_i + r^{-1} d_r t_i = 0 . \qquad /1/$$

Залежності між деформаціями та переміщеннями:

$$e_r = \frac{1}{b} d_r u_r ; \quad e_\theta = \frac{1}{b} \frac{u_r}{r} . \qquad /2/$$

Співвідношення закону Гука з урахуванням температурних членів:

$$e_r = \beta_{11} \sigma_r + \beta_{12} \sigma_\theta + \beta_1 t; \quad e_\theta = \beta_{12} \sigma_r + \beta_{22} \sigma_\theta + \beta_2 t . \qquad /3/$$

Коефіцієнти β_{ij} /у випадку плоскої деформації/ визначаються за формулами

$$\beta_{ij} = a_{ij} - (a_{i3} a_{j3})/a_{33} ; \quad \beta_i = \alpha_i - (\alpha_3 a_{i3})/a_{33} ;$$

де a_{ij} – компоненти тензора пружних податливостей матеріалу, α_i – коефіцієнти лінійного теплового розширення.

Розв"язавши рівняння /3/ відносно напружень, отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)^{-1} [\beta_{22} e_r - \beta_{12} e_\theta - (\beta_1 \beta_{22} - \beta_{12} \beta_2) t]; \\ \sigma_\theta &= (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)^{-1} [\beta_{11} e_\theta - \beta_{12} e_r - (\beta_2 \beta_{11} - \beta_{12} \beta_1) t]. \end{aligned} \qquad /4/$$

Рівняння термопружності

$$d^2_{rr} u_r^{(i)} + r^{-1} d_r u_r^{(i)} - k_i^2 r^{-2} u_r^{(i)} = b(\delta_1^{(i)} d_r t_i + \delta_2^{(i)} r^{-1} t_i), \qquad /5/$$

де
$$k_i^2=\beta_{11}^{(i)}(\beta_{22}^{(i)})^{-1};\ \delta_1^{(i)}=(\beta_1^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-\beta_2^{(i)}\beta_{12}^{(i)})(\beta_{22}^{(i)})^{-1};$$
$$\delta_2^{(i)}=(\beta_1^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-\beta_2^{(i)}\beta_{12}^{(i)}-\beta_2^{(i)}\beta_{11}^{(i)}+\beta_1^{(i)}\beta_{12}^{(i)})(\beta_{22}^{(i)})^{-1}.$$

Механічні умови
$$\begin{aligned} r=a/b:&\ \sigma_r^{(1)}=-p_1 \quad \text{або} \quad u_r^{(1)}=\varepsilon_1,\\ r=c/b:&\ \sigma_r^{(1)}=\sigma_r^{(2)}=-p \quad \text{або} \quad u_r^{(1)}=u_r^{(2)},\\ r=1:&\ \sigma_r^{(2)}=-p_2 \quad \text{або} \quad u_r^{(2)}=-\varepsilon_2. \end{aligned} \qquad /6/$$

Теплофізичні умови
$$\begin{aligned} r=a/b:&\ \tfrac{1}{b}d_r t_1-\gamma_1 t_1=-\gamma_1 T_{1c};\ r=1:\ \tfrac{1}{b}d_r t_2+\gamma_2 t_2=\gamma_2 T_{2c},\\ r=c/b:&\ \lambda_1\tfrac{1}{b}d_r t_1-\lambda_2\tfrac{1}{b}d_r t_2-\omega pcf=0,\\ &\ \lambda_1\tfrac{1}{b}d_r t_1+\lambda_2\tfrac{1}{b}d_r t_2+h(t_1-t_2)=0. \end{aligned} \qquad /7/$$

В умовах /6-7/ введені позначення: γ_i - відносні коефіцієнти теплообміну; λ_i - коефіцієнти теплопровідності в радіальному напрямі; f - коефіцієнт тертя; h - термічна провідність поверхні контакту циліндрів; ωpcf - робота сил тертя, що витрачається на нагрівання циліндрів; p - тиск між циліндрами; ε_i - задані радіальні зміщення; ω - кутова швидкість; T_{1c} - температура зовнішнього середовища всередині пакета; T_{2c} - температура зовнішнього середовища ззовні пакета.

Отже, поставлена задача звелася до побудови розв"язків диференціальних рівнянь /I/, /5/, за умов /6/, /7/.

Зінтегруємо рівняння теплопровідності /I/, враховуючи теплофізичні умови /7/. Якщо проробити відповідні викладки, то в результаті матимемо такі співвідношення для температури у двошаровому пакеті:
$$t_i(r)=c_i\ln r+d_i, \qquad /8/$$
де
$$c_i=(T_{2c}-T_{1c})\frac{h}{F}S_i+(-1)^{i+1}\omega fcp\,N_i,$$
$$d_i=T_{1c}L_i+T_{2c}(1-L_i)+\omega fcp\,M_i.$$

Тут введені позначення:
$$S_1=\lambda_2\lambda_1^{-1};\quad S_2=1;$$
$$N_1=\lambda_1^{-1}[c-\lambda_2F^{-1}(1+\frac{hc}{\lambda_1}(\frac{1}{a\gamma_1}+\ln\frac{c}{a}))],$$
$$N_2=\frac{1}{F}(1+\frac{hc}{\lambda_1}(\frac{1}{a\gamma_1}+\ln\frac{c}{a})),$$
$$L_1=1-\lambda_2\lambda_1^{-1}\frac{h}{\gamma_1F}(\frac{1}{a}-\gamma_1\ln\frac{a}{b}),\quad L_2=\frac{h}{Fb\gamma_2}, \qquad /9/$$

$$M_1=\frac{1}{\lambda_1\gamma_1}\Big(\frac{1}{a}-\gamma_1\ln\frac{a}{b}\Big)\Big(c-\lambda_2F^{-1}\Big[1+\frac{hc}{\lambda_1}\Big(\frac{1}{a\gamma_1}+\ln\frac{c}{a}\Big)\Big]\Big),$$
$$M_2=\frac{1}{F\gamma_2 b}\Big(1+\frac{hc}{\lambda_1}\Big(\frac{1}{a\gamma_1}+\ln\frac{c}{a}\Big)\Big).$$
$$F=2\lambda_2c^{-1}+h\Big(\frac{1}{\gamma_2 b}+\ln\frac{b}{c}+\lambda_2\lambda_1^{-1}\Big(\frac{1}{a\gamma_1}+\ln\frac{c}{a}\Big)\Big).$$

Як бачимо, коефіцієнти c_i та d_i, а отже, й температурні поля в циліндрах, лінійно залежать від тиску p між циліндрами.

Перейдемо до побудови розв"язку задачі термопружності, тобто до знаходження переміщень $u_r^{(i)}$ та напружень $\sigma_r^{(i)}$ в циліндрах. Зінтегрувавши рівняння термопружності /5/, отримаємо

$$u_r^{(i)}(r)=A_i^*r^{k_i}+B_i^*r^{-k}+A_i(r)r^{k_i}+B_i(r)r^{-k_i}, \qquad /10/$$

де

$$A_i(r)=b\big[c_i\varphi_-^{(i)}+d_i\chi_-^{(i)}\big]\big(r^{1-k_i}-a_i^{1-k_i}\big)+$$
$$+bc_i\chi_-^{(i)}\big[r^{1-k_i}\ln r-a_i^{1-k_i}\ln a_i\big];$$
$$B_i(r)=b\big[c_i\varphi_+^{(i)}+d_i\chi_+^{(i)}\big]\big(r^{1+k_i}-a_i^{1+k}\big)+$$
$$+bc_i\chi_+^{(i)}\big[r^{1+k_i}\ln r-a_i^{1+k_i}\ln a_i\big].$$

тут $\varphi_\pm^{(i)}=\pm(2k_i(1+k_i))^{-1}((1\pm k_i)^{-1}\delta_2^{(i)}-\delta_1^{(i)});\ \chi_\pm^{(i)}=\mp(2k_i(1\pm k_i))^{-1}\delta_2^{(i)}$

$$(i=1,2;\ a_1=a/b,\ a_2=c/b).$$

За формули /4/, використавши /2/ та /10/, знайдемо $\sigma_r^{(i)}(r)$

$$\sigma_r^{(i)}(r)=\big(\beta_{11}^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-(\beta_{12}^{(i)})^2\big)^{-1}\Big[\frac{1}{b}(A_i^*+A_i(r))(k_i\beta_{22}^{(i)}-\beta_{12}^{(i)})r^{k_i-1}-$$
$$-\frac{1}{b}(B_i^*+B_i(r))(k_i\beta_{22}^{(i)}+\beta_{12}^{(i)})r^{-k_i-1}-(\beta_1^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-\beta_{12}^{(i)}\beta_2^{(i)})t_i\Big]. \qquad /11/$$

Сталі інтегрування A_i^* та B_i^* $(i=1,2)$ знайдуться з відповідних граничних та контактних умов /6/. Граничні умови на радіальні напруження або радіальні переміщення при $r=a/b$ і $r=1$ задамо в таких чотирьох варіантах:

$$1^\circ\ \sigma_r^{(1)}\Big(\frac{a}{b}\Big)=-p_1\ \text{ і }\ \sigma_r^{(2)}(1)=-p_2;\quad 2^\circ\ u_r^{(1)}\Big(\frac{a}{b}\Big)=\varepsilon_1\ \text{ і }\ u_r^{(2)}(1)=-\varepsilon_2; \qquad /12/$$
$$3^\circ\ \sigma_r^{(1)}\Big(\frac{a}{b}\Big)=-p_1\ \text{ і }\ u_r^{(2)}(1)=-\varepsilon_2;\quad 4^\circ\ u_r^{(1)}\Big(\frac{a}{b}\Big)=\varepsilon_1\ \text{ і }\ \sigma_r^{(2)}(1)=-p_2.$$

Зробивши відповідні обчислення, отримаємо два варіанти граничних умов.

Перший варіант граничних умов:

$$A_1^*=(\Omega_1^{(1)}(a))^{-1}(\eta_1^{(1)}\alpha_2^*(c)-\eta_2^{(1)}\alpha_2^*(a)),$$
$$B_1^*=(\Omega_1^{(1)}(a))^{-1}(\eta_2^{(1)}\alpha_1^*(a)-\eta_1^{(1)}\alpha_1^*(c)); \qquad /13/$$

$$A_2^* = (\Omega_1^{(2)}(b))^{-1}(\eta_2^{(2)}\xi_2^*(c) - \eta_1^{(2)}\xi_2^*(1)),$$

$$B_2^* = (\Omega_1^{(2)}(b))^{-1}(\eta_1^{(2)}\xi_1^*(1) - \eta_2^{(2)}\xi_1^*(c)), \qquad /14/$$

де $\Omega_1^{(i)}(r) = X_1^{(i)} X_2^{(i)} (r^{-k_i-1} c^{k_i-1} - r^{k_i-1} c^{-k_i-1});$

$$\Omega_2^{(i)}(r) = -(X_2^{(i)} r^{k_i} c^{-k_i-i} + X_1^{(i)} c^{k_i-1} r^{-k_i}). \qquad /15/$$

Тут при $i=1: r=a$ при $i=2: r=b$.

$\alpha_n^*(r) = (-1)^{n+1} b^{((-1)^n k_1)} X_n^{(1)} r^{((-1)^{n+1} k_1 - 1)}$, де $n=1,2;\ r=a,c$.

$$\xi_1^*(1) = b^{-1} X_1^{(2)}; \quad \xi_1^*(c) = X_1^{(2)} b^{-k_2} c^{k_2-1};$$

$$\xi_2^*(1) = -b^{-1} X_2^{(2)}; \quad \xi_2^*(c) = -b^{k_2} c^{-k_2-1} X_2^{(2)};$$

$$\eta_1^{(1)} = -p_1 Y_1^{(1)} + Y_2^{(1)}(c_1 \ln\frac{a}{b} + d_1); \ \eta_1^{(2)} = -p Y_1^{(2)} + Y_2^{(2)}(c_2 \ln\frac{\varepsilon}{b} + d_2);$$

$$\eta_2^{(1)} = -p Y_1^{(1)} + Y_2^{(1)}(c_1 \ln\frac{c}{b} + d_1) +$$
$$+ b^{k_1} c^{-k_1-1} B_1(\tfrac{\varepsilon}{b}) X_2^{(1)} - b^{-k_1} \varepsilon^{k_1-1} A_1(\tfrac{\varepsilon}{b}) X_1^{(1)};$$

$$\eta_2^{(2)} = -p_2 Y_1^{(2)} + d_2 Y_2^{(2)} + \frac{1}{b}(B_2(1) X_2^{(2)} - A_2(1) X_1^{(2)}).$$

У цих формулах:

$$X_n^{(i)} = k_i \beta_{22}^{(i)} + (-1)^n \beta_{12}^{(i)}; \quad (i=1,2;\ n=1,2).$$

$$Y_1^{(i)} = \beta_{11}^{(i)} \beta_{22}^{(i)} - (\beta_{12}^{(i)})^2; \quad Y_2^{(i)} = \beta_1^{(i)} \beta_{22}^{(i)} - \beta_{12}^{(i)} \beta_2^{(i)}.$$

<u>Другий варіант граничних умов:</u>

$$A_1^* = (\Omega_2^{(1)}(a))^{-1}(\varepsilon_1 \alpha_2^*(c) - \eta_2^{(1)} b^{k_1} a^{-k_1}); \qquad /16/$$

$$B_1^* = (\Omega_2^{(1)}(a))^{-1}(\eta_2^{(1)} b^{-k_1} a^{k_1} - \alpha_1^*(c)\varepsilon_1);$$

$$A_2^* = -(\Omega_2^{(2)}(b))^{-1}((\varepsilon_2 + A_2(1) + B_2(1))\xi_2^*(c) + \eta_1^{(2)});$$

$$B_2^* = (\Omega_2^{(2)}(b))^{-1}((\varepsilon_2 + A_2(1) + B_2(1))\xi_1^*(c) + \eta_1^{(2)}). \qquad /17/$$

Що стосується третього та четвертого варіантів граничних умов, то в цих випадках значення коефіцієнтів A_1^*, B_1^* беремо відповідно з першого та другого варіантів, а значення A_2^*, B_2^* – з другого та першого варіантів.

Зауважимо, що у нас залишився ще не визначеним тиск p між контактуючими циліндрами. Його визначаємо з умови рівності нормальних переміщень $u_z^{(1)}(c/b) = u_z^{(2)}(c/b)$ для кожного з чотирьох варіантів граничних умов. Проробивши відповідні викладки, отримаємо формули, у яких залежно від варіанта граничних умов k /1...4/ беремо такі значення для i та j :

$$(k,i,j): \quad (1,1,1) \quad (2,2,2) \quad (3,1,2) \quad (4,2,1).$$

$$p_k = \frac{V_1^{(i)}\Delta_1^{(i)} + V_2^{(j)}\Delta_2^{(j)} + T_{1c}t_1^* + T_{2c}t_2^*}{Y_1^{(1)}\theta_{i1}(a)(\Omega_i^{(1)}(a))^{-1} - Y_1^{(2)}\theta_{j2}(1)(\Omega_j^{(2)}(b))^{-1} + \omega c f \phi} \qquad /18/$$

де

$$\varphi = M_1 I_2 + N_1 I_1 - (M_1 Z_{12} + N_1 Z_{11})\theta_{i1}(a)(\Omega_i^{(1)}(a))^{-1} + q_j^{(1)} + q_j^{(2)} + q_i^{(3)};$$

$$\Delta_n^{(1)} = p_n; \quad \Delta_n^{(2)} = \varepsilon_n;$$

$$V_1^{(1)} = Y_1^{(1)}\theta_{11}(c)(\Omega_1^{(1)}(a))^{-1}; \quad V_2^{(1)} = -Y_1^{(2)}\theta_{12}(c)(\Omega_1^{(2)}(b))^{-1};$$

$$V_1^{(2)} = -\theta_{11}(c)(\Omega_2^{(1)}(a))^{-1}; \quad V_2^{(2)} = -\theta_{12}(c)(\Omega_2^{(2)}(b))^{-1};$$

$$t_1^* = (L_1 Z_{12} - hS_1 Z_{11} F^{-1})\theta_{i1}(a)(\Omega_i^{(1)}(a))^{-1} - (L_2 - hS_2 F^{-1}\ln\tfrac{c}{b})Y_2^{(2)} \times$$
$$\times \theta_{j2}(1)(\Omega_j^{(2)}(b))^{-1} + hS_1 I_1 F^{-1} - L_1 I_2 + \varphi_j^{(1)} + \varphi_i^{(2)} + \varphi_j^{(3)};$$

$$t_2^* = (L_2 - 1 - hS_2 F^{-1}\ln\tfrac{c}{b})Y_2^{(2)}\theta_{j2}(1)(\Omega_j^{(2)}(b))^{-1} + (L_1 - 1)I_2 - hS_1 I_1 F^{-1} +$$
$$+ \mu_j^{(1)} + \mu_i^{(2)} + \mu_i^{(3)} + \mu_j^{(4)};$$

$$\theta_{11}(r) = \alpha_2^*(r)c^{k_1}b^{-k_1} - \alpha_1^*(r)c^{-k_1}b^{k_1};$$

$$\theta_{12}(1) = \xi_2^*(1)c^{k_2}b^{-k_2} - \xi_1^*(1);$$

$$\theta_{12}(c) = \xi_2^*(c)c^{k_2}b^{-k_2} - \xi_1^*(c)c^{-k_2}b^{k_2};$$

$$\theta_{21} = c^{k_1}a^{-k_1} - a^{k_1}c^{-k_1}; \quad \theta_{22} = c^{k_2}b^{-k_2} - b^{k_2}c^{-k_2};$$

$$I_1 = E_-^{(1)}(c,a)\varphi_-^{(1)} + O_-^{(1)}\chi_-^{(1)} + E_+^{(1)}(c,a)\varphi_+^{(1)} + O_+^{(1)}\chi_+^{(1)};$$

$$I_2 = E_-^{(1)}(c,a)x_-^{(1)} + E_+^{(1)}(c,a)x_+^{(1)};$$

$$q_1^{(1)} = 0; \; q_2^{(2)} = 0; \; q_2^{(3)} = 0;$$

$$q_2^{(1)} = (\theta_{12}(c)J_2 M_2 + (M_2 - N_2\ln\tfrac{c}{b})Y_2^{(2)}\theta_{22} - J_1 N_2\theta_{12}(c))(\Omega_2^{(2)}(b))^{-1};$$

$$q_1^{(2)} = ((M_2 - N_2\ln\tfrac{c}{b})Y_2^{(2)}\theta_{12}(1) - (M_2 Z_{22} - N_2 Z_{21})\theta_{12}(c))(\Omega_1^{(2)}(b))^{-1};$$

$$q_1^{(3)} = ((M_1 + N_1\ln\tfrac{a}{b})Y_2^{(1)}\theta_{11}(c))(\Omega_1^{(1)}(a))^{-1};$$

$$Z_{11}=Y_2^{(1)}\ln\frac{c}{b}+c^{-1}X_2^{(1)}[E_+^{(1)}(c,a)\varphi_+^{(1)}+O_+^{(1)}x_+^{(1)}]-$$
$$-c^{-1}X_1^{(1)}[E_-^{(1)}(c,a)\varphi_-^{(1)}+O_-^{(1)}x_-^{(1)}];$$
$$Z_{12}=Y_2^{(1)}+c^{-1}[X_2^{(1)}E_+^{(1)}(c,a)x_+^{(1)}-X_1^{(1)}E_-^{(1)}(c,a)x_-^{(1)}];$$
$$Z_{22}=Y_2^{(2)}+b^{-1}[X_2^{(2)}E_+^{(2)}(b,c)x_+^{(2)}-X_1^{(2)}E_-^{(2)}(b,c)x_-^{(2)}];$$
$$Z_{21}=b^{-1}X_2^{(2)}[E_+^{(2)}(b,c)\varphi_+^{(2)}-x_+^{(2)}b^{-k_2}c^{k_2+1}\ln\frac{c}{b}]-$$
$$-b^{-1}X_1^{(2)}[E_-^{(2)}(b,c)\varphi_-^{(2)}-x_-^{(2)}b^{k_2}c^{-k_2+1}\ln\frac{c}{b}];$$
$$\psi_1^{(1)}=0;\ \psi_2^{(2)}=0;\ \psi_2^{(3)}=0;\ \psi_2^{(1)}=(hS_2J_1F^{-1}-L_2J_2)\theta_{12}(c)(\Omega_2^{(2)}(b))^{-1};$$
$$\psi_1^{(2)}=-Y_2^{(1)}\theta_{11}(c)(L_1-hS_1F^{-1}\ln\frac{a}{b})(\Omega_1^{(1)}(a))^{-1};$$
$$\psi_1^{(3)}=(Z_{22}L_2-Z_{21}hS_2F^{-1})\theta_{12}(c)(\Omega_1^{(2)}(b))^{-1};$$
$$\mu_2^{(1)}=0;\ \mu_1^{(2)}=0;\ \mu_2^{(3)}=0;\ \mu_1^{(4)}=0;$$
$$\mu_1^{(1)}=((1-L_2)Z_{22}+Z_{21}hS_2F^{-1})\theta_{12}(c)(\Omega_1^{(2)}(b))^{-1};$$
$$\mu_2^{(2)}=((1-L_1)Z_{12}+Z_{11}hS_1F^{-1})\theta_{21}(\Omega_2^{(1)}(a))^{-1};$$
$$\mu_1^{(3)}=[((1-L_1)Z_{12}+Z_{11}hS_1F^{-1})\theta_{11}(a)-(1-L_1+hS_1F^{-1}\ln\frac{a}{b})Y_2^{(1)}\theta_{11}(c)]\times$$
$$\times(\Omega_1^{(1)}(a))^{-1};$$
$$\mu_2^{(4)}=-(hS_2J_1F^{-1}+(1-L_2)J_2)\theta_{12}(c)(\Omega_2^{(2)}(b))^{-1};$$
$$J_1=\varphi_-^{(2)}E_-^{(2)}(b,c)-c\ln\frac{c}{b}[x_-^{(2)}c^{-k_2}b^{k_2}+x_+^{(2)}c^{k_2}b^{-k_2}]+\varphi_+^{(2)}E_+^{(2)}(b,c);$$
$$J_2=x_-^{(2)}E_-^{(2)}(b,c)+x_+^{(2)}E^{(2)}(b,c);$$
$$O_\pm^{(i)}=c^{\mp k_i}(c^{1\pm k_i}\ln\frac{c}{b}-a^{1\pm k_i}\ln\frac{a}{b});\ E_\pm^{(i)}(r,r_1)=r^{\mp k_i}(r^{1\pm k_i}-r_1^{1\pm k_i}).$$

Отже, тиск p між контактуючими циліндрами визначається за формулою /I8/ з урахуванням всіх вище наведених формул.

