УДК 519.61

М.Я