I. У з д а л е в А.И. Некоторые задачи теплоупругости анизотропного тела. Саратов, I967. I67 с. 2. П о д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., I972. 308 с.

Стаття надійшла до редколегії 05.II.93

УДК 539.3

О.В.Тумашова

РОЗВ"ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО НЕЛІНІЙНУ ДЕФОРМАЦІЮ НЕСКІНЧЕННО ДОВГОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ

При дослідженні деформації циліндричних панелей скінченних розмірів цікаво порівняти одержані результати з розв"язками задачі для нескінченно довгої циліндричної панелі.

Розглянемо нескінченно довгу пологу циліндричну панель радіусом R, серединна поверхня якої належить до системи координат xoy. Вважаємо, що товщина і кривина панелі змінюються по напрямній y. Панель перебуває під дією навантаження $q_y = q$.

Дана задача описується системою звичайних диференціальних рівнянь, яку можна отримати з рівнянь [1, 2], нехтуючи в них похідними по x. Внаслідок деяких перетворень отримуємо розв"язувальну систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь для нескінченно довгої циліндричної панелі в безрозмірному вигляді:

$$\frac{dV^*}{dy^*} = \frac{(1-\nu^2)}{h^*} N_y^* + \frac{K^* w^*}{4} - \frac{1}{2}\vartheta_y^{*2};$$

$$\frac{dw^*}{dy^*} = -\vartheta_y^*; \quad \frac{d\vartheta_y^*}{dy^*} = \frac{12(1-\nu^2)}{h^{*3}} M_y^*;$$

$$\frac{dN_y^*}{dy^*} = 0; \quad \frac{dQ_y^*}{dy^*} = -\frac{N_y^* K^*}{4} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^{*3}} N_y^* M_y^* - \frac{q^*}{16}; \qquad /1/$$

$$\frac{dM_y^*}{dy^*} = Q_y^*;$$

$$N_y^* = \frac{b^2}{E h_0^3} N_y; \qquad M_y^* = \frac{b^2}{E h_0^4} M_y;$$

$$q^* = \frac{(2b)^4}{E h_0^4} q; \qquad Q_y^* = \frac{b^3}{E h_0^4} Q_y;$$

$$V^* = \frac{b}{h_0^2} V; \quad \vartheta_y^* = \frac{b}{h_0} \vartheta_y; \quad w^* = \frac{w}{h_0};$$

$$h^{*} = \frac{h(y)}{h_0}; \quad y^{*} = \frac{y}{b}; \quad K^{*}(y) = \frac{4b^2}{R(y)h_0},$$

де u, v, w – переміщення; ϑ_y – кут повороту; N_y, Q_y, M_y зусилля і моменти; E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона; $h = h(y)$ – товщина; $K = K(y)$ – кривина напрямної; h_0 – товщина у вершині панелі / $y = 0$ /; b – ширина панелі.

Задаємо граничні умови на прямолінійних контурах $y^{*} = \pm 1$ у вигляді

$$W^{*} = N_y^{*} = M_y^{*} = 0. \qquad /2/$$

Таким чином, розв"язок задачі про деформацію гнучких нескінченно довгих неколових циліндричних панелей зі змінною товщиною по напрямній зводиться до розв"язку нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь шостого порядку, граничні умови задаються на прямолінійних контурах панелі.

Розглядаємо два підходи до розв"язку даної задачі: точний розв"язок і розв"язок на основі метода Власова-Канторовича. Спочатку отримуємо точний розв"язок крайової задачі /I/, /2/ для колової нескінченно довгої циліндричної панелі постійної товщини, яка перебуває під дією поверхневого навантаження

$$q^{*} = q_0^{*} \cos \frac{\pi}{2} y^{*}.$$

Диференціюємо друге рівняння системи /I/ по y^{*} і підставляємо в нього третє рівняння. Тоді пропустивши $*$, одержимо

$$\frac{d^2W}{dy^2} = -\frac{12(1-\nu^2)}{h^3} M_y. \qquad /3/$$

Аналогічні перетворення застосовуємо до шостого рівняння і підставляємо в нього п"яте рівняння, внаслідок чого отримуємо

$$\frac{d^2M_y}{dy^2} = -\frac{N_y K}{4} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^3} N_y M_y - \frac{q}{16}. \qquad /4/$$

Диференціюємо /4/ двічі по y і враховуючи, що $N_y = 0$, маємо

$$\frac{d^4W}{dy^4} = \frac{3(1-\nu^2)}{4h^3} q. \qquad /5/$$

Розв"язуючи рівняння /5/, отримуємо значення прогину W: $W = W_0 \cos \frac{\pi}{2} y$, де $W_0 = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4 h^3}$ – амплітудне значення прогину.

Враховуючи симетрію задачі, граничні умови /2/ можна записати у вигляді

$$V = \vartheta_y = Q_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0\,, \qquad /6/$$
$$W = N_y = M_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 1\,.$$

Тоді після деяких перетворень і враховуючи /6/, одержуємо решту розв"язувальних функцій:

$$V = \frac{K_y W_0}{2\pi} \sin\frac{\pi}{2} y - \frac{W_0^2 \pi^2}{16}\left(y - \frac{\sin \pi y}{\pi}\right);$$
$$\vartheta_y = \frac{\pi}{2} W_0 \sin\frac{\pi}{2} y\,; \quad Q_y = -\frac{q_0}{8\pi} \sin\frac{\pi}{2} y\,;$$
$$M_y = \frac{q_0}{4\pi^2} \cos\frac{\pi}{2} y\,.$$

Точний розв"язок крайової задачі /1/, /2/ записуємо для амплітудних значень розв"язувальних функцій у вигляді

$$V = \frac{K_y W_0}{2\pi} - \frac{W_0^2 \pi^2}{16}\,; \quad W_0 = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi 4 h^3} q_0\,;$$
$$\vartheta_{y0} = \frac{\pi}{2} W_0\,; \quad Q_{y0} = -\frac{q_0}{8\pi}\,; \quad M_{y0} = \frac{q_0}{4\pi^2}\,.$$

Щоб отримати розв"язок за методом Власова-Канторовича [2], необхідно розкласти розв"язувальні функції в ряд таким чином, щоб на прямолінійних контурах панелі виконувались граничні умови /2/:

$$\left\{W^{\gamma}, N_y^{\gamma}, M_y^{\gamma}, q^{\gamma}\right\} = \sum_{i=1}^{p} \left\{W_i^{\gamma}, N_{yi}^{\gamma}, M_{yi}^{\gamma}, q_i^{\gamma}\right\} \cos\frac{i\pi}{2} y^{\gamma}\,;$$
$$\left\{V^{\gamma}, \vartheta_y^{\gamma}, Q_y^{\gamma}\right\} = \sum_{i=1}^{p} \left\{V_i^{\gamma}, \vartheta_{yi}^{\gamma}, Q_{yi}^{\gamma}\right\} \sin\frac{i\pi}{2} y^{\gamma}\,. \qquad /7/$$

Розглянемо гнучку пологу нескінченно довгу циліндричну панель постійної товщини, яка перебуває під дією навантаження:

$$q^{\gamma} = q_0^{\gamma} \cos\frac{\pi}{2} y^{\gamma} \qquad -1 \le y^{\gamma} \le 1\,.$$

На прямолінійних контурах виконуються граничні умови /6/. Задачу розв"язуємо за таких параметрів:

$$h^{\gamma} = 1\,; \; K^{\gamma} = 10\,; \; \nu = 0{,}3\,; \; q_0^{\gamma} = 5\,;\, 10\,;\, 20\,.$$

У таблиці наведені амплітудні значення для колового переміщення V при $y^{\gamma} = 1$, отриманих точно і за допомогою метода Власова-Канторовича для $p = 1, 3, 7, 8, 9$, що відповідає кількості утримуваних членів рядів /7/. Як бачимо з таблиці, для розв"язку задачі необхідно взяти дев"ять членів ряду, щоб отримати достатньо точний розв"язок.

q_o^{γ}	Точний розв"язок	Розв"язок за методом Власова-Канторовича				
		$p = 1$	$p = 3$	$p = 7$	$p = 8$	$p = 9$
5	0,6983	0,7874	0,7623	0,7106	0,7030	0,6986
10	1,0090	1,3652	1,1147	1,0655	1,0282	1,0103
20	0,4675	1,8927	0,8906	0,6939	0,5445	0,4728

Наведену оцінку для функції V можна віднести до всіх функцій. На основі цього можна зробити висновок, що для панелей подібного класу, застосовуючи метод Власова-Канторовича, маємо аналогічні результати.

1. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1983. 2. Григоренко Я.М., Тумашова О.В. Напряженно-деформированное состояние гибких цилиндрических панелей с переменными геометрическими параметрами // Прикл. механика. 1989. Т.25. № 5. С.36-45.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.93

УДК 539.3

В.П.Левицький, Р.В.Юринець

ФОКУСУВАННЯ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ І РУХОМІЙ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Уперше принцип максимуму модуля для хвильового скалярного рівняння довів Г.Д.Малюжинець [2]. У праці [1] узагальнені ці теореми для векторних рівнянь термопружності. При цьому вважалося, що рівняння теплопровідності є параболічного типу.

Доведемо існування певних множин у комплексній площині спектрального параметра, при яких маємо принцип максимуму модуля.

Розглянемо рівняння узагальненої термопружності [5]:

$$\Delta t = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{1}{c_q^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2}, \qquad /1/$$

де t - температура; τ - час; a - коефіцієнт теплопровідності; c_q - швидкість поширення тепла; Δ - оператор Лапласа.

У просторі зображень Фур"є по часу рівняння /1/ має вигляд

$$\Delta t^F + \left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right)t^F = 0. \qquad /1'/$$

Другий тип рівнянь, який розглянемо в даній роботі, має вигляд [4]

$$\Delta t = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} - 2\nu\frac{\partial t}{\partial x}, \qquad /2/$$

де ν - кутова швидкість обертання тіла.

У просторі зображень Фур"є по часу рівняння /2/ записуємо як

$$\Delta t^F + b\frac{\partial t^F}{\partial x} + ct^F = 0, \qquad /2'/$$

де позначено

$$b = 2\nu, \quad c \frac{i\omega}{a}. \qquad /3/$$

Визначимо області існування максимуму модуля для розв"язків рівнянь /I/ і /2/. Для цього доведемо лему.

Лема I. Нехай в області G функція t задовольняє рівняння /I'/. Тоді для того, щоб усередині області абсолютна величина функції t не могла мати максимум, необхідно і досить, щоб при $Re\omega > 0$ виконувалось

$$-\frac{A}{2} > Jm\omega > -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + (Re\omega)^2} \quad \text{чи} \quad Jm\omega \geqslant -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + (Re\omega)^2}$$

або при $Re\omega < 0$ виконувалось

$$-\frac{A}{2} < Jm\omega < -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + (Re\omega)^2} \quad \text{чи} \quad Jm\omega \leqslant -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + (Re\omega)^2},$$

де $A = C_q^2/a$.

Доведення. Згідно з працею [2] всередині області G абсолютна величина функції t не має максимуму тоді і лише тоді, коли

$$Jm\left[\left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right)^{1/2}\right] > Re\left[\left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right)^{1/2}\right]. \qquad /4/$$

Позначаючи $\omega = \alpha + i\beta$, отримуємо

$$\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{c_q^2} - \frac{\beta}{a} + i\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{2\alpha\beta}{c_q^2}\right) \equiv \gamma + i\varkappa,$$

де позначено

$$\gamma = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{c_q^2} - \frac{\beta}{a}, \quad \varkappa = \frac{\alpha}{a} + \frac{2\alpha\beta}{c_q^2}. \qquad /5/$$

Використовуючи формулу Муавра, маємо

$$\left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right)^{1/2} = \sqrt{z}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right)\right], \qquad /6/$$

де $z = \sqrt{\gamma^2 + \varkappa^2}$, $\cos\varphi = \gamma/z$.

Підставляючи /6/ в /4/ і враховуючи, що

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}, \quad \cos\varphi = y/z,$$

при $k = 0$ отримуємо

$$\cos\frac{\varphi}{2} < \sin\frac{\varphi}{2} \quad \text{або} \quad \cos\varphi < 0 .$$

Звідси маємо, що $y < 0$.

Аналогічно при $k = 1$ отримуємо $y > 0$.

Отже, умова /4/ виконується при $y > 0$ і $\varkappa < 0$ або $\varkappa > 0$ і $y \leq 0$. Інакше, враховуючи /5/, умова /4/ виконується тоді і тільки тоді, коли α і β задовольняють одну з таких систем:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{c_q^2} - \dfrac{\beta}{a} > 0, \\ \dfrac{\alpha}{a} + \dfrac{2\alpha\beta}{c_q^2} < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{c_q^2} - \dfrac{\beta}{a} \leq 0, \\ \dfrac{\alpha}{a} + \dfrac{2\alpha\beta}{c_q^2} > 0. \end{cases}$$

З першої системи отримуємо

$$\alpha > 0, \ -\frac{A}{2} > \beta > -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4}+\alpha^2} ;$$

$$\alpha < 0, \ -\frac{A}{2} < \beta < -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4}+\alpha^2} ,$$

з другої -

$$\alpha > 0, \ \beta \geq -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4}+\alpha^2} ,$$

$$\alpha < 0, \ \beta \leq -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4}+\alpha^2} ;$$

де $A = c_q^2 / a$ /рис. 1/. Лема доведена.

Переходимо до розгляду рівняння /2/. У рівнянні /2'/ виконуємо заміну $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$, внаслідок чого отримуємо

$$4\frac{\partial^2 t^F}{\partial\xi\partial\eta} + b\frac{\partial t^F}{\partial\xi} + b\frac{\partial t^F}{\partial\eta} + ct^F = 0. \qquad /7/$$

Підстановкою

$$v = e^{\frac{b}{4}(\xi+\eta)} t^F$$

рівняння /7/ зводимо до вигляду

$$\frac{\partial v}{\partial\xi\partial\eta} + v\left(\frac{c}{4} - \frac{b^2}{16}\right) = 0. \qquad /8/$$

Виконуючи в рівнянні /8/ заміну

$$z = i\xi + \eta, \quad \mu = \xi + i\eta$$

і враховуючи позначення /3/, отримуємо рівняння

$$\Delta v + \left(\frac{\omega}{4a} + i\frac{\nu^2}{4}\right) v = 0. \qquad /9/$$

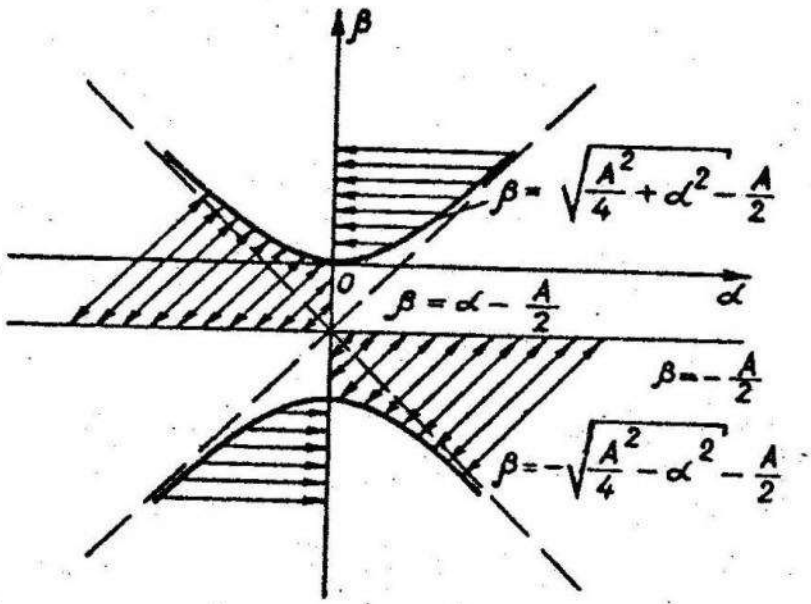


Рис. I.

Лема 2. Нехай в області G функція v задовольняє рівняння /9/. Тоді для того, щоб усередині області абсолютна величина функції v не могла мати максимум, необхідно і досить, щоб $Re\,\omega$ і $Jm\,\omega$ задовольняли умови

$$Re\,\omega \geq 0, \; Jm\,\omega < -a\nu^2 \quad \text{або} \quad Re\,\omega \leq 0, \; Jm\,\omega > -a\nu^2. \qquad /10/$$

Доведення. Згідно з працею [2] в області G абсолютна величина функції v не має максимуму тоді і лише тоді, коли

$$Jm\left[\left(\frac{\omega}{4a} + i\frac{\nu^2}{4}\right)^{1/2}\right] > Re\left[\left(\frac{\omega}{4a} + i\frac{\nu^2}{4}\right)^{1/2}\right]. \qquad /11/$$

Нехай $\omega = \alpha + i\beta$. Тоді

$$\frac{\nu^2}{4}i + \frac{\omega}{4a} = \frac{\alpha}{4a} + i\left(\frac{\beta}{4a} + \frac{\nu^2}{4}\right) \equiv \gamma + i\varkappa,$$

де позначено

$$\gamma = \frac{\alpha}{4a}, \quad \varkappa = \frac{\beta}{4a} + \frac{\nu^2}{4}.$$

За формулою Муавра отримуємо

$$\left(\frac{\omega}{4a} + i\frac{\nu^2}{4}\right)^{1/2} = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right)\right],$$

де

$$r = \sqrt{\gamma^2 + \varkappa^2}, \qquad \cos\varphi = \gamma / r.$$

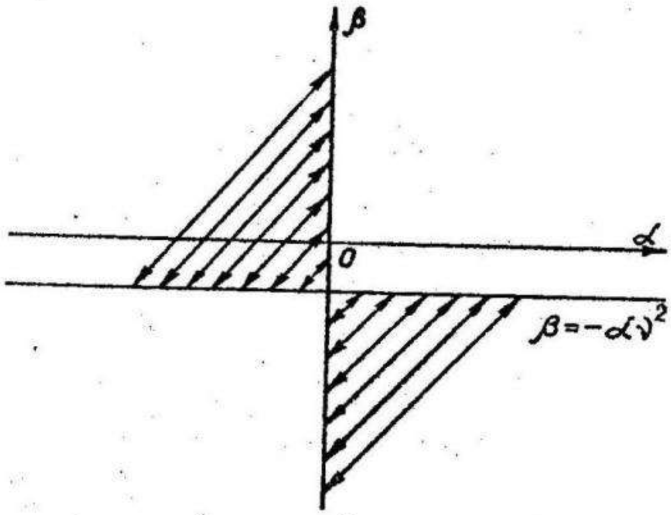


Рис. 2.

Аналогічно, як у лемі 1, задовольняючи умову /12/, при $k = 0$ отримуємо $\gamma < 0$, а при $k = 1$ – $\gamma > 0$, що, враховуючи $Re\omega = 4a\gamma$, $\Im m\,\omega = 4a\varkappa - a\nu^2$, еквівалентне умовам /10/ /рис. 2/. Лема доведена.

Враховуючи заміни, за допомогою яких з рівняння /7/ отримане рівняння /9/, бачимо, що

$$t^F = v(x-y+i(x-y),\, x+y+i(x+y))e^{-\frac{b}{2}x}.$$

Абсолютна величина функції t^F не має максимуму в області G за умови

$$\Delta\,|\,t^F|^2 > 0\,. \qquad /12/$$

Позначимо $v = v_1 + i v_2$. Тоді

$$\Delta|t^F|^2 = \Delta\left|(v_1+iv_2)e^{-\frac{b}{2}x}\right|^2 = e^{-bx}\left[2(v_1\Delta v_1 + v_2\Delta v_2 + \right.$$

$$\left. + |\,grad\, v\,|^2 + b^2(v_1^2+v_2^2) - 2b\frac{\partial}{\partial x}(v_1^2+v_2^2)\,\right].$$

Оскільки

$$v_1\Delta v_1 + v_2\Delta v_2 = -Re\left(\frac{\omega}{4a} + i\frac{\nu^2}{4}\right)|v|^2 \geq 0\,,$$

то бачимо, що для виконання умови /12/ потрібно накласти певні обмеження на функцію t^F, так щоб виконувалась умова

$$b(v_1^2+v_2^2) - 2\frac{\partial}{\partial x}(v_1^2+v_2^2) \geq 0\,.$$

Нехай в області G задана задача незв"язної термопружності в просторі зображень Фур"є по часу [1]

$$\mu\Delta\bar{w}+(\lambda+\mu)\,grad\,div\,\bar{w}-(3\lambda+2\mu)\alpha_t\,grad\,t+$$
$$+\rho\omega^2\bar{w}=F(x); \qquad /13/$$

$$\Delta t+\left(\frac{i\omega}{a}+\frac{\omega^2}{c_q^2}\right)t=Q(x); \qquad /14/$$

$$\bar{w}|_S=\bar{f}_1(x); \qquad /15/$$

$$\frac{\partial t}{\partial n}+kt|_S=T_1(x), \qquad /16/$$

де $\bar{F}(x)\equiv 0$ всюди, крім обмеженої підобласті $G_f=G, \bar{f}_1(x)\equiv 0$, $T_1(x)\equiv 0$, крім обмеженої підобласті $S_f\subset S$. Тут S – поверхня, утворена сім"єю, можливо, нескінченною поверхнями, замкнутими або такими, що збігаються на безмежності/.

Використовуючи лему 1, праці [1-3], можна довести таку теорему.

Теорема. Нехай $\bar{w}^{(1)}, \bar{w}^{(2)}, t^{(1)}, t^{(2)}$ – два розв"язки /9/-/16/ у G. Якщо виконуються умови при $Re\omega=-Jm\omega>\frac{c_q^2}{\sqrt{2}a}$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}|\bar{w}^{(1)}-\bar{w}^{(2)}|=0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}|t^{(1)}-t^{(2)}|=0$,

то $W^{(1)}\equiv W^{(2)}, t^{(1)}\equiv t^{(2)}$.

1. Барен В.П. Принцип максимума модуля для волновых уравнений линейной упругости // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1986. С.25-28. 2. Малюжинец Г.Д. Задача о скачке в теории дифракции // Тр. Акустического ин-та. 1971. Вып. 15. С.140-168. 3. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. М., 1976. 4. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М., 1963. 5. Подстригач Я.С., Коляно Є.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 12.04.93

УДК 539.3:551.243

Г.Т.Сулим

СИЛА, ЩО ДІЄ НА ГВИНТОВУ ДИСЛОКАЦІЮ ПОБЛИЗУ ТОНКОГО ДЕФЕКТУ

Пластичне деформування і руйнування матеріалу біля концентраторів напружень тісно пов"язане з рухом у цій зоні дислокацій. Однією з важливих характеристик, які визначають рухливість дислокацій, є сила, що діє на дислокацію /СДД/. Ця сила докладно вивчена у випадку взаємодії дислокацій зі скінченними та напівбезмежними тріщинами [6-8, 11, 14-17, 19]. Однак взаємодія дислокацій з іншими тонкими неоднорідностями, зокрема абсолютно жорсткими включеннями, досліджена недостатньо [10]. У праці [18] розглянута взаємодія гвинтової дислокації з пружним коловим циліндричним включенням, а також з абсолютно податним /пора/ та абсолютно жорстким еліптичним циліндром. Визначена, зокрема, енергія взаємодії дислокації з прямолінійною щілиною та з жорстким включенням, що дає змогу визначити також СДД. У праці [13] побудований наближений розв"язок задачі про взаємодію дислокацій із включенням і, як приклад, визначене поле напружень і СДД біля пружного еліпсоїда, обертання, зокрема сплющеного або видовженого. У працях [1-3] досліджене поле напружень та узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень біля тонкостінних стрічкових включень за наявності в ізотропному й анізотропному середовищах гвинтових дислокацій, отримані відповідні аналітичні вирази для граничних випадків тріщини й абсолютно жорсткої тонкої плівки /АЖТП/ скінченної та напівскінченної ширини.

За формулою Піча-Келера [4, 5] СДД у точці

$$F_x(z_*)=b\,\tau_{yz}^{*0}(z_*);\quad F_y(z_*)=-b\,\tau_{xz}^{*0}(z_*), \qquad /1/$$

де b – компонента вектора Бюргерса дислокації; індексом « $*0$ » відзначене поле напружень у точці z_* без урахування власного поля напружень від дислокації у цій же точці. Якщо на тіло крім дислокації в точці z_* навантаження не діють, то це є збурене поле напружень. Компоненти напружень визначаються виразом [1, 2]

$$\tau_{yz}^{*0}(z)+i\tau_{xz}^{*0}(z)=-\frac{1}{4\pi}\left[F^-(z)\pm\bar F^-(z)\right],$$

$$F^{\pm}(z)=-\mu b\left[\frac{1}{X(z)}+\frac{1}{z-z_*}\left(\frac{X(z_*)}{X(z)}\pm 1\right)\right],\ X(z)=\sqrt{z^2-a^2}. \qquad /2/$$

Тут і надалі верхній знак стосується тріщини, нижній - АЕТП.

Підставляючи /2/ в /1/ та переходячи до границі $z \to z_*$ при

$$\lim_{z \to z_*} \left[\frac{1}{z - z_*} \left(\frac{X(z_*)}{X(z)} - 1 \right) \right] = \frac{z_*}{a^2 - z_*^2} ,$$

отримуємо

$$F_x - iF_y = -2A \left[-\frac{1 \pm 1}{X(z_*)} - \frac{z_*}{a^2 - z_*^2} \mp \frac{1}{z_* - \bar{z}_*} \left(\frac{X(\bar{z}_*)}{X(z_*)} - 1 \right) \right], \ A = \frac{\mu b^2}{8\pi}. \quad /3/$$

У випадку розташування дислокації на осі абсцис у точці $(x_*, 0)$ $(y_* \to 0)$ за допомогою граничного переходу

$$\lim_{y_* \to 0} \frac{1}{z_* - \bar{z}_*} \left(1 - \frac{X(\bar{z}_*)}{X(z_*)} \right) = \begin{cases} x_* / (x_*^2 - a^2) & (|x_*| > a); \\ x_* / (a^2 - x_*^2) - i / y_* & (|x_*| < a); \end{cases}$$

$$\lim_{y_* \to 0} X(x_*) = \begin{cases} sign(x_*) \sqrt{x_*^2 - a^2} & (|x_*| > a); \\ [\pm] \sqrt{a^2 - x_*^2} & (|x_*| < a), \end{cases}$$

одержуємо

$$F_x - iF_y = -2A \left[-\frac{(1 \pm 1) sign(x_*)}{\sqrt{x_*^2 - a^2}} + \frac{x_* \pm x_*}{x_*^2 - a^2} \right], \ (|x_*| > a)$$

$$F_x - iF_y = -2A \left[[\pm] \frac{(i \pm i)}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} \mp \frac{i}{y_*} + \frac{x_* \mp x_*}{x_*^2 - a^2} \right], (|x_*| < a). \quad /4/$$

Тут і надалі /формули /4/-/8// беремо арифметичне значення кореня, верхній знак у квадратних дужках стосується верхнього краю проміжка $[-a, a]$, нижній - його нижнього краю. Таким чином, для дислокації, яка розміщена на продовженні осі щілини

$$F_x = 4A \left[\frac{sign(x_*)}{\sqrt{x_*^2 - a^2}} - \frac{x_*}{x_*^2 - a^2} \right], \ F_y = 0, \ (|x_*| > a), \quad /5/$$

що збігається з /17/ [15] при $\sigma = n = 0$. Для дислокації на продовженні площини АЕТП $F_x = F_y = 0$ вона нерухома.

Якщо дислокація наближається до берега тріщини, то

$$F_x = 0, \ F_y = F_\theta = 2A \left[\frac{[\pm] 2}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} - \frac{1}{y_*} \right], \ F_r = -\frac{2A}{r}, (|x_*| < a), \quad /6/$$

а з рухом до краю АЕТП

$$F_x = -\frac{4Ax_*}{x_*^2 - a^2}, \ F_y = \frac{2A}{y_*}, \ F_r = 0, \ F_\theta = \frac{2A}{y_*}. \quad /7/$$

Тут крім декартової системи координат у правому вістрі дефекту введена полярна система (r, θ).

Якщо дислокація розташована на осі $y(z_*=(0,y_*))$, то

$$F_x=0,\ F_y=-2A\left[-\frac{(1\pm1)\,sign(y_*)}{\sqrt{y_*^2+a^2}}+\frac{y_*}{y_*^2+a^2}\pm\frac{1}{y_*}\right]. \qquad /8/$$

Коли $a\to\infty$, тоді з формули /8/ чи /6/, /7/ випливає

$$F_x=0;\qquad F_y=\mp 2A/y_* \ - \qquad /9/$$

вираз для СДД у півплощині $y>0$ на відстані y_* від її краю. Верхній знак відповідає вільному краю /див. також [18], /3.17/ [5]/, нижній – жорстко защемленому/див. задачу 3.5 [5] і [18]/. Величина СДД у цих випадках однакова: дислокація відштовхується від защемленої поверхні з такою ж силою, з якою притягується до вільної поверхні.

Випадок напівбезмежного дефекту випливає з виразу /3/, якщо у точку $z=a$ помістити систему координат $\xi=z-a\,(\xi_*=\xi_*^r+i\xi_*^i\equiv$ $\equiv r\exp(i\theta)=z_*-a)$ і перейти до границі $a\to\infty$. Тоді, оскільки $X(\bar z_*)/X(z_*)\to\sqrt{\bar\xi_*/\xi_*}$,

$$F_x-iF_y=-2A\left[\frac{1}{2\xi_*}\pm\frac{1}{\xi_*-\bar\xi_*}\left(1-\sqrt{\frac{\bar\xi_*}{\xi}}\right)\right]. \qquad /10/$$

Звідси для напівбезмежного розрізу

$$F_x-iF_y=-\frac{A}{r}\left[2\cos\frac{2\theta}{2}-i\left(tg\frac{\theta}{2}+\sin\theta\right)\right];\ F_r=-\frac{2A}{r},\ F_\theta=\frac{A\,tg(\theta/2)}{r}, \qquad /11/$$

для напівбезмежного жорсткого включення

$$F_x-iF_y=\frac{A}{r}\left[2\sin\frac{2\theta}{2}-i\left(tg\frac{\theta}{2}-\sin\theta\right)\right];\ F_r=0,\ F_\theta=-\frac{A\,tg(\theta/2)}{r}. \qquad /12/$$

На відміну від тріщини радіальна складова СДД в околі напівбезмежної АЖТП дорівнює нулю, а трансверсальна – дорівнює відповідній силі біля тріщини, але є протилежно скерована. За можливості вільного переміщення дислокація рухається вздовж дуги кола з центром у вершині включення до положення стійкої рівноваги на продовженні площини АЖТП. Від поверхні включення дислокації відштовхуються. Це сприяє емісії дислокації з межі фаз.

Вираз /9/ можна також отримати на підставі /11/ і /12/, якщо взяти до уваги, що $\lim\limits_{r\to\infty}\left(r^{-1}tg\frac{\theta}{2}\right)=\frac{2}{y_*}\ (y_*=\xi_*^i)$.

Потенціальна енергія дислокації, що визначається формулою $U=\int F_r dr-\int r F_\theta\, d\theta$, для напівбезмежного розрізу, приводить до відомого [14] значення $U=2A\ln(r\cos\frac{\theta}{2})$. Для напівбезмежної АЖТП

$$U=-2A\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right). \qquad /13/$$

Енергія дислокації не залежить від її відстані до вершини напівбезмежної АЖТП і визначається лише полярним кутом: на поверхні дефекту енергія необмежено велика, а на його продовженні – нульова.

В анізотропному випадку [3] подібним чином отримуємо

$$\left\{F_x, F_y\right\} = 2A^* Re\left[\left\{1, s^1\right\}\left(\frac{1 \pm 1}{X(z^1_{*1})} + \frac{z^1_{*1}}{a^2-(z^1_{*1})^2} \mp \right.\right.$$

$$\left.\left.\mp \frac{1}{z^1_{*1}-\bar{z}^1_{*1}}\left(1-\frac{X(\bar{z}^1_{*1})}{X(z^1_{*1})}\right)\right)\right], \quad A^* = \frac{b^2}{8\pi|r^1|}. \qquad /14/$$

Для тріщини на її продовженні

$$\left\{F_x, F_y\right\} = 4A^* Re\left[\left\{1, s^1\right\}\left(\frac{\operatorname{sign}(x_*)}{\sqrt{x_*^2-a^2}} - \frac{x_*}{x_*^2-a^2}\right)\right], (|x_*|>a) \qquad /15/$$

/у загальному випадку анізотропії $F_y \neq 0$ /, а на продовженні АЖТП

$$\left\{F_x, F_y\right\} = \left\{0, 0\right\} \quad (|x_*|>a). \qquad /16/$$

Тут, як і в ізотропному випадку, дислокація перебуває у стані стійкої рівноваги.

Із наближенням дислокації до поверхні тріщини

$$\left\{F_x, F_y\right\} = 2A^* Re\left[\left\{1, s^1\right\}\left(\frac{\mp 2i}{\sqrt{a^2-x_*^2}} + \frac{i}{y^1_*}\right)\right], \; y^1_* = s^1_2 y_* = \frac{y_*|r^1|}{a'_{55}}, \qquad /17/$$
$$(|x_*|<a),$$

а з прямуванням до краю АЖТП

$$\left\{F_x, F_y\right\} = 2A^* Re\left[\left\{1, s^1\right\}\left(\frac{2x_*}{a^2-x_*^2} - \frac{i}{y^1_*}\right)\right], \; (|x_*|<a). \qquad /18/$$

При напівбезмежному дефекті

$$\left\{F_x, F_y\right\} = 2A^* Re\left[\left\{1, s^1\right\}\left(\frac{1}{2\xi^1_{*1}} \pm \frac{1}{\xi^1_{*1}-\bar{\xi}^1_{*1}}\left(1-\sqrt{\frac{\bar{\xi}^1_{*1}}{\xi^1_{*1}}}\right)\right)\right] \qquad /19/$$

або

$$\left\{F_x, F_y\right\} = -A^*\left\{\cos\theta_1 \pm 1, \; \frac{a_{45}}{a_{55}}(\cos\theta_1 \pm 1) + \frac{|r^1|}{a_{55}}\left[\sin\theta_1 \pm tg(\theta_1/2)\right]\right\}, \qquad /20/$$
$$\xi^1_{*1} = r_1 \exp(i\theta_1).$$

Якщо $a \to 0$, то оскільки $X(\bar{z}^1_{*1})/X(z^1_{*1}) \to -1$, з /12/ випливає

$$F_x = 0, \quad F_y = \mp \frac{2A^*}{y_*} \quad - \qquad /21/$$

вираз для СДД біля вільної та защемленої межі анізотропної півплощини. Його можна отримати також з подання СДД біля прямолінійної межі поділу матеріалів [9, 12].

Рівність між F_r /формула /9// для напівобмеженої тріщини і силою притягування дислокації вільною поверхнею F_y /формула /7// становить зміст теореми уявних сил [7], що справедлива також для анізотропного випадку. Порівняння формул /7/ і /10/ стосовно жорсткого защемлення межі та АЖТП свідчить про відсутність аналога даної теореми для дефекту цього типу.

1. Божидарник В.В., Сулим Г.Т., Сулим М.В. Упругое равновесие ленточного включения в изотропном массиве под действием сосредоточенных сил и винтовых дислокаций // Вестн. Львов. политехн. ин-та. 1985. Вып. 190. С.13-16. 2. Сулим Г.Т. Антиплоская деформация изотропной среды с тонкими прослойками под воздействием сил, дислокаций и диполей. Львов, 1985. С.20. Рукопись деп. в ВИНИТИ 28.01.85. № 782-85Деп. 3. Сулим Г.Т. Продольный сдвиг анизотропной среды с ленточными включениями. Львов, 1987. С.47. Рукопись деп. в ВИНИТИ 15.01.87. № 329-В87. 4. Косевич А.М. Дислокации в теории упругости. К., 1978. 5. Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М., 1972. 6. Черепанов Г.П. Инициирование микротрещин и дислокаций // Прикл. механика. 1987. Т.23. № 12. С.67-81. 7. Asaro R.J. An image force theorem for a dislocation near a crack in an anisotropic elastic medium // J. Phys. F: Metal. Phys. 1975. Vol.5. №12. P.2249-2255. 8. Atkinson C. The interaction between a dislocation and a crack // Int. J. Fract. Mech. 1966. Vol. 2. №4. P. 567-575. 9. Chou Y.T. On dislocation-boundary interaction in an anisotropic aggregate // Phys. status solidi. 1966. Vol.15. №1. P.123-127. 10. Dundurs J. Elastic interaction of dislocation with inhomogeneities // Mathematical theory of dislocations / Ed. T. Mura. New York, 1969. P. 70-115. 11. Eringen A.C. Interaction of a dislocation with a crack // J. Appl. Phys. 1983. Vol. 54. №12. P. 6811-6821. 12. Head A.K. The dislocation image force in cubic polycrystals // Phys. status solidi. 1965. Vol.10. N2. P. 481-484. 13. Johnson W.C. Interaction of a dislocation with a misfitting precipitate // J. Appl. Phys. 1982. Vol. 53. №12. P. 8620-8638. 14. Lee Sanboh, Burns S.J., Li J.C. Image forces and potential energy of a dislocation around a crack tip // Mater. Sci. and Eng. 1986. Vol. 83. №1. P.65-73. 15. Louat N.P. The interaction of cracks and dislocations. I. Screw dislocations // Proc. 1st Int. Conf. on Fracture. Japan Soc. for the Strength and Fracture of Materials. Sendai. 1965. P. 117-132. 16. Rice J.R., Thomson S.R. Ductile versus behaviour of cristals // The Philos. Mag. 1974. Vol. 29. N1. P.73-97. 17. Shiue Sham-Tsong, Lee Sanboh. A thermodynamic approach to the interaction between dislocation and crack and its application // Eng. Fract. Mech. 1989. Vol. 22. N6. P. 1105-1115. 18. Smith E. The interaction between dislocations and inhomogeneities. I // Int. J. Eng. Sci. 1968. Vol. 6. №3. P. 129-143. 19. Tamate O., Sekine M. Elastic interaction

of a screw dislocation with an interface micro-crack in bimetallic orthotropic media // Technol. Reports Tohoku Univ. 1972. Vol. 37. №1. P. 69-85.

Стаття надійшла до редколегії 06.04.93

УДК 517.956

Л.Я.Шпак

ПРИРОДНІ БАЗОВІ ФУНКЦІЇ ЗА РЕДУКЦІЇ ДО НИЖЧОЇ РОЗМІРНОСТІ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Під час розрахунку фізико-механічних полів оболонок і пластин перехід від тривимірної задачі до двовимірної найчастіше здійснюється методом розкладу шуканих величин по товщині з апріорі заданою базовою системою функцій [4]. У працях [1, 3] запропонований узагальнений підхід до методу розкладу шуканих величин по товщині, за якого не лише коефіцієнти розкладу /моментні характеристики/, але й система базових функцій визначаються як екстремалі функціоналу енергії.

У даній статті обгрунтовується існування таких оптимальних базових функцій на прикладі крайової задачі з рівнянням еліптичного типу.

В обмеженій області $D = D_x D_y$ задається рівняння

$$Lu = f(x,y) \quad x \in D_x \subset R^n, \ \ y \in D_y \subset R^m, \qquad /1/$$

де $L = L_x + L_y$ – лінійний еліптичний оператор другого порядку, зображений у вигляді суми лінійних операторів по відповідних групах змінних x і y. На межі області задані умови:

$$u|_{\partial D_x \times \bar{D}_y} = 0 \quad , \qquad u|_{\bar{D}_x \times \partial D_y} = 0. \qquad /2/$$

Задача /1/-/2/ еквівалентна умові стаціонарності функціоналу енергії $\Phi(u) = \int_D [Lu - 2f] u \, dx dy$.

Під час переходу до задач нижчої розмірності по групах змінних y чи x, згідно із запропонованим в [1] підходом, N-не наближення розв"язку задачі /1/-/2/ шукаємо у вигляді

$$u^N(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(y) \varphi_i(x), \ \ \|\varphi_i(x)\|_{L_2(D_x)} = 1. \qquad /3/$$

Моментні характеристики /коефіцієнти розкладу/ ψ_i та базові функції φ_i знаходимо з умови стаціонарності відповідного функціоналу енергії. Зокрема, для побудови першого наближення базову функцію $\varphi_1(x)$ і відповідну моментну характеристику $\psi_1(y)$ визначаємо як екстремалі функціоналу

$$\Phi_1(\varphi(x),\psi(y)) = \int\limits_{D_x}\int\limits_{D_y}(L_x\varphi(x)\psi(y) + L_y\psi(y)\varphi(x) - 2f)\varphi\psi\,dx\,dy. \qquad /4/$$

З необхідної умови екстремуму такого функціоналу записуємо систему рівнянь для визначення функцій φ_1 і ψ_1 :

$$L_x\varphi_1(x)\int\limits_{D_y}\psi_1^2(y)dy + \varphi_1(x)\int\limits_{D_y}L_y\psi_1(y)\psi_1(y)dy = \int\limits_{D_y}f(x,y)\psi_1(y)dy$$

$$L_y\psi_1(y)\int\limits_{D_x}\varphi_1^2(x)dx + \psi_1(y)\int\limits_{D_x}L_x\varphi_1(x)\varphi_1(x)dx = \int\limits_{D_x}f(x,y)\varphi_1(x)dx \qquad /5/$$

і відповідні граничні умови $\varphi_1|\partial D_x = 0,\ \psi_1|\partial D_y = 0.$

Доведемо існування ненульового розв"язку нелінійної системи рівнянь /5/ у випадку, коли праву частину рівняння /І/ можна зобразити, як

$$f(x,y) = \varkappa_f\varphi^f(x)\psi^f(y),\ \|\varphi^f\| = 1,\ \|\psi^f\| = 1. \qquad /6/$$

Теорема 1. Якщо $f(x,y)$ подана у вигляді /6/, де $\varphi^f \in C(D_x),\ \psi^f \in C(D_y)$, то існують такі функції $\varphi_1 \in C^2(D_x)$, $\psi_1 \in C^2(D_y)$, що задовольняють рівняння системи /5/, відповідні граничні умови і реалізують мінімум функціоналу /4/.

Доведення. Виконуємо заміну змінних

$$\hat\varphi = \frac{\|\psi_1\|^2}{\varkappa_f(\psi^f,\psi_1)}\varphi_1 \qquad \hat\psi = \frac{\|\varphi_1\|^2}{\varkappa_f(\varphi^f,\varphi_1)}\psi_1. \qquad /7/$$

Після заміни система /5/ набуває вигляду

$$L_x\hat\varphi + A\hat\varphi = \varphi^f; \qquad /8/$$

$$L_y\hat\psi + B\hat\psi = \psi^f; \qquad /9/$$

$$A = \frac{(L_y\hat\psi,\hat\psi)}{\|\hat\psi\|^2},\quad B = \frac{(L_x\hat\varphi,\hat\varphi)}{\|\hat\varphi\|^2}. \qquad /10/$$

Із /10/ $A \geq \mu_1$, $B \geq \nu_1$, де ν_1, μ_1 - перші власні значення операторів L_x і L_y відповідно.

Оскільки функція φ^f неперервна, то для кожного фіксованого $A \geq \mu_1$ існує єдиний класичний розв"язок $\hat\varphi = \hat\varphi(x,A)$ рівняння /8/ $\hat\varphi|\partial D_x = 0$. Аналогічно для кожного фіксованого $B \geq \nu_1$ існує єдиний класичний розв"язок $\hat\psi = \hat\psi(y,B)$

рівняння /9/ $\hat{\psi}|_{\partial D_y}=0$. Розглянемо функції

$$\mu(B)=\frac{(L_y\hat{\psi}(y,B),\hat{\psi}(y,B))}{\|\hat{\psi}(y,B)\|^2}, \quad \nu(A)=\frac{(L_x\hat{\varphi}(x,A),\hat{\varphi}(x,A))}{\|\hat{\varphi}(x,A)\|^2}. \qquad /11/$$

Рівняння /10/ можна переписати як

$$A=\mu(B), \quad B=\nu(A), \qquad /12/$$

або

$$A=\mu(\nu(A)). \qquad /13/$$

Знаходження ненульових розв"язків системи /5/ зводиться до знаходження коренів рівняння /13/.

Розглянемо вихідний функціонал /4/ на множині функцій $\varphi_1(x,A)$, $\psi_1(y,B)$, побудованих із $\hat{\varphi}(x,A)$, $\hat{\psi}(y,B)$, враховуючи заміну /7/. При цьому задача мінімізації функціоналу /4/, очевидно, зводиться до визначення точок мінімуму функції двох змінних $\Phi(A,B)$. Такі точки є розв"язками рівнянь /12/. Для неперервної функції $g(A)=\Phi(A,\nu(A))$ критичними точками є розв"язки рівнянь /13/. Можна показати, що мінімум функції $g(A)$ досягається для скінченних значень A . Згідно з теоремою Веєрштрасса неперервна на замкнутому проміжку функція $g(A)$ досягає своїх екстремальних значень. Отже, існує і може бути обчислене значення A^* , що реалізує мінімум функції $g(A)$.

Тоді розв"язок системи /8/ має вигляд

$$\hat{\varphi}=\hat{\varphi}(x,A^*), \quad \hat{\psi}=\hat{\psi}(y,B^*), \quad B^*=\nu(A^*),$$

а мінімум функціоналу /4/ реалізують функції

$$u^1(x,y)=\varphi_1(x)\psi_1(y)=\varkappa_f(A^*+B^*)\hat{\varphi}(x,A^*)\hat{\psi}(y,B^*). \qquad /14/$$

Перше наближення побудоване. Теорема доведена.

Для побудови другого наближення наступну базову функцію і відповідну моментну характеристику шукаємо з умови екстремуму функціоналу

$$\Phi_2(\varphi(x),\psi(y))=\iint\limits_{D_xD_y}(L_x\varphi\psi+L_y\psi\varphi-2f_1(x,y)\varphi\psi\,dx\,dy, \qquad /15/$$

де $f_1(x,y)=\varkappa_f\,\varphi^f(x)\,\psi^f(y)-Lu^1$; u^1 – побудоване перше наближення.

Легко переконатися, що оскільки u^1 одержане у формі /I4/, то

$$f_1(x,y)=\varkappa_f[\varphi_f-(A^*+B^*)\hat{\varphi}][\psi_f-(A^*+B^*)\hat{\psi}]=\varkappa_f^1\varphi_1^f(x)\psi_1^f(y),$$

тобто $f_1(x,y)$ має вигляд /6/. У такому випадку для обгрунтування існування та конструктивної побудови другої базової функції $\varphi_2(x)$ і відповідної моментної характеристики $\psi_2(y)$ скористаємося теоремою I, застосовуючи її до функціоналу /I5/ і функції $f_1(x,y)$. Друге наближення розв"язку знаходимо у формі

$$u^2(x,y)=\psi_1(y)\varphi_1(x)+\psi_2(y)\varphi_2(x).$$

Будуючи наступні наближення розв"язку згідно з описаною схемою одержуємо систему базових функцій $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_N(x)$ і відповідних моментних характеристик $\psi_1(y),\ldots,\psi_N(y)$. Наведемо без доведення теорему, що характеризує збіжність побудованих наближень до розв"язку вихідної задачі /I/-/2/.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $u^N(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\psi_i(y)\varphi_i(x)$, де ψ_i, φ_i - побудовані на основі варіаційно-моментного підходу базові функції і моментні характеристики. Тоді

$$\|u-u^N\|_{H_0^1(D)}\to 0,\ N\to\infty,$$

де u — розв"язок вихідної задачі /I/-/2/ з правою частиною в формі /6/.

Таким чином, якщо права частина в рівнянні /I/ подана у формі /6/, методика побудови базових функцій і моментних характеристик під час переходу до задач нижчої розмірності описана.

Якщо права частина в рівнянні /I/ не має вигляду /6/, то будуємо наближення функції $f(x,y)$ у потрібній формі. Похибка під час заміни функції $f(x,y)$ її наближенням у формі /6/ є мінімальною, якщо функції $\varphi^f(x)$ і $\psi^f(y)$ реалізують мінімум функціоналу

$$F(\varphi(x),\psi(y))=\|\varphi(x)\psi(y)-f(x,y)\|^2_{L_2(D)}.$$

З необхідної умови екстремуму такого функціоналу одержуємо систему:

$$\|\psi^f\|^2\varphi^f(x)=\int_{D_y}f(x,y)\psi^f(y)\,dy;$$

$$\|\varphi^f\|^2\psi^f(y)=\int_{D_x}f(x,y)\varphi^f(x)\,dx. \qquad /I6/$$

Рівняння системи /I6/ еквівалентні задачі знаходження власних значень і відповідних власних функцій інтегрального рівняння Фредгольма другого роду:

$$\begin{aligned} &\varkappa \varphi^f(x) = \int\limits_{D_x} K_1(x,\xi)\varphi^f(\xi)\,d\xi \\ &\varkappa \psi^f(y) = \int\limits_{D_y} K_2(y,\eta)\psi^f(\eta)\,d\eta \end{aligned} \qquad \varkappa = \|\varphi^f\|^2 \|\psi^f\|^2, \qquad /I7/$$

$$K_1(x,\xi) = \int\limits_{D_y} f(x,y)f(\xi,y)\,dy, \quad K_2(y,\eta) = \int\limits_{D_x} f(x,y)f(x,\eta)\,dx. \quad /I8/$$

Для послідовного визначення власних значень $\varkappa$ і відповідних власних функцій $\varphi^f(x)$, $\psi^f(y)$ можна скористатися методом Келлога [2]. У випадку, коли ядро інтегрального рівняння вироджене, тобто

$$f(x,y) = \sum_{K=1}^{P} c_K \varphi_K(x)\psi_K(y),$$

задача зводиться до знаходження власних значень відповідної числової матриці.

Якщо власні значення $\varkappa_i$ і власні функції $\varphi_i^f(x), \psi_i^f(y)$ рівнянь /I7/ відомі, то функцію $S(x,y)$ можна подати у вигляді

$$f(x,y) = \sqrt{\varkappa_1}\varphi_1^f(x)\psi_1^f(y) + \sqrt{\varkappa_2}\varphi_2^f(x)\psi_2^f(y) + \ldots \quad /I9/$$

Використовуючи одержане зображення правої частини рівняння /I/ у формі /I9/, записуємо задачу для визначення N -го наближення розв"язку:

$$Lu^N = \sum_{K=1}^{N} \sqrt{\varkappa_K}\varphi_K(x)\psi_K(y),$$
$$u^N|_{\partial D} = 0.$$

Звідси $u^N(x,y) = u_1(x,y) + \ldots + u_N(x,y)$,
де $u_K(x,y)$ - розв"язок задачі.

$$Lu_K(x,y) = \sqrt{\varkappa_K}\varphi_K^f(x)\psi_K^f(y),$$
$$u_K|_{\partial D} = 0. \qquad /20/$$

Для задач вигляду /20/ процес побудови базових функцій $\varphi_{K1}(x),\ldots,\varphi_{KN}(x)$ і моментних характеристик $\psi_{K1}(y),\ldots,\psi_{KN}(y)$ описаний. Тоді N-не наближення розв"язку задачі /I/-/2/ має вигляд

$$u^N(x,y) = \sum_{K=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_{Ki}(y)\varphi_{Ki}(x).$$

Такий підхід до вибору базових функцій $\varphi_i(x)$ під час переходу від задачі /1/-/2/ до задач меншої розмірності, що містять лише групу змінних y, дає змогу на кожному кроці редукції якнайповніше враховувати властивості правої частини рівняння, області зміни і відповідного диференціального оператора.

1. Бурак Я.Й., Зозуляк Ю.Д. Обобщенный вариационный подход в задачах теплопроводности тонких оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 3. 2. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М., 1989. 3. Зозуляк Ю.Д., Казьмір Л.П. Розв"язування задач теплопровідності тонких оболонок і пластин з використанням узагальненого варіаційного підходу // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1992. Вып.36. 4. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. К., 1986.

Стаття надійшла до редколегії 06.05.93

УДК 681.3

О.О.Євтушенко, З.А.Калитин, О.Г.Плахтина

СТВОРЕННЯ ПРИКЛАДНИХ БІБЛІОТЕЧНИХ ПРОГРАМ У СЕРЕДОВИЩІ ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВОЇ СИСТЕМИ CDS/ISIS-МІКРО

У комплексі заходів з автоматизації бібліотечних процесів важливим є створення єдиного електронного каталога. Його використання дасть змогу уникнути рутинної роботи, яка виникає при дублюванні інформації в різних паперових бібліотечних каталогах. Електронний каталог передбачає застосування різноманітних обслуговувальних програм, пов"язаних з пошуком і виводом інформації. Якщо записи електронного каталога подати у стандартному міжнародному бібліографічному форматі, то стає можливим обмін інформацією /тобто базами даних/ з бібліотеками різних країн.

Оскільки під час формування записів електронного каталога слід дотримуватися певних правил, які не є тривіальними для непрофесіонала-користувача ЕОМ, виникає потреба у використанні ним спеціальної програми - автоматизованого робочого місця бібліографа.

На даний час розроблено достатньо програмних засобів для створення систем керування базами даних. Усі вони мають свої недоліки і переваги. Вибираючи програмний засіб для розробки бібліотечних систем керування базами даних, передусім потрібно орієнтуватися на можливість створення великих баз даних, а також на наявність розвинутого апарату пошуку даних. Цим вимогам відповідає інформаційно-пошукова система CDS/ISIS-мікро [2] /розроблена ЮНЕСКО/, що функціонує в середовищі операційної системи MS DOS.

Перевагами системи CDS/ISIS-мікро є її невеликий обсяг /1,5 МБ/, потужний апарат пошуку, а також можливість створювати бази даних із записами змінної довжини. Останнє найістотніше при потребі зберігання великих обсягів інформації. Система CDS/ISIS-мікро дає змогу формувати записи у форматі, який відповідає міжнародному стандарту ISO. Саме на основі цього стандарту розроблена більшість міжнародних бібліографічних форматів. За допомогою алгоритмічної мови ISIS-паскаль можна розробляти прикладні бібліотечні системи різного спрямування.

Як і кожний програмний засіб, система CDS/ISIS-мікро має ряд недоліків. Основним із них, на думку авторів, є обмежені можливості мови ISIS-паскаль. Найістотнішим є обмеження на розмір програми, що в ряді випадків не дає змоги оформити діалог користувача з комп"ютером на належному рівні. Можливість використання тільки певних типів даних, а також обмеження на формальні параметри істотно ускладнюють процес розробки прикладних програм для середовища системи.

Прикладна бібліотечна система "Каталог" [1] розроблена на мові ISIS-паскаль і є надбудовою до інформаційно-пошукової системи CDS/ISIS-мікро. "КАТАЛОГ" є автоматизованим робочим місцем бібліографа і призначена для:

1/ створення електронного бібліографічного каталога із записами у міжнародному форматі MARK;

2/ зображення на екрані і/або на папері кожного запису, тобто бібліографічної карточки, у вигляді, що відповідає ГОСТ 7.1-84;

3/ реалізації керованого комп"ютером режиму роботи користувача під час створення бібліографічної карточки, що необхідне для уникнення помилок у записах електронного каталога;

4/ пошуку необхідного запису за автором і/або/ назвою видання;

5/ редагування наявних записів електроного каталога.

Спектр можливостей редагування записів достатньо широкий. Передбачене редагування записів кваліфікованим користувачем безпосередньо в базі даних. Крім цього, для менш досвідчених користувачів пропонується згідно з програмою створити заново окремі поля або весь запис. Врахована необхідність зміни деякої кількісної інформації про кожне видання без перегляду відповідного запису.

Слід відзначити, що "КАТАЛОГ" можна використовувати як навчальну програму, оскільки всі необхідні розділові знаки розставляються програмою автоматично і можуть служити підказкою бібліотекарю під час створення опису бібліографічної карточки.

Система "КАТАЛОГ" дає змогу заносити в електронний каталог описи однотомних, багатотомних та серійних видань.

Передбачається створення подібної системи для обробки депонованих праць, дисертацій, а також складових частин документів.

Прикладна бібліотечна система "КАТАЛОГ" діє в науково-технічній бібліотеці Українського державного лісотехнічного університету /УДЛУ/. За її допомогою створюється електронний каталог бібліотеки. Проте "КАТАЛОГ" має універсальний характер і може використовуватися в бібліотеці довільного рівня. Розмір завантажувального модуля програми – 24576 байт.

Розробка комплексу обслуговувальних програм для науково-технічної бібліотеки УДЛУ започаткована створенням сервісної програми "Учбова картотека". Програма функціонує в середовищі системи CDS/ISIS-мікро і призначена для:

1/ пошуку за автором і/або/ назвою заданого підручника з наявних у бібліотеці УДЛУ;

2/ перегляду всіх наявних у бібліотеці підручників із заданої дисципліни для кожної кафедри УДЛУ;

3/ визначення книгозабезпеченості із заданої дисципліни, що викладається на кафедрах УДЛУ.

Завантажувальний модуль програми займає 23040 байт.

Резюмуючи, зазначимо, що створені програмні засоби орієнтовані на користувача-непрофесіонала, діалог з комп"ютером побудований тільки в термінах, відомих бібліотекарю, робота з програмами не вимагає спеціальної підготовки.

1. Євтушенко О.О., Калитин З.А., Потіпко Т.І., Ровенчак А.І. Прикладна бібліотечна система "КАТАЛОГ" // Тези доп. міжнар. конф. "Проблеми українізації комп"ютерів". м.Львів, 28 вер.-2 жовт. 1992 р. Львів, 1992. С.33-34. 2. Пакет прикладних програм CDS/ISIS/M . М., 1988.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.93

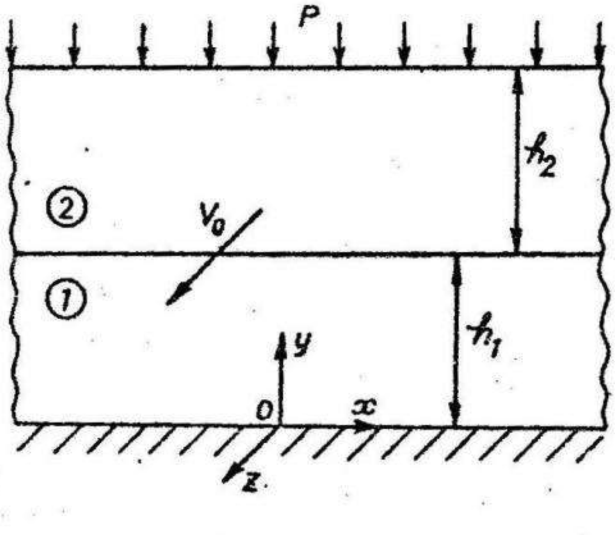
УДК 539.3

Д.В.Грилицький

НЕСТАЦІОНАРНА ТЕПЛОВА ЗАДАЧА ТЕРТЯ ДЛЯ СИСТЕМИ З ДВОХ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИХ ШАРІВ*

Розглянемо нестаціонарну теплову задачу тертя для системи тіл, що складається з двох плоскопаралельних шарів.

Нехай нижня основа двошарової системи жорстко закріплена, а до верхньої основи прикладене притискне напруження p (p – const) /див. рисунок/. Припускаємо, що верхній шар у напрямі осі z ру-



хається по поверхні нижнього шару зі сталою швидкістю V_0. На площині контакту шарів за рахунок дії сил тертя, що підпорядковані законові Амонтона, відбувається теплоутворення. Вважаємо, що тепловий контакт шарів є неідеальним, а між площинами, які обмежують пакет, і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона.

Визначимо температурне поле в пакеті.

За даної постанови задачі температура T_i є функцією лише координати y і часу τ. Отже, маємо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T_i(y,\tau)}{\partial y^2} = \frac{1}{K_i} \frac{\partial T_i(y,\tau)}{\partial \tau}, \qquad /1/$$

де K_i – коефіцієнти температуропровідності.

* Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.

Граничні та контактні умови при $\tau > 0$ мають вигляд

$$y=0: \frac{\partial T_1}{\partial y} = \gamma_1 (T_1 - T_{1c}); \; y = h_1 + h_2: \frac{\partial T_2}{\partial y} = -\gamma_2 (T_2 - T_{2c}),$$

$$y = h_1: \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = f V_0 P, \qquad /2/$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} + h(T_1 - T_2) = 0.$$

Початкова умова

$$\tau = 0: T_1(y,0) = T_2(y,0) = 0. \qquad /3/$$

В умовах /2/ введені позначення: $\gamma_i \; (i=1,2)$ – відносні коефіцієнти теплообміну; T_{ic} – температури зовнішнього середовища $(T_{ic} - const)$; λ_i – коефіцієнти теплопровідності; h_i – товщини шарів; h – термічна провідність площини контакту; f – коефіцієнт тертя.

Поставлена задача зводиться до побудови розв"язку диференціального рівняння /I/ за умов /2/ і /3/.

Шукаємо розв"язок рівняння /I/ у вигляді

$$T_i(y,\tau) = t_i(y) + \theta_i(y,\tau) \quad (i=1,2), \qquad /4/$$

де $t_i(y)$ –стаціонарний розподіл температури; $\theta_i(y,\tau)$ – відхилення від стаціонарної температури. Замість /I/, /2/ і /3/ доходимо до розв"язування рівнянь

$$\frac{d^2 t_i}{dy^2} = 0 \qquad /5/$$

за умов

$$y=0: \frac{dt_1}{dy} = \gamma_1 t_1 - \gamma_1 T_{1c}; \; y = h_1 + h_2: \frac{dt_2}{dy} = -\gamma_2 t_2 + \gamma_2 T_{2c},$$

$$y = h_1: \lambda_1 \frac{dt_1}{dy} - \lambda_2 \frac{dt_2}{dy} = f V_0 P, \; \lambda_1 \frac{dt_1}{dy} + \lambda_2 \frac{dt_2}{dy} + h(t_1 - t_2) = 0 \qquad /6/$$

та до побудови розв"язків рівнянь

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} = \frac{1}{K_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} \qquad /7/$$

за умов

$$y=0: \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \gamma_1 \theta_1; \; y = h_1 + h_2: \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = -\gamma_2 \theta_2, \qquad /8/$$

$$y = h_1: \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0, \; \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + h(\theta_1 - \theta_2) = 0,$$

$$\tau = 0: \theta_i(y,0) = \theta_i^{(0)}(y) = -t_i(y). \qquad /9/$$

Визначаємо температуру $t_i(y)$. Інтегруючи рівняння /5/, отримуємо

$$t_i(y) = A_i y + B_i . \qquad /10/$$

Задовольняючи умови /6/, визначаємо коефіцієнти A_i та B_i, а отже, і стаціонарний розподіл температури в пакеті:

$$t_1(y) = b^{-1}\left[a_2 f v_0 P - h\lambda_2\gamma_2(T_{1c} - T_{2c})\right](1+\gamma_1 y) + T_{1c} ,$$
$$t_2(y) = b^{-1}\left[a_1 f v_0 P - h\lambda_1\gamma_1(T_{1c} - T_{2c})\right](c-\gamma_2 y) + T_{2c} , \qquad /11/$$

де

$$a_i = \lambda_i\gamma_i + h(1+\gamma_i h_i), \; b = \lambda_1\gamma_1 a_2 + \lambda_2\gamma_2 a_1 ; \; c = 1+\gamma_2(h_1+h_2). \qquad /12/$$

Функції $\theta_i(y,\tau)$ знаходимо у вигляді добутку

$$\theta_i(y,\tau) = \mathcal{F}_i(y)\cdot L_i(\tau). \qquad /13/$$

Підставляючи /13/ у рівняння /7/ та розділяючи змінні, одержуємо рівняння

$$\frac{dL_i}{d\tau} + \mu^2 L_i = 0, \quad \frac{d^2\mathcal{F}_i}{dy^2} + \frac{\mu^2}{K_i}\mathcal{F}_i = 0, \qquad /14/$$

в яких μ^2 – постійний параметр.

Розв"язками цих рівнянь є відповідно вирази

$$L_i(\tau) = C_i e^{-\mu^2\tau}, \; \mathcal{F}_i(y) = M_i \cos\frac{\mu}{\sqrt{K_i}}y + N_i \sin\frac{\mu}{\sqrt{K_i}}y , \qquad /15/$$

де C_i, M_i та N_i – постійні інтегрування. Можна припустити, що C_i дорівнює одиниці.

Отже, частковий розв"язок рівняння /7/ задається формулою

$$\theta_i(y,\tau) = \left(M_i\cos\frac{\mu}{\sqrt{K_i}}y + N_i\sin\frac{\mu}{\sqrt{K_i}}y\right)e^{-\mu^2\tau}, \qquad /16/$$

у якій довільні сталі M_i та N_i визначаються з умов /8/.

Підставляючи вираз /16/ в умови /8/, одержуємо систему чотирьох однорідних алгебраїчних рівнянь відносно M_i та N_i $(i=1,2)$.

Прирівнюючи детермінант системи до нуля, маємо характеристичне рівняння, коренями якого є нескінченна кількість різних дійсних величин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ /зважаючи на малий обсяг статті, коефіцієнти a_{ij} $(i,j=\overline{1,4})$ не виписуємо/.

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 . \qquad /17/$$

Для кожного кореня μ_n рівняння /14/ для $\mathcal{F}_i(y)$ має ненульовий розв"язок /15/, і отже, загальний розв"язок рівняння /7/ можна визначити за формулою

$$\theta_i(y,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_i^{(n)}\cos\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y+N_i^{(n)}\sin\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y\right)e^{-\mu_n^2\tau}. \qquad /18/$$

Якщо через $\Delta_p(\mu_n)$ / p = 1, 2, 3, 4/ позначити алгебраїчні доповнення визначника $\Delta(\mu_n)$ /17/, що відповідають елементам якого-небудь рядка, то постійні $M_i^{(n)}, N_i^{(n)}$, які відповідають кореню μ_n, зв"язані з цими алгебраїчними доповненнями рівностями

$$\frac{M_1^{(n)}}{\Delta_1(\mu_n)}=\frac{N_1^{(n)}}{\Delta_2(\mu_n)}=\frac{M_2^{(n)}}{\Delta_3(\mu_n)}=\frac{N_2^{(n)}}{\Delta_4(\mu_n)}=\mathcal{D}_n,$$

звідки

$$M_1^{(n)}=\mathcal{D}_n\Delta_1(\mu_n),\quad N_1^{(n)}=\mathcal{D}_n\Delta_2(\mu_n),$$
$$M_2^{(n)}=\mathcal{D}_n\Delta_3(\mu_n),\quad N_2^{(n)}=\mathcal{D}_n\Delta_4(\mu_n). \qquad /19/$$

Підставляючи /19/ в /18/, маємо

$$\theta_i(y,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n\left[\Delta_{2i-1}(\mu_n)\cos\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y+\Delta_{2i}(\mu_n)\sin\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y\right]e^{-\mu_n^2\tau}. \qquad /20/$$

Постійні $\mathcal{D}_n$ знаходимо з початкових умов /9/. Підставляючи вираз /20/ у початкові умови /9/, одержуємо

$$\theta_i^{(0)}(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n\varphi_n^{(i)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y\right) \qquad /21/$$

/при i = 1: $0\le y\le h_1$; при i = 2 : $h_1\le y\le h_1+h_2$ /,

де

$$\varphi_n^{(i)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y\right)=\Delta_{2i-1}(\mu_n)\cos\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y+\Delta_{2i}(\mu_n)\sin\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y, \qquad /22/$$

$\theta_i^{(0)}(y)=-t_i(y)$, $t_i(y)$ – визначаються формулами /11/.

Функції $\varphi_n^{(i)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}}y\right)$ є розв"язками рівнянь

$$\frac{d^2\varphi_n^{(i)}}{dy^2}+\frac{\mu_n^2}{K_i}\varphi_n^{(i)}=0 \qquad /23/$$

і задовольняють умови /8/, в яких замість θ_i використані $\varphi_n^{(i)}$.

Функції $\varphi_n^{(i)}$ не є ортогональними в межах одного шару, тому ортогоналізуємо їх сукупність у межах товщини пакету двох шарів [2]. Для цього введемо такі постійні множники $d_i(i=1,2)$, щоб

$$d_1 \int_0^{h_1} \varphi_n^{(1)} \varphi_K^{(1)} dy + d_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} \varphi_n^{(2)} \varphi_K^{(2)} dy = \begin{cases} 0, & \text{коли } n \neq K, \\ R_n, & \text{коли } n = K, \end{cases} \qquad /24/$$

де

$$R_n = d_1 \int_0^{h_1} (\varphi_n^{(1)})^2 dy + d_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} (\varphi_n^{(2)})^2 dy. \qquad /25/$$

Застосовуючи формулу з праці / I / і користуючись граничними умовами для $\varphi_n^{(i)}$, одержуємо при $n \neq K$

$$d_1 \int_0^{h_1} \varphi_n^{(1)} \varphi_K^{(1)} dy + d_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} \varphi_n^{(2)} \varphi_K^{(2)} dy = d_1 \left[\frac{K_1}{\mu_n^2 - \mu_K^2} \left(\varphi_n^{(1)} \frac{d\varphi_K^{(1)}}{dy} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \varphi_K^{(1)} \frac{d\varphi_n^{(1)}}{dy} \right) \right]_{y=0}^{y=h_1} + d_2 \left[\frac{K_2}{\mu_n^2 + \mu_K^2} \left(\varphi_n^{(2)} \frac{d\varphi_K^{(2)}}{dy} - \varphi_K^{(2)} \frac{d\varphi_n^{(2)}}{dy} \right) \right]_{y=h_1}^{y=h_1+h_2} =$$
$$= \frac{1}{\mu_n^2 - \mu_K^2} \left\{ K_1 d_1 \left[\varphi_K^{(1)}(0) \left(\frac{d\varphi_n^{(1)}}{dy} - \gamma_1 \varphi_n^{(1)} \right)_{y=0} \right] + (K_1 d_1 - \right. \qquad /26/$$
$$\left. - K_2 d_2 \lambda_1 \lambda_2^{-1}) \left(\varphi_n^{(1)} \frac{d\varphi_K^{(1)}}{dy} - \varphi_K^{(1)} \frac{d\varphi_n^{(1)}}{dy} \right)_{y=h_1} - K_2 d_2 \left[\varphi_K^{(2)}(h_1+h_2) \left(\frac{d\varphi_n^{(2)}}{dy} + \gamma_2 \varphi_n^{(2)} \right)_{y=h_1+h_2} \right] \right\}.$$

Для того щоб попередній вираз перетворився в нуль, необхідно прийняти, що

$$d_1 = \lambda_2^{-1} K_2 C, \quad d_2 = \lambda_1^{-1} K_1 C, \qquad /27/$$

де C – довільна постійна, з точністю до якої визначають сталі d_1 та d_2.

Використовуючи умову ортогональності /24/, для коефіцієнтів $\mathcal{D}_n$ у розкладі /21/ отримуємо формулу

$$\mathcal{D}_n = \frac{d_1 \int_0^{h_1} \theta_1^{(0)}(y) \varphi_n^{(1)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_1}} y\right) dy + d_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} \theta_2^{(0)}(y) \varphi_n^{(2)} \left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_2}} y\right) dy}{d_1 \int_0^{h_1} \left[\varphi_n^{(1)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_1}} y\right) \right]^2 dy + d_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left[\varphi_n^{(2)}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{K_i}} y\right) \right]^2 dy}. \qquad /28/$$

Маючи значення коефіцієнтів $\mathcal{D}_n$, можна вважати, що нестаціонарна температурна задача тертя для двошарового пакету розв"язана. У підсумку температура в пакеті визначається співвідношенням

$$T_i(y, \tau) = t_i(y) + \theta_i(y, \tau), \qquad /29/$$

де $t_i(y)$ задані виразами /II/, а функції $\theta_i(y, \tau)$ знаходимо зі співвідношень /20/, /28/ і /19/. У границі при $\tau \to \infty$ отримуємо стаціонарний розподіл температури.

Тепловий потік у пакеті пропорційний похідній від $T_i(y, \tau)$ по координаті y.

1. Карлслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. 2. Комаров Г.Н. Нестационарная теплопроводность многослойных систем // Тепловые напряжения в элементах конструкции: Докл. науч. сообщ. К., 1967. Вып. 7. С.166-173.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.93

УДК 539.375

Д.В.Грилицький

ПРО КОНТАКТНУ ВЗАЄМОДІЮ ДВОХ ШОРСТКИХ ШАРІВ З ТЕПЛОУТВОРЕННЯМ І СТИРАННЯМ ВІД ТЕРТЯ*

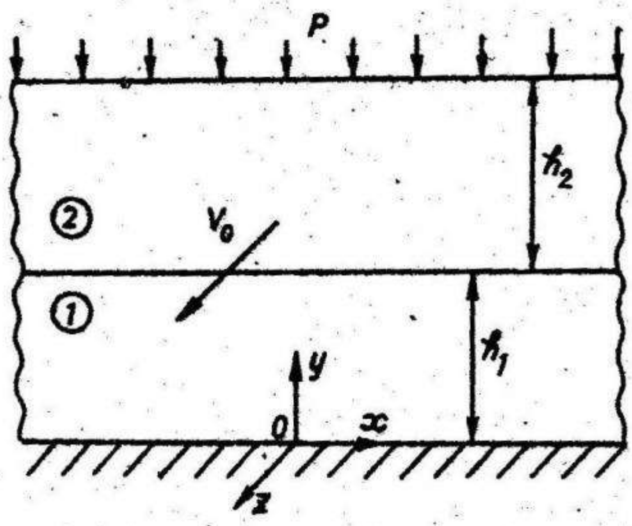
Задача теплопружності про контактну взаємодію двох шарів за рівномірного їх обтиснення нормально до площини контакту з урахуванням теплоутворення й стирання від тертя розглянута в праці [3]. У постановці задачі вважали, що зовнішні площини пакету жорстко защемлені, на них підтримується нульова температура і тепловий контакт шарів ідеальний. Задача, близька до описаної у праці [3], досліджена у публікації [2].

Задача про контактну взаємодію двох шарів у даній статті розглянута у більш загальній постановці, ніж у праці [3]. А саме, вважаємо, що шари обмежені шорсткими площинами, тепловий контакт між ними неідеальний, а між площинами шарів, які не контактують, та зовнішнім середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона. Нижня основа двошарового пакету жорстко закріплена, а до верхньої основи прикладене притискне напруження $p(\tau)$, що повільно змінюється в часі /див. рисунок/, і процес теплопровідності в пакеті є квазіусталеним.

Припустимо, що другий шар в напрямі осі z рухається по верхній площині першого шару з постійною малою швидкістю V_0. На площині контакту шарів за рахунок дії сил тертя відбувається теплоутворення і стирання. Визначимо температурні поля, напруження і переміщення в пакеті та ресурс трибоспряження.

За даної постановки задачі складова переміщення u_i по осі x дорівнює нулю, а складові переміщення v_i та w_i, а також

* Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.



температура t_i / i = 1, 2 / є функціями лише координати y . З урахуванням цього диференціальне рівняння теплопровідності, рівняння термопружності в переміщеннях та формули для напружень стосовно цієї задачі мають вигляд

$$\frac{d^2 t_i}{dy^2} = 0; \qquad /1/$$

$$\frac{d^2 V_i}{dy^2} - \beta_i \frac{dt_i}{dy} = 0, \quad \frac{d^2 W_i}{dy^2} = 0. \qquad /2/$$

$$\sigma_y^{(i)} = \mu_i \delta_i \left(\frac{dV_i}{dy} - \beta_i t_i\right), \quad \tau_{zy}^{(i)} = \mu_i \frac{dW_i}{dy}. \qquad /3/$$

$$\beta_i = \alpha_i (1+\nu_i)(1-\nu_i)^{-1}, \quad \delta_i = 2(1-\nu_i)(1-2\nu_i)^{-1} \quad (i=1,2).$$

Тут μ_i, ν_i, α_i – відповідно коефіцієнти Ляме, Пуассона, лінійного теплового розширення.

Механічні умови задачі:

$$y=0: V_1 = W_1 = 0; \quad y = h_1 + h_2; \ V_2 = -\varepsilon\,(\varepsilon > 0), W_2 = 0;$$

$$y = h_1: \ \tau_{zy}^{(1)} = \tau_{zy}^{(2)} = fP(\tau), \ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} = -P(\tau), \qquad /4/$$

$$V_1 + V_1^{(c)} + V_1^{(m)} = V_2 + V_2^{(c)} + V_2^{(m)}.$$

Теплові умови задачі:

$$y=0: \frac{dt_1}{dy} = \gamma_1 t_1; \ y = h_1 + h_2: \frac{dt_2}{dy} = -\gamma_2 t_2;$$

$$y = h_1: \lambda_1 \frac{dt_1}{dy} - \lambda_2 \frac{dt_2}{dy} = f_0 V_0 P(\tau); \ \lambda_1 \frac{dt_1}{dy} + \lambda_2 \frac{dt_2}{dy} + h(t_1 - t_2) = 0. \qquad /5/$$

В умовах /4/ та /5/ введені позначення: V_i, W_i – компоненти термопружного переміщення; $V_i^{(c)}$ – переміщення від стирання;

$V_i^{(ш)}$ – переміщення від зім"яття мікронерівностей; $\sigma_y^{(i)}$ та $\tau_{zy}^{(i)}$ напруження; t_i – температура; γ_i – відносні коефіцієнти теплообміну; λ_i – коефіцієнти теплопровідності; h_i – товщини шарів; h – термічна провідність площини контакту /$h \to \infty$ відповідає ідеальному тепловому контакту/; $f_0 = (1-K_0)f$, де f – коефіцієнт тертя, $K_0 (K_0 < 1)$ – коефіцієнт, що визначає ту частину роботи сил тертя на одиницю площі за одиницю часу, що витрачається на стирання шарів $\sim K_0 f V_0 p(\tau)$, друга частина роботи сил тертя $\sim (1-K_0) f V_0 p(\tau) = f_0 V_0 p(\tau)$ витрачається на нагрівання шарів.

Вважаємо, що відбувається абразивне стирання. У цьому випадку величина стирання пропорційна роботі сил тертя [1] і визначається співвідношенням

$$V_i^{(c)} = (-)^i m_i f V_0 \int_0^{\tau} p(\eta)\, d\eta, \qquad /6/$$

де m_i – коефіцієнти, що характеризують податність матеріалу стиранню /коефіцієнти стирання/.

Припускаємо, що існує лінійна залежність між тиском і переміщенням від зім"яття мікронерівностей, тобто

$$V_i^{(ш)} = (-)^i n_i p(\tau), \qquad /7/$$

де n_i – коефіцієнти, що характеризують деформаційні властивості шорсткості.

Поставлена задача зводиться до побудови розв"язків простих диференціальних рівнянь /I/ і /2/ за умов /4/ і /5/ з урахуванням формул /6/ та /7/.

Зінтегрувавши рівняння /I/ та задовольнивши умови /5/, знайдемо температуру в пакеті

$$t_i(y) = \varkappa_0^{-1} \varkappa^{i-1} \left\{ (-)^{i-1} \gamma_i y + \left[1 + \gamma_2 (h_1 + h_2)\right]^{i-1} \right\} V_0 f_0 p(\tau), \qquad /8/$$

де

$$\varkappa_0 = \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 \varkappa, \quad \varkappa = \left[\lambda_1 \gamma_1 + h(1 + h_1 \gamma_1)\right]\left[\lambda_2 \gamma_2 + h(1 + h_2 \gamma_2)\right]^{-1}.$$

Інтегруючи рівняння /2/ та задовольняючи умови /4/, крім останнього співвідношення, одержуємо вирази для визначення переміщень у стичних тілах

$$V_i = 2^{-1} \beta_i A_i y^2 + B_i y + C_i, \quad W_i = M_i y + N_i, \qquad /9/$$

у яких

$$A_i = \varkappa_0^{-1} (-\varkappa)^{i-1} \gamma_i f_0 V_0 p(\tau), \quad N_1 = 0, \quad N_2 = -(1 + h_1^{-1} h_2) f p(\tau),$$

$$M_i = \mu_i f p(\tau), \quad B_i = \left\{ \varkappa_0^{-1} \beta_i \left[\varkappa (1 + \gamma_2 (h_1 + h_2))\right]^{i-1} f_0 V_0 - \mu_i^{-1} \delta_i^{-1} \right\} p(\tau), \qquad /10/$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\varepsilon - (h_1 + h_2) \left\{ (2\gamma_0)^{-1} \beta_2 \varkappa \left[2 + \gamma_2 (h_1 + h_2)\right] f_0 V_0 - \mu_i^{-1} \delta_i^{-1} \right\} p(\tau).$$

Тиск між шарами, а отже, і тиск, яким притискується двошаровий пакет, визначаємо з останнього співвідношення умов /4/. Задовольнивши його, одержуємо інтегральне рівняння задачі для визначення $p(\tau)$ з урахуванням теплоутворення, стирання та шорсткості поверхонь стичних тіл:

$$(K_n + K_ш - K_t)p(\tau) + K_c \int_0^{\tau} p(\eta)\,d\eta = \varepsilon, \qquad /11/$$

де

$$K_n = h_1(\mu_1\delta_1)^{-1} + h_2(\mu_2\delta_2)^{-1}, \; K_ш = n_1 + n_2, \; K_c = (m_1 + m_2) f V_0,$$

$$K_t = (2\varkappa_0)^{-1}\left[\beta_1 h_1(2 + h_1\gamma_1) + \varkappa\beta_2 h_2(2 + h_2\gamma_2)\right] f_0 V_0. \qquad /12/$$

Беручи похідну по τ від обох частин /11/, отримуємо диференціальне рівняння з початковою умовою

$$(K_n + K_ш - K_t)p'(\tau) + K_c\, p(\tau) = 0, \qquad /13/$$

$$p(0) = \varepsilon(K_n + K_ш - K_t)^{-1}. \qquad /14/$$

Розв"язок рівняння /13/ за умови /14/ визначається формулою

$$p(\tau) = \varepsilon(K_n + K_ш - K_t)^{-1} e^{-\frac{K_c}{K_n + K_ш - K_t}\tau}. \qquad /15/$$

Для того щоб умова /14/ мала фізичний сенс, необхідне виконання нерівності

$$(K_n + K_ш - K_t) > 0. \qquad /16/$$

Розглянемо окремі випадки.

1. Припустимо, що теплоутворення відсутнє, тобто $K_t = 0$. У цьому випадку нерівність /16/ завжди виконується і при фіксованому параметрі ε контактний тиск експоненціально зменшується з часом.

Лінійне стирання залежно від часу знаходимо шляхом підставляння формули /15/ при $K_t = 0$ у співвідношення /6/. У результаті маємо вираз

$$V_i^{(c)} = (-)^{i-1} \varepsilon K_c m_i f V_0 \left(e^{-\frac{K_c}{K_n + K_ш}\tau} - 1\right). \qquad /17/$$

Ресурсом трибоспряження називаємо час τ_*, за який стирання досягає гранично допустимої або проектної величини h_*, тобто

$$-V_1^{(c)}(\tau_*) + V_2^{(c)}(\tau_*) = h_*. \qquad /18/$$

За співвідношеннями /17/ і /18/ визначаємо τ_* :

$$\tau_* = K_c^{-1}(K_n + K_ш)\ ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon - h_*}. \qquad /19/$$

Попередня формула має сенс тоді, коли

$$(\varepsilon - h_*) > 0. \qquad /20/$$

2. Стирання відсутнє, тобто $K_c = 0$. Тиск визначаємо з формули /14/ за умови /16/. Якщо ж за деяких значень вхідних параметрів умова /16/ порушується, що може спостерігатися навіть у разі дуже малого нагрівання тіл, то це означає, що поставлена задача з теплоутворенням при значеннях цих параметрів не має розв"язку. Цього не трапиться, якщо параметр ε не фіксувати, а дати йому можливість, крім додатних, набувати також від"ємних значень та дорівнювати нулю, або ж, що те саме, на верхній площині пакета задавати не переміщення, а нормальне напруження $p(\tau)$.

Отже, якщо на верхній площині пакета задане нормальне напруження, то співвідношення /10/ справедливе, крім коефіцієнта C_2, який визначається за формулою

$$C_2 = \left\{2^{-1}h_1(\beta_1\gamma_1 + \varkappa\beta_2\gamma_2) + \beta_1 - \varkappa\beta_2[1+\gamma_2(h_1+h_2)]\right\}\varkappa_0^{-1}h_1 f_0 V_0 p(\tau) - $$
$$- [(\mu_1\delta_1)^{-1} - (\mu_2\delta_2)^{-1}]h_1 p(\tau), \qquad /21/$$

а вертикальне переміщення верхньої площини пакета має значення

$$V_2(h_1+h_2) = -(K_n + K_ш - K_t)\,p(\tau). \qquad /22/$$

Як випливає з /22/, у разі порушення умови /16/ права частина останньої формули може набирати додатного значення та дорівнювати нулю.

Наведемо ще формулу для визначення температури на площині стикання шарів T_* за їх ідеального теплового контакту, припустивши, що $f = f_1 + f_2 T_*$ (f_1 і f_2 є константи).

$$T_* = \frac{(1+h_1\gamma_1)(1+h_2\gamma_2) f_{10} V_0 p(\tau)}{\lambda_1\gamma_1(1+h_2\gamma_2) + \lambda_2\gamma_2(1+h_1\gamma_1) - p(\tau) f_{20} V_0 (1+h_1\gamma_1)(1+h_2\gamma_2)} \qquad /23/$$

При цьому повинна виконуватись нерівність

$$[\lambda_1\gamma_1(1+h_2\gamma_2) + \lambda_2\gamma_2(1+h_1\gamma_1) - p(\tau) f_{20} V_0 (1+h_1\gamma_1)(1+h_2\gamma_2)] > 0, \qquad /24/$$

що називається умовою реалізації стаціонарного режиму теплопровідності [3].

У співвідношення /23/ і /24/ входить тиск $p(\tau)$. Його можна задавати або знаходити за формулою /I5/ ($K_c = 0$) за умови /I6/, в яку входить параметр K_t. Цей параметр визначаємо через характеристику $\varkappa$, яка у випадку ідеального теплового контакту набуває значення

$$\varkappa = (1+k_1\gamma_1)(1+h_2\gamma_2)^{-1}. \qquad /25/$$

3. Одночасно відбуваються процеси стирання і теплоутворення, що відповідає реальності. У цьому випадку, щоб отримати узгодженість перебігання цих процесів у часі та узгодженість граничних і початкових умов, граничну задачу теплопровідності задавати й розв"язувати в нестаціонарній постановці, що до певної міри утруднене. З огляду на це, розглянуту контактну задачу слід трактувати як наближену. У цьому сенсі буде наближеною також формула /I5/ і ті співвідношення, що можуть бути одержані на її основі.

Наприкінці зазначимо, що задача про контактну взаємодію двох плоскопаралельних шарів, які обмежені ідеально гладкими площинами, з урахуванням теплоутворення, але без стирання, розглянута також В.М.Онишкевичем в кандидатській дисертації.

I. Александров В.М., Галин Л.А., Пириев Н.П. Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины // Изв. АН СССР. Механіка твердого тіла. 1978. № 4. С.60-67. 2. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1990. № I. С.24-28. 3. Аннакулова Г.К. Контактная задача термоупругости о взаимодействии двух слоев // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1989. № 7253-В89. С.I-26.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.93

УДК 517.956

І.І.Верба

СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З ПРЯМОКУТНИМ ОТВОРОМ В УМОВАХ КУБІЧНОГО ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ ПО ТОВЩИНІ

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку завтовшки 2δ з прямокутним отвором $|x_i|<a_i$ ($i=1,2$). Нехай бічна поверхня пластинки $x_3=\delta$ нагрівається потоком тепла потужністю $q(x_1,x_2)$, а через поверхню $x_3=-\delta$ здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Тоді наближена система рівнянь теплопровідності, що відповідає кубічному закону розподілу температури по товщині пластинки

$$t=\left(1+\frac{\delta^2\Delta}{6}-\frac{x_3^2\Delta}{2}\right)T+\left[\left(1+\frac{\delta^2\Delta}{10}\right)\frac{x_3}{\delta}-\frac{x_3^3\Delta}{6\delta}\right]T^*$$

має вигляд [4]

$$\left(\Lambda+\frac{\alpha\delta^2}{3}\right)\Delta T-\frac{\alpha\delta^2}{15}\Delta T^*-\alpha T+\alpha T^*=-q(x_1,x_2),$$
$$-\frac{\alpha\delta^2}{3}\Delta T+\frac{1}{15}(6\Lambda+\alpha\delta^2)\Delta T^*-\alpha T-\left(\frac{4}{\tau}+\alpha\right)T^*=-q(x_1,x_2), \quad /1/$$

де $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $q(x_1,x_2)=q_0\exp\left[-\kappa\left((x_1-d_1)^2+(x_2-d_2)^2\right)\right]$,

T, T^* – інтегральні характеристики температури [4]; $\Lambda=2\lambda\delta$ – зведений коефіцієнт теплопровідності; $\tau=2\delta/\lambda$ – внутрішній термоопір пластинки; κ – коефіцієнт; q_0 – максимальна питома потужність у центрі нагріву.

Припускаємо, що поверхні отвору теплоізольовані, тобто,

$$\frac{\partial T}{\partial x_{i\pm1}}=\frac{\partial T^*}{\partial x_{i\pm1}}=0 \quad \text{при } |x_i|<a_i,\ |x_{i\pm1}|=a_{i\pm1}, \quad /2/$$

де $i\pm1=\begin{cases}2, & i=1;\\ 1, & i=2.\end{cases}$

Крім цього, нехай на безмежності температура пластинки та її перші похідні прямують до нуля

$$T\Big|_{(x_1,x_2)\to\infty}=T^*\Big|_{(x_1,x_2)\to\infty}=\frac{\partial T}{\partial x_i}\Big|_{(x_1,x_2)\to\infty}=\frac{\partial T^*}{\partial x_i}\Big|_{(x_1,x_2)\to\infty}=0. /3/$$

Система /1/ зводиться до такої системи незалежних рівнянь

$$\Delta\varphi_m - \varkappa_m^2\varphi_m = -L_m q(X_1,X_2) \quad (m=1,2), \qquad /4/$$

де $\varphi_m = T + \mu_m T^*$, $\mu_m = \dfrac{-(15+7B_i)\pm\sqrt{225+210B_i+124B_i^2}}{45B_i}$,

$\varkappa_m^2 = \dfrac{B_i(2-5\mu_m^2)}{4+B_i}$, $L_m = \dfrac{6+B_i+\mu_m(1-\frac{4}{3}B_i)}{4+B_i}\,\dfrac{\delta}{\lambda}$, $B_i = \dfrac{\alpha\delta}{\lambda}$ – критерій Біо; $X_i = \dfrac{x_i}{\delta}$ $(i=1,2)$ – безрозмірні координати.

Граничні умови /2/, /3/ для функцій φ_m мають вигляд

$$\left.\frac{\partial\varphi_m}{\partial X_i}\right|_{X_i=\pm A_i} M(X_{i\pm1}) = 0,\; A_i = \frac{a_i}{\delta} \;\; (i=1,2;\; m=1,2), \qquad /5/$$

$$\varphi_m\Big|_{(X_1,X_2)\to\infty} = \left.\frac{\partial\varphi_m}{\partial X_i}\right|_{(X_1,X_2)\to\infty} = 0, \qquad /6/$$

де $M(X_i) = S_+(X_i+A_i) - S_-(X_i-A_i)$ – характеристична функція відрізка; $S_\pm(X)$ – асиметричні одиничні функції [3].

Граничну задачу /4/-/6/ розв"язуємо методом продовження функцій [2]. Уводимо нові невідомі функції Φ_m, що збігаються зі шуканими зовні прямокутника $\mathcal{D} = \{(X_1,X_2): |X_1|<A_1, |X_2|<A_2\}$ і дорівнюють нулю у ньому, тобто

$$\Phi_m(X_1,X_2) = \varphi_m(X_1,X_2)\,M(X_1,X_2), \qquad /7/$$

де $M(X_1,X_2) = 1 - M(X_1)M(X_2)$ – характеристична функція області.

Враховуючи правила диференціювання узагальнених функцій та граничні умови /5/ на контурі прямокутника, для функцій Φ_m у просторі узагальнених функцій отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^2\Phi_m}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2\Phi_m}{\partial X_2^2} - \varkappa_m^2\Phi_m = \sum_{i=1}^{2}\Big[\varphi_m\Big|_{X_i=A_i} M(X_{i\pm1})\delta_-'(X_i-A_i) - \varphi_m\Big|_{X_i=-A_i} M(X_{i\pm1})\delta_+'(X_i+A_i)\Big] - L_m q(X_1,X_2)M(X_1,X_2), \qquad /8/$$

де $\delta_\pm'(X)$ – похідні від асиметричних дельта-функцій [3].

Значення функцій φ_m на контурі прямокутника, що входять у рівняння /8/, розкладаємо у ряди Фур"є та підставляємо ці розклади у /8/. Розв"язки отриманих рівнянь записуємо як згортку фундаментального розв"язку рівняння Гельмгольца та їхніх правих частин у вигляді

$$\Phi_m(X_1,X_2) = \sum_{i=1}^{2}\left[\mathcal{X}_{mi}^+(X_1,X_2) - \mathcal{X}_{mi}^-(X_1,X_2)\right] + \mathcal{F}_m(X_1,X_2). \qquad /9/$$

Тут
$$\chi^{\pm}_{mi}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A_{i\pm1}}^{A_{i\pm1}}\left[\frac{1}{2}b^{\pm}_{mi0}+\sum_{n=1}^{\infty}b^{\pm}_{min}\cos\lambda_n^{(i\pm1)}\xi+c^{\pm}_{min}\sin\lambda_n^{(i\pm1)}\xi\right]\times$$
$$\times g_m(x_i\mp A_i,\ x_{i\pm1}-\xi)d\xi,\quad g_m(\xi,\zeta)=\frac{\varkappa_m\xi}{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}K_1(\varkappa_m\sqrt{\xi^2+\zeta^2}),$$

$$\mathcal{F}_m(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R^2\setminus D}q(\xi,\zeta)K_0(\varkappa_m\sqrt{(x_1-\xi)^2+(x_2-\zeta)^2})d\xi d\zeta,$$

$\lambda_n^{(i)}=\frac{\pi n}{A_i}$, $K_i(\xi)(i=0,1)$ – функції Макдональда i -го порядку; $b^{\pm}_{min}$, $c^{\pm}_{min}$ – коефіцієнти Фур"є розкладів функцій $\varphi_m|_{x_i=\pm A_i}$ на контурі прямокутника, які знаходимо із нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$b^{\pm}_{mik}+\sum_{n=0}^{\infty}B_{mink}b^{\pm}_{min}=S^{\pm}_{mik},$$
$$c^{\pm}_{mik}+\sum_{n=1}^{\infty}N_{mink}c^{\pm}_{min}=Q^{\pm}_{mik}, \qquad /10/$$

де
$$S^{\pm}_{mik}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{mink}(b^{+}_{m,i\pm1,n}+b^{-}_{m,i\pm1,n})+\sum_{n=1}^{\infty}R_{mink}(c^{+}_{m,i\pm1,n}+c^{-}_{m,i\pm1,n})+H^{\pm}_{mik},$$
$$Q^{\pm}_{mik}=\sum_{n=0}^{\infty}F_{mink}(b_{m,i\pm1,n}-b_{m,i\pm1,n})\mp\sum_{n=1}^{\infty}M_{mink}(c^{+}_{m,i\pm1,n}-c^{-}_{m,i\pm1,n})+G^{\pm}_{mik},$$
$$B_{mink}=\frac{1}{\pi A_{i\pm1}}\int\limits_0^{2A_{i\pm1}}f_1(\xi,2A_{i\pm1},\lambda_k^{(i\pm1)},\lambda_n^{(i\pm1)})g_m(2A_i,\xi)d\xi,$$

$$N_{mink}=\frac{1}{\pi A_{i\pm1}}\int\limits_0^{2A_{i\pm1}}f_2(\xi,2A_{i\pm1},\lambda_k^{(i\pm1)},\lambda_n^{(i\pm1)})g_m(2A_i,\xi)d\xi,$$

$$f_1(\xi,2b,\lambda_k,\lambda_n)=\begin{cases}2b-\xi, & n=k=0;\\ (2b-\xi)\cos\lambda_k\xi-\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k\xi, & n=k=1,2,\ldots;\\ \frac{2(-1)^{n+k}}{\lambda_n^2-\lambda_k^2}(\lambda_k\sin\lambda_k\xi-\lambda_n\sin\lambda_n\xi), & n\neq k\\ & n,k=0,1,\ldots,\end{cases}$$

$$f_2(\xi,2b,\lambda_k,\lambda_n)=\begin{cases}(2b-\xi)\cos\lambda_k\xi+\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k\xi, & n=k=1,2,\ldots;\\ \frac{(-1)^{n+k}}{\lambda_k^2-\lambda_n^2}(\lambda_k\sin\lambda_n\xi-\lambda_n\sin\lambda_k\xi), & n\neq k\\ & n,k=1,2,\ldots.\end{cases}$$

Значення інших коефіцієнтів системи /10/ через громіздкість одержаних виразів тут не наводимо.

Для коефіцієнтів B_{mink}, N_{mink} на основі властивостей функцій Макдональда отримуємо оцінки

$$B_{mink} = \frac{const}{n^2 k^2} + o\left(\frac{1}{n^2 k^2}\right), \quad N_{mink} = \frac{const}{nk} + o\left(\frac{1}{nk}\right).$$

Аналогічні оцінки отримані для інших коефіцієнтів системи /10/. Ці оцінки дають змогу застосувати до системи /10/ теорію розв"язальності нескінченних систем [1], з якої випливає таке твердження.

<u>Твердження.</u> Система /10/ має єдиний розв"язок, що задовольняє умову

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[b_{min}^{\pm}\right]^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{min}^{\pm}\right]^2 < \infty \quad (m=1,2;\ i=1,2).$$

Наближений розв"язок можна знайти методом редукції.

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977. 2. Колянo Ю.М., Верба И.И. Задача Дирихле для областей с прямоугольными вырезами // Дифференц. уравнения. 1985. Т.21. № 9. С.1624-1626. 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1977. 4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Громовык В.И., Лозбень В.Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. К., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.93

УДК 519.21

Я.І.Єлейко

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ ВІДНОВЛЕННЯ

Нехай x_t – напівмарківський процес зі скінченною множиною станів $\{1,2,\dots,m\}$ та неперервним часом.

Позначимо

$$\tau = \inf\{t>0;\ x_t \neq x_0\};$$
$$F_{ij}(t) = P\{\tau<t,\ x_\tau = j / x_0 = i\};$$
$$F_i(t) = P\{\tau < t / x_0 = i\}.$$

Тоді
$$F_i(t) = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(t).$$

Вважаємо, що всі перехідні ймовірності

$$p_{ij} = P\{x_\tau = j / x_0 = i\} > 0.$$

Тоді, матриця, складена з перехідних ймовірностей, нерозкладна, а отже, існує для вкладеного ланцюга Маркова $x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \dots, x_{\tau_n}, \dots$ єдиний стаціонарний розподіл $\rho_1, \dots, \rho_m$:

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i = 1;\ \sum_{j=1}^{m} \rho_{ji} p_j = \rho_i;\ \rho_i > 0\ \forall i,$$

де $\tau_1 = \tau_1 \tau_2, \dots \tau_n$ – послідовність стрибків процесу.

Розглянемо функцію відновлення

$$U_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t,\ x_{\tau_n} = j\},$$

де P_i – умовна ймовірність за умови $x_0 = i$.

Асимптотика функції відновлення відіграє важливу роль у дослідженні асимптотичних властивостей функціоналів, згаданих на напівмарківському процесі. Вона відома у випадку, коли середній час перебування в станах процесом x_t є скінченним. Якщо, середній час перебування в станах є нескінченним, асимптотика функції відновлення досліджена лише за умови*

$$1 - F_i(t) \sim a_i t^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t}\right),\ t \to \infty, \qquad /1/$$

де $L\left(\frac{1}{t}\right)$ – повільно змінна в нулі функція; $\alpha \in (0,1)$.

* Шуренков В.М., Елейко Я.И. Предельные распределения временных средних для полумарковского процесса с конечным числом состояний // Укр. мат. журн. 1979. № 5. С.598-603.

Визначимо асимптотику функції відновлення у випадку, коли $\alpha = 1$ у формулі /1/.

Теорема. Нехай x_t – напівмарківський процес зі скінченною множиною станів $\{1, 2, \dots, m\}$ і неперервним часом. Якщо

$$F_{ij}(\infty) - F_{ij}(t) \sim a_{ij} \frac{1}{t} L\left(\frac{1}{t}\right),\ t \to \infty, \qquad /2/$$

то

$$U_{ij}(t) \sim \frac{1}{m_i(t)} \int_0^\infty c_{ij}(u)\,du,\ t \to \infty,$$

де

$$m_i(t) = \int_0^t P_i\{\tau_i > u\}\,du;$$

$$c_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t,\ \tau_i > t,\ x_{\tau_n} = j\};$$

τ_i – момент першого повернення у стан i.

Доведення. Згідно з формулою повної ймовірності за моментом першого повернення у стан

$$\begin{aligned} U_{ij}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_i > t,\ x_{\tau_n} = j,\ \tau_n < t\} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^t P_i\{\tau_i \in dy,\ \tau_i = \tau_k\} P_i\{\tau_{n-k} < t-y,\ x_{\tau_{n-k}} = j\} = \\ &= c_{ij}(t) + \int_0^t P_i\{\tau_i \in dy\} U_{ij}(t-y). \end{aligned} \qquad /3/$$

Рівняння /3/ є рівнянням відновлення. Його розв"язок записуємо у вигляді

$$U_{ij}(t) = \int_0^t c_{ij}(t-y)\,\hat{U}_i(dy),$$

де

$$\hat{U}_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}_i^{n*}(t),$$

$$\hat{F}_i^{0*}(t) = 1,\ t > 0,$$

$$\hat{F}^{1*}(t) = P_i\{\tau_i < t\},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\hat{F}_i^{n*}(t) = \int_0^t \hat{F}_i^{n-1*}(t-u)\,\hat{F}_i(du).$$

$\hat{U}_i(t)$ – функція відновлення, побудована за функцією розподілу $\hat{F}_i(t)$. З умов теореми випливає, що

$$1 - \hat{F}_i(t) \sim c_i \frac{1}{t} L\left(\frac{1}{t}\right),\ t \to \infty, \qquad /4/$$

де

$$c_i = \sum_{i_1 \neq i, \dots, i_n \neq i} p_{ii_1} \cdots p_{i_{n-1}i} \frac{1}{t} L\left(\frac{1}{t}\right)\left(a_{ii_1} + \dots + a_{i_{n-1}i}\right). \qquad /5/$$

Ряд/ /4/ є збіжним, оскільки мажорантним рядом є ряд

$$\sum_n p^n n a ,$$

де $p = \max_{i,j} p_{ij}$, $a = \max_{i,j} a_{ij}$.
Оскільки згідно з /4/ $1 - \hat{F}_i(t)$ є правильно змінною з параметром $\alpha = 1$, тоді

$$\hat{U}_i(t) \sim \frac{t}{m_i(t)} , \quad t \to \infty .$$

З умов теореми випливає також, що $c_{ij}(t) = O(\frac{1}{t}), t \to \infty$.
Тоді відповідно до вузлової теореми відновлення

$$U_{ij}(t) = \int_0^t c_{ij}(t-u)\,\hat{U}_i(du) \sim$$

$$\sim \frac{1}{m_i(t)} \int_0^\infty c_{ij}(u)\,du .$$

Теорема доведена.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.93

УДК 511

Я.М.Холявка

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДІВ ТА МОДУЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ

Нехай $sn\, z$ – еліптична функція Якобі, $\varkappa$ – модуль $sn\, z$; $4\omega, 2\omega'$ – довільна фіксована пара основних періодів [1], ξ_1, ξ_2, ξ_3 – наближувальні алгебраїчні числа, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $L = \ln n + \sum_{i=1}^{3} \ln L(\xi_i)(\deg \xi_i)^{-1}$.

Теорема. Існує ефективна постійна $\Lambda = \Lambda(\varkappa)$ така, що

$$|\omega - \xi_1| + |\omega' - \xi_2| + |\varkappa - \xi_3| > \exp(-\Lambda n^2 L^2).$$

Доводимо цю теорему другим методом Гельфонда з таким вибором допоміжної функції та параметрів:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}\, z^k sn^l z ;$$

$4m\xi_1 + 2t\xi_2$, $m, t \in \mathbb{Z}, |m|, |t| < N$ – вузли інтерполяції;

$$K = \lambda^4 n L,\ L = \lambda^{-3} \ln \lambda K,\ N = \lambda^{-1}\sqrt{K},\ S = \lambda L ,$$

де λ – достатньо велике число; S – порядок похідної. В основ-ній лемі Гельфонда порядок похідної залишається той самий, а множина точок інтерполяції розширюється до $|m|,|t|<\lambda N$.

Протиріччя, яке доводить теорему, отримуємо з оцінки нулів $F(z)$ і теореми про нулі [2], теорема I.

При алгебраїчних періодах отримуємо оцінку модуля еліптичних функцій Якобі. Для еліптичних функцій Вейєрштрасса подібні оцінки отримані у праці [3].

1. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., 1968.
2. Brownawell W.D., Masser D.W. Multiplicity estimates for analitic functions (I)// J.Reine Angew.Math. 1980. Vol. 314. P.200–216.
3. Холявка Я.М. О совместных приближениях инвариантов эллиптической функции алгебраическими числами: Диофантовы приближения. В 2 ч. М., 1986. Ч.2. С.114.121.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.93

УДК 539.377

Б.В.Ковальчук, О.І.Гой

УЗАГАЛЬНЕНЕ ЕНЕРГЕТИЧНЕ РІВНЯННЯ І ТЕОРЕМА ЄДИНОСТІ РОЗВ"ЯЗКУ КРАЙОВОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА

У монографії [3] наведені диференціальні рівняння узагальненої термопружності анізотропних тіл для випадку, коли час релаксації теплового потоку є однаковим для всіх напрямів. У багатьох випадках час релаксації теплового потоку має різні значення для головних напрямів, і тоді узагальнений закон теплопровідності набуває вигляду

$$\left(1+\tau_p \frac{\partial}{\partial \tau}\right) q_p = -\lambda^t_{pj}\, t_{,j} \quad (p,j=1,2,3), \qquad /1/$$

де τ_p – час релаксації теплового потоку в напрямі осі x_p; λ^t_{pj} – коефіцієнти теплопровідності; q_p – компоненти вектора теплового потоку; t – температурне поле.

На основі /1/ у праці [1] одержані інтегродиференціальні рівняння теплопровідності анізотропного тіла, які враховують ортотропію часу релаксації теплового потоку для головних напрямів.

Для такої релаксаційної моделі виводимо узагальнену формулу закону збереження енергії для термопружного середовища, тобто одержуємо основне енергетичне рівняння, і за допомогою цього рівняння доводимо теорему єдиності і розв"язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла.

Основне енергетичне рівняння. Вважаємо, що анізотропне тіло, яке займає область Ω, обмежену поверхнею S, у початковому стані має температуру t_0. Унаслідок дії теплових або силових факторів тіло буде деформуватися, а його температура змінюватись. У тілі виникатимуть переміщення $u_i(x,\tau)$ і приріст температури $\theta = t - t_0 \quad (x \in \Omega,\ \tau > 0)$.
Зміна температури спричиняє виникнення деформацій e_{ij} і напружень σ_{ij}, які є функціями координат x_i і часу τ

Якщо припустити, що зміна температури невелика і не спричиняє істотних змін властивостей, матеріалу, то в цьому випадку співвідношення Дюгамеля-Неймана для анізотропного тіла записуємо як [2, 3]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, e_{kl} - \beta_{ij}\theta \quad (i,j = 1,2,3). \qquad /2/$$

Тут C_{ijkl} – декартові компоненти тензора пружної жорсткості анізотропного тіла; $\beta_{ij} = \alpha^t_{kl} C_{ijkl}$, де α^t_{ij} – температурні коефіцієнти лінійного розширення анізотропного тіла.

Для виведення енергетичного рівняння виходимо з рівняння руху:

$$\sigma_{ij} + x_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (i,j = 1,2,3), \qquad /3/$$

де x_i – компоненти вектора масових сил.

Підставивши /2/ в рівняння руху /3/, дістанемо рівняння

$$C_{ijkl}\, u_{k,lj} + x_i = \rho \ddot{u}_i + \beta_{ij}\theta_{,j}\ . \qquad /4/$$

Помноживши тепер рівняння /4/ на $v_i = \dot{u}_i$, зінтегруємо його по області Ω, а потім застосуємо теорему Гаусса-Остроградського. У результаті одержимо рівняння

$$\frac{dK}{d\tau} + \frac{dW_e}{d\tau} = \int_\Omega x_i v_i\, d\Omega + \int_S p_i v_i\, dS + \int_\Omega \beta_{ij}\dot{e}_{ij}\theta\, d\Omega, \quad /5/$$

де

$$K = \frac{\rho}{2}\int_\Omega v_i v_i\, d\Omega\ , \quad W_e = \frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}\, e_{kl}\, d\Omega\ . \qquad /6/$$

Формула /5/ виражає закон збереження енергії для термопружного тіла. Для явного врахування температурних факторів у рівнянні /5/ використаємо інтегродиференціальне рівняння узагальненої термопружності анізотропного тіла.

Допустивши, що в початковий момент часу швидкість нагрівання та швидкість переміщення дорівнюють нулю і внутрішні джерела тепла відсутні, інтегродиференціальне рівняння теплопровідності запишемо у вигляді [1]

$$\frac{\lambda_{ij}^{t}}{\tau_i}\int_0^{\tau}\theta_{,ij}(M,\zeta)\exp\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}d\zeta=t_0\beta_{ij}\dot{e}_{ij}+c_e\dot{\theta}-\omega_t, \qquad /7/$$

де c_e – об"ємна теплоємність за сталої деформації; ω_t – густина внутрішніх джерел тепла. При цьому враховано, що на основі співвідношення Коші $e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ з умови $\dot{u}|_{\tau=0}=0$ випливає, що в початковий момент часу швидкість деформацій $\dot{e}_{ij}|_{\tau=0}=0$.

Помноживши рівняння /7/ на θ та зінтегрувавши по області Ω, матимемо

$$\frac{\lambda_{ij}^{t}}{\tau_i}\int_{\Omega}\left[\int_0^{\tau}\theta(M,\tau)\theta_{,ij}(M,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta\right]d\Omega=$$

$$=t_0\int_{\Omega}\beta_{ij}\dot{e}_{ij}\theta d\Omega+c_l\int_{\Omega}\theta\dot{\theta}d\Omega-\int_{\Omega}\theta\omega_t d\Omega. \qquad /8/$$

Із рівнянь /5/ і /8/, врахувавши співвідношення $(\lambda_{ij}^{t}\theta_{,i}\theta)_{,j}=$ $=\lambda_{ij}^{t}\theta\theta_{,ij}+\lambda_{ij}^{t}\theta_{,i}\theta_{,j}$ після застосування теореми Гаусса-Остроградського одержимо основне енергетичне рівняння

$$\frac{dP_t}{d\tau}+\frac{dK}{d\tau}+\frac{dW_e}{d\tau}+\mathcal{X}_t=\int_{\Omega}x_i v_i d\Omega+\int_S p_i v_i dS+$$

$$+\frac{1}{t_c}\int_{\Omega}\theta\omega_t d\Omega+\frac{\lambda_{ij}^{t}}{t_c\tau_i}\int_S\left[\int_0^{\tau}\theta(M,\tau)\theta_{,i}(M,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta\right]n_j dS, \qquad /9/$$

де функції теплової енергії і диссипації мають вигляд

$$P_t=\frac{c_e}{2t_0}\int\limits_{\Omega}\theta^2 d\Omega,\ \chi_t=\frac{\lambda_{ij}^t}{t_0\tau_i}\int\limits_{\Omega}\Big[\int\limits_0^{\tau}\theta_{,j}(M,\tau)\theta_{,i}(M,\zeta)\exp\Big(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\Big)d\zeta\Big]d\Omega. \quad /10/$$

Ми одержали узагальнений закон збереження енергії для термопружного середовища. Права частина формули /9/ містить джерела, які створюють поле деформації і температури.

<u>Теорема єдиності</u>. Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω з поверхнею S, піддається дії масових сил X_i, поверхневих сил P_i, а також внутрішніх джерел тепла і нагрівання на поверхні.

Припускаємо, що переміщення $u_i(x,\tau)$, які виникають при цьому, і температура $t(x,\tau)$ є функціями класу $C^{(2)}$, а деформації e_{ij} та напруження σ_{ij} – функціями класу $C^{(1)}$ для $x\in\Omega+S,\ \tau>0$.

За таких умов доведемо теорему єдиності розв"язків рівнянь /4/ і /7/, прийнявши такі крайові умови:

$$P_i(p,\tau)=\sigma_{ij}(p,\tau)n_j,\ \theta(p,\tau)=\theta_c^S(p,\tau),\ p\in S,\ \tau>0, \quad /11/$$

$$u_i(M,0)=\varphi_i(M),\ \dot u_i(M,0)=\psi_i,\ \theta(M,0)=\theta_N(M),\ M\in\Omega. \quad /12/$$

Нехай u_i',θ' і u_i'',θ'' – різні розв"язки системи рівнянь /4/, /7/ є крайовими умовами /11/, /12/. Тоді величини $u_i^*=u_i'-u_i''$, $\theta^*=\theta'-\theta''$, а також $e_{ij}^*=e_{ij}'-e_{ij}''$, $\sigma_{ij}^*=\sigma_{ij}'-\sigma_{ij}''$ будуть задовольняти такі співвідношення:

$$c_{ijkl}u^*_{k,lj}=\rho\ddot u_i^*+\beta_{ij}\theta^*_{,j}, \quad /13/$$

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\int\limits_0^{\tau}\theta^*_{,ij}(M,\zeta)\exp\Big(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\Big)d\zeta=t_0\beta_{ij}\dot e_{ij}^*+c_l\dot\theta^*, \quad /14/$$

$$P_i^*(p,\tau)=0,\ \theta^*(p,\tau)=0,\ p\in S,\ \tau>0, \quad /15/$$

$$u_i^*(M,0)=0,\ \dot u_i^*(M,0)=0,\ \theta^*(M,0)=0,\ M\in\Omega. \quad /16/$$

Оскільки всередині тіла $X_i^*=0$, $\omega_t^*=0$, а на поверхні $P_i^*=0$, $\theta^*=0$, то на основі /9/ маємо

$$\frac{d}{d\tau}(K^*+W_e^*+P_t^*)+\chi_t^*=0. \quad /17/$$

Якщо зауважити, що вираз $\lambda_{ij}^{t}\theta_{,j}^{*}(M,\tau)\theta_{,i}^{*}(M,\zeta)$ є достатньо визначеною квадратичною формою, то умову /I7/ можна записати так

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}c_{ijkl}e_{ij}^{*}e_{kl}^{*}+\frac{\rho}{2}v_i^{*}v_i^{*}+\frac{c_l}{2\tau}\theta^{*2}\right]d\Omega=$$

$$=-\frac{\lambda_{ij}^{t}}{t_0\tau_i}\int_{\Omega}\left[\int_0^{\tau}\theta_{,j}(M,\tau)\theta_{,i}(M,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta\right]d\Omega\leq 0. \qquad /I8/$$

Зауваживши також, що робота деформації на одиницю об"єму є додатньо визначеною квадратичною формою, зведемо її до суми квадратів за методом Якобі [3].

$$W_e^{*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\right)\varphi_k^{*2}, \quad \Delta_0=1, \qquad /I9/$$

де $\quad \Delta_k=\det(c_{m,n})_k \quad (m,n=1,2,\dots,k), \qquad /20/$

а $\quad \varphi_k^{*}=\sum_{n=1}^{6}c_{kn}e_n^{*} \quad (k=1,2,\dots,6), \qquad /2I/$

причому $c_{kn}=0$ при $k>n$.

Нарешті, використавши співвідношення

$$e_{ij}^{*}=\begin{cases} e_i^{*} & \text{для } i=j,\\ \frac{1}{2}e_{9-i-j}^{*} & \text{для } i\neq j,\end{cases} \qquad /22/$$

і врахувавши /I9/, умову /I7/ можна записати як

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\right)\varphi_k^{*2}+\frac{1}{2}\rho v_i^{*}v_i^{*}+\frac{c_e}{2t_0}\theta^{*2}\right]d\Omega\leq 0. \qquad /23/$$

Із /23/ випливає, що при $\tau>0$ інтеграл зліва не зростає, а з іншого боку при $\tau=0$ на основі /I6/ перетворюється в нуль. Проте оскільки підінтегральна функція додатна, то це можливе тільки за умови, коли інтеграл дорівнює нулю. Звідси у свою чергу випливає, що $\varphi_k^{*}=0$, $v_i^{*}=0$, $\theta^{*}=0$ для $\tau>0$ в області Ω. Врахувавши ці умови, із /2I/ одержимо, що $e_i^{*}=0$, тобто $e_{ij}^{*}=0$, а отже, на основі /2/ і $\sigma_{ij}^{*}=0$. Згідно з одержаними умовами, доходимо висновку, що $\sigma_{ij}'=\sigma_{ij}''$, $e_{ij}'=e_{ij}''$; $\theta'=\theta''$ для $\tau>0$ в області Ω.

Таким чином, ми довели, що розв"язок задачі термопружності єдиний для напружень, деформацій і температури, а для переміщень маємо $u'_i = u''_i +$ лінійний член, який відповідає жорсткому поворотові і переміщенню.

1. К о л я н о Ю.М., К о в а л ь ч у к Б.В., Г о й О.И. Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела, учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока // Изв. высших уч. заведений. Математика. 1988. № 9. С.81-83. 2. Н о в а ц к и й В. Теория упругости. М., 1975. 3. П о д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 5.05.93

УДК 517.956

В.С.Грицевич, Б.В.Ковальчук

РОЗВ"ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ПРЯМОКУТНІЙ ТОНКІЙ ПЛАСТИНЦІ, ЩО НАГРІВАЄТЬСЯ ПРОГРАМОВАНИМ РУХОМИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Нехай прямокутна у плані тонка пластинка, яка займає область $0 \leq x_1 \leq D_1,\ 0 \leq x_2 \leq D_2$, нагрівається точковим джерелом тепла, що рухається кусково-лінійною траєкторією за такою програмою:

$$x_i^* = x_i^K + v_i^K(\tau - \tau^K),\ i=1,2;\ \tau \in [\tau^K, \tau^{K+1}],$$

де $0, \tau^1, \ldots, \tau^N$ задані вузлові моменти часу;

$$v_i^K = (x_i^{K+1} - x_i^K)/\Delta\tau^K, \quad \Delta\tau^K = \tau^{K+1} - \tau^K.$$

Програма інтенсивності нагрівання задається формулою

$$W(\tau) = \sum_{K=0}^{N-1} W_K [S_+(\tau - \tau^K) - S_+(\tau - \tau^{K+1})].$$

Розглянемо нестаціонарну задачу теплопровідності для цієї пластинки за умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$-\Delta T + \varkappa^2 T \ \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{W(\tau)}{2\lambda h}\delta(x_1 - x_1^*(\tau), x_2 - x_2^*(\tau)) S_+(\tau),$$

$$\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T\right)\Big|_{\Gamma} = 0,\ T\Big|_{\tau=0} = 0,\ \varkappa^2 = \frac{\alpha_z}{\lambda h}.$$

Розв"язок задачі шукаємо у вигляді розкладу за системою ортонормованих функцій:

де $\quad X_{ij}(x_1,x_2)=\varphi_{1i}(x_1)\,\varphi_{2j}(x_2),\ \varphi_{sr}(x_s)=\dfrac{\nu_{sr}\cos\nu_{sr}x_s+\beta\sin\nu_{sr}x_s}{\sqrt{\frac{1}{2}(\nu_{sr}^2+\beta^2)D_s+\beta}}$,

ν_{sr} — r -й корінь трансцендентного рівняння

$$tg\, D_s\nu_{sr}=\frac{2\beta\nu_{sr}}{\nu_{sr}^2-\beta^2}\ ;\quad s=1,2;\ r=1,2,3,\dots;\ \beta=\frac{\alpha}{\lambda}\ .$$

Невідомі функції $T_{ij}(\tau)$ знаходимо у вигляді інтеграла

$$T_{ij}(\tau)=\frac{a}{2\lambda h}\int\limits_0^\tau W(\xi)X_{ij}\Big|_{\substack{x_1=x_1^*(\tau)\\ x_2=x_2^*(\tau)}} e^{-\rho_{ij}(\tau-\xi)}d\xi\ ,$$

де $\rho_{ij}=a(\mu_{ij}+\varkappa^2)$, $\mu_{ij}=\nu_{1i}^2+\nu_{2j}^2$.

Шукане температурне поле має вигляд

$$T(x_1,x_2,\tau)=\frac{a}{2\lambda h}\sum_{k=0}^{N-1}W_k\,\Phi_k(x_1,x_2,\tau),$$

де

$$\Phi_k(x_1,x_2,\tau)=\sum_{i,j=1}^{\infty}e^{-\rho_{ij}(\tau-\tau^k)}X_{ij}(x_1,x_2)\ \times$$

$$\times\left[f_{ij}^{k+}(\Delta\tau^k)R_{ij}^{k+}+g_{ij}^{k+}(\Delta\tau^k)S_{ij}^{k+}+f_{ij}^{k-}(\Delta\tau^k)R_{ij}^{k-}+g_{ij}^{k-}(\Delta\tau^k)S_{ij}^{k-}\right],$$

$$\omega_{ij}^{k\pm}=\frac{\nu_{1i}v_1^k\pm\nu_{2j}v_2^k}{2}\ ,$$

$$f_{ij}^{k\pm}(\eta)=e^{\rho_{ij}\eta}\cos(\omega_{ij}^{k\pm}\eta)-1,\ g_{ij}^{k\pm}(\eta)=e^{\rho_{ij}\eta}\sin(\omega_{ij}^{k\pm}\eta),$$

$$R_{ij}^{k\pm}=\frac{\rho_{ij}P_{ij}^{k\pm}-\omega_{ij}^{k\pm}Q_{ij}^{k\pm}}{\rho_{ij}^2+(\omega_{ij}^{k\pm})^2},\quad S_{ij}^{k\pm}=\frac{\omega_{ij}^{k\pm}P_{ij}^{k\pm}+\rho_{ij}Q_{ij}^{k\pm}}{\rho_{ij}^2+(\omega_{ij}^{k\pm})^2}\ ,$$

$$P_{ij}^{k\pm}=\frac{A_{ij}^k\mp D_{ij}^k}{2}\ ,\quad Q_{ij}^{k\pm}=\frac{B_{ij}^k\pm C_{ij}^k}{2}\ ,$$

$$A_{ij}^k=G_{1i}^k\,G_{2j}^k\ ,\quad B_{ij}^k=G_{1i}^k\,H_{2j}^k\ ,$$

$$C_{ij}^k=H_{1i}^k\,G_{2j}^k\ ,\quad D_{ij}^k=H_{1i}^k\,H_{2j}^k\ ,$$

$$G_{sr}^k=\nu_{sr}\cos(\nu_{sr}x_s^k)+\beta\sin(\nu_{sr}x_s^k)\ ,$$

$$H_{sr}^k=-\nu_{sr}\sin(\nu_{sr}x_s^k)+\beta\cos(\nu_{sr}x_s^k).$$

Отже, з використанням апарату симетричних та асиметричних узагальнених функцій, можна розв"язувати задачі теплопровідності для тонкої пластинки із джерелом тепла, що рухається довільною ламаною траєкторією і має змінну в часі потужність.

Стаття надійшла до редколегії 5.05.93

УДК 517.956

В.С.Грицевич

ДВОВИМІРНІ АСИМЕТРИЧНІ УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Вивчення двовимірних узагальнених сингулярних функцій є актуальним з огляду на застосування їх для розв"язування конкретних задач математичної фізики [1, 4, 6]. Однак автори розглядають сингулярні узагальнені функції як джерела зосереджених фізичних впливів, тому обмежуються розглядом симетричних узагальнених функцій. Водночас узагальнені функції можна застосовувати також з іншою метою - для моделювання неоднорідних фізичних параметрів композитних тіл. У цьому випадку з теоретико-числового погляду /розрізи Дедекінда/ найбільш коректним є застосування асиметричних узагальнених функцій /АУФ/. Одновимірні АУФ вже досліджені у працях [2, 3, 5].

Розглянемо обмежену плоску відкриту область з кусково-гладкою межею Γ, σ - розбиття V на підобласті з кусково-гладкими межами, що не перетинається, $V=\bigcup_{m=1}^{M} V_m$. Нехай $\{\Gamma_K\}, K=\overline{1,N}$ - множина ребер, які розділяють підобласті так, що ребро Γ_K розміщене між підобластями з номерами z_K^1 та z_K^2 і належить $V_{z_K^2}$, а вектор нормалі $\bar{n}_K$ напрямлений від $V_{z_K^1}$ до $V_{z_K^2}$. Позначимо через $S_m(\bar{x})$ характеристичну функцію m-ї підобласті.

Нехай K -деяка множина функцій, визначених у V. Назвемо K_* Σ -розширенням множини K, якщо довільну функцію $f\in K_*$ можна зобразити у вигляді

$$f(\bar{x})=\sum_{m=1}^{M} f_m(\bar{x})S_m(\bar{x}),$$

де $f_m(\bar{x})\in K, m=\overline{1,M}$. Очевидно, $K\subset K_*$, оскільки $\sum_{m=1}^{M} S_m(\bar{x})=1$ у V. Якщо K утворює кільце відносно додавання і множення,

то легко бачити, що K_* також утворює кільце з операціями, визначеними таким чином:
для довільних $u(\bar{x}), v(\bar{x}) \in K_*$

$$u(\bar{x}) + v(\bar{x}) = \sum_{m=1}^{M} \left[u_m(\bar{x}) + v_m(\bar{x}) \right] S_m(\bar{x}),$$

$$u(x) \cdot v(\bar{x}) = \sum_{m=1}^{M} u_m(\bar{x}) v_m(\bar{x}) S_m(\bar{x}).$$

Якщо $v(\bar{x}) \neq 0$, то можна визначити також операцію ділення за формулою

$$\frac{u(\bar{x})}{v(\bar{x})} = \sum_{m=1}^{M} \frac{u_m(\bar{x})}{v_m(\bar{x})} S_m(\bar{x}).$$

Коректність уведених операцій перевіряється тривіально.

Нехай $\mathcal{D}(V)$ позначає множину нескінченно-диференційовних фінітних функцій, заданих у V . Як множину основних функцій оберемо $\mathcal{D}_*(V)$, тобто Σ -розширення $\mathcal{D}(V)$. На $\mathcal{D}_*(V)$ визначимо класичну похідну у цацрямі $\bar{z}$ за формулою

$$\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial \psi_m}{\partial z} S_m(\bar{x}) \quad \text{для} \quad \psi \in \mathcal{D}_*(V).$$

Легко бачити, що $\mathcal{D}_*(V)$ замкнута відносно операції класичного диференціювання. Визначимо збіжність у $\mathcal{D}_*(V)$ таким чином. Послідовність $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ із $\mathcal{D}_*(V)$ збігається до функції $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$, якщо існує така відкрита множина V' , що $\bar{V}' \subset V$, $supp\ \psi^{(K)} \subset V$ і при кожному $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ послідовність класичних похідних $\{D^{\kappa} \psi^{(K)}(\bar{x})\}$ рівномірно прямує до $\{D^{\alpha}\psi(\bar{x})\}$ при $K \to \infty$, де $D^{\alpha} = \partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} / \partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}$
Множина $\mathcal{D}_*(V)$ із введеною на ній збіжністю утворює простір основних функцій $\mathcal{D}_*(V)$

Розглянемо $\mathcal{D}'_*(V)$ - множину лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}_*(V)$; $f \in \mathcal{D}'_*(V)$ означає, що кожній $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$ відповідає число (f, ψ) . Елементи множини $\mathcal{D}'_*(V)$ назвемо асиметричними узагальненими функціями. Слабу збіжність у $\mathcal{D}'_*(V)$ визначимо як збіжність відповідних значень функціоналів. Тим самим $\mathcal{D}'_*(V)$ перетворюється у простір АУФ. Рівність узагальнених функцій $f, g \in \mathcal{D}'_*(V)$ визначимо за умовою $(f,\psi) = (g,\psi)$ для всіх $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$.

Нехай $C^{\infty}_*(V)$ є Σ - розширенням простору $C^{\infty}(V)$. Очевидно, $\mathcal{D}_*(V) \subset C^{\infty}_*(V)$. Довільну $f \in C^{\infty}_*(V)$ можна розглядати як лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{D}_*(V)$, отже, у цьому розумінні $C^{\infty}_*(V) \subset \mathcal{D}'_*(V)$.

Визначимо на $C_*^{\infty}(V)$ операцію диференціювання у напрямі $\bar{z}$ за формулою

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \psi\right) = -\left(f, \left\{\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\}\right) - \sum_{K=1}^{N} \int_0^{l_K} f\Big|_{\Gamma_K} [\psi]_K \cos(\bar{n}_K, \bar{z})\, dy_K ,$$

для довільних $f \in C_*^{\infty}(V), \psi \in \mathcal{D}_*(V)$

де

$$[p]_K = p\Big|_{\Gamma_K} - p\Big|_{\Gamma_K^-}, \quad p\Big|_{\Gamma_K^-} = \lim_{\substack{\bar{x} \to \Gamma_K \\ \bar{x} \in V_{z_K^1}}} p(\bar{x}) ;$$

l_K – довжина ребра Γ_K .

Нехай $\mu(y_K)$ – неперервна на $[0, l_K]$. Визначимо АУФ $\mu\delta_K^- \in \mathcal{D}_*'(V)$ за співвідношеннями:

$$\frac{\partial^i}{\partial n_K^i}(\mu\delta_K^-), \psi) = (-1)^i \int_0^{l_K} \mu \frac{\partial^i \psi}{\partial n_K^i}\Big|_{\Gamma_K^-} dy_K ,$$

де $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Легко бачити, що

$$\frac{\partial^i}{\partial n_K^i}(\mu\delta_K^-) S_m(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{\partial^i}{\partial n_K^i}(\mu\delta_K^-), & z_K^1 = m; \\ 0, & z_K^1 \neq m. \end{cases}$$

Оскільки функції з $C_*^{\infty}(V)$ локально інтегровані у V і $C_*^{\infty}(V)$ замкнута відносно операції множення, визначимо вид функціонала таким чином

$$(u, \psi) = \int_V u\psi\, dV .$$

<u>Теорема 1.</u> Нехай $u(\bar{x}) \in C_*^{\infty}(V)$. Тоді

$$\operatorname{grad} u = \sum_{m=1}^{M} \operatorname{grad}(u_m) S_m(\bar{x}) + \sum_{K=1}^{N} [u]_K \bar{n}_K \delta_K^- . \qquad /1/$$

<u>Доведення.</u> Для довільної $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$ розглянемо перетворення

$$(\operatorname{grad} u, \psi) = -(u, \{\operatorname{grad} \psi\}) -$$
$$- \sum_{K=1}^{N} \int_0^{l_K} u\Big|_{\Gamma_K} [\psi]_K \bar{n}_K\, dy_K = -\sum_{m=1}^{M} \int_{V_m} u_m \operatorname{grad} \psi_m\, dV_m -$$
$$- \sum_{K=1}^{N} u\Big|_{\Gamma_K} [\psi]_K \bar{n}_K\, dy_K = \sum_{K=1}^{N} \int_0^{l_K} [u\psi]_K \bar{n}_K\, dy_K +$$
$$+ \int_V \{\operatorname{grad} u\} \psi\, dV - \sum_{K=1}^{N} u\Big|_{\Gamma_K} [\psi]_K \bar{n}_K\, dy_K =$$
$$= (\{\operatorname{grad} u\}, \psi) + \sum_{K=1}^{N} ([u]_K \bar{n}_K \delta_K^-, \psi),$$

15-2846

звідки з огляду на довільність ψ випливає твердження теореми.

Якщо $\bar{W}(\bar{x})$ – векторна функція, компоненти якої належать $C_*^\infty(V)$, то можна аналогічно показати, що

$$div\ \bar{w} = \sum_{m=1}^{M} div(\bar{w}_m)S_m(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{N}[\bar{w}]_k^T \bar{n}_k \delta_k^- . \qquad /2/$$

Два потрібних наслідки отримаємо, помноживши обидві частини формул /I/ і /2/ на $S_m(\bar{x})$ і виконавши перетворення

$$S_m grad\ u_m = S_m grad\, u + \sum_{k,\tau_k^1=m}[u]_k \bar{n}_k \delta_k^- , \qquad /3/$$

$$S_m div\ \bar{w}_m = S_m div\ \bar{w} + \sum_{k,\tau_k^1=m}[\bar{w}]_k^T \bar{n}_k \delta_k^- . \qquad /4/$$

Якщо у формулах /I/, /2/ замість $u, \bar{w}$ прийняти відповідно $S_m u$, $S_m \bar{w}$, то отримаємо такі співвідношення:

$$grad(S_m u) = S_m grad\, u_m - \sum_{k,\tau_k^1=m} u\Big|_{\Gamma_k^-} \bar{n}_k \delta_k^- + \sum_{k,\tau_k^2=m} u\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- , \qquad /5/$$

$$div(S_m \bar{w}) = S_m div\, \bar{w}_m - \sum_{k,\tau_k^1=m} \bar{w}^T\Big|_{\Gamma_k^-} \bar{n}_k \delta_k^- + \sum_{k,\tau_k^2=m} \bar{w}^T\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- , \qquad /6/$$

які з урахуванням /3/, /4/ перетворюються до вигляду

$$grad(S_m u) = S_m grad\, u - \sum_{k,\tau_k^1=m} u\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- + \sum_{k,\tau_k^2=m} u\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- , \qquad /7/$$

$$div(S_m \bar{w}) = S_m div\, \bar{w} - \sum_{k,\tau_k^1=m} \bar{w}^T\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- + \sum_{k,\tau_k^2=m} \bar{w}^T\Big|_{\Gamma_k} \bar{n}_k \delta_k^- . \qquad /8/$$

<u>Теорема 2.</u> Якщо $u(\bar{x}) \in C_*^\infty(V)$, то

$$\Delta u = \sum_{m=1}^{M} S_m \Delta u_m + \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial u}{\partial n_k}\right]_k \delta_k^- + \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial n_k}\left([u]_k \delta_k^-\right). \qquad /9/$$

Доведення. Доведемо спочатку, що $div(\bar{n}_k \mu \delta_k^-) = \frac{\partial}{\partial n_k}(\mu \delta_k^-)$. Дійсно, для довільної $\psi \in \mathcal{D}_*(V)$ маємо

$$(div(\bar{n}_k \mu \delta_k^-), \psi) = -\int_0^{l_k} \bar{n}_k^T \mu\, grad\, \psi\, dy_k =$$

$$= -\int_0^{l_k} \mu \frac{\partial \psi}{\partial n_k}\, dy_k = \left(\frac{\partial}{\partial n_k}(\mu \delta_k^-), \psi\right).$$

Тоді використавши /I/, /2/ отримуємо

$$\Delta u = div\left(\sum_{m=1}^{M} S_m\, grad\, u_m\right) + \sum_{K=1}^{N} div\left([u]_K \bar{n}_K \delta_K^-\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{M} S_m \Delta u_m + \sum_{K=1}^{N} \left[\frac{\partial u}{\partial n_K}\right]_K \delta_K^- + \sum_{K=1}^{N} \frac{\partial}{\partial n_K}\left([u]_K \delta_K^-\right).$$

Таким чином теорема доведена.

I. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976. 2. Коляно Ю.М., Процюк Б.В. Термоупругость неоднородных и кусочнооднородных пластин, обладающих цилиндрической анизотропией // Обобщен. функции в термоупругости. К., 1980. С. 3-19. 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1973. 4. Ляшко И.И., Емельянов Б.Ф., Боярчук А.Ф. Основы классического и современного математического анализа. К., 1988. 5. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984. 6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: 5-е изд. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 5.05.93

ЗМІСТ

Збірник наукових праць

Міністерство освіти України

Вісник Львівського університету

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

Випуск 40

ПИТАННЯ АЛГЕБРИ
I МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Редактор Е.А.Г л а в а ц ь к а
Художній редактор Е.А.К а м е н щ и к
Технічний редактор С.Д.Д о в б а
Коректор Р.Р.Г а м а д а

Підп. до друку 28.07.94. . Формат 60х84/16.
Папір офсет. Умовн. друк. арк. 6,97.
Умовн. фарбо-відб. 7,16. Обл.-вид. арк. 6,23.
Вид. № 28. Зам. 2846. Замовне.

Видавництво "Світ" при Львівському держуніверситеті.
290000 Львів, вул. Університетська, 1.

Львівська обласна книжкова друкарня,
290000 Львів, вул. Стефаника, 11.

ISSN 0201-758X. ISSN 0320-6572.
Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1994. Вип. 40. 1—120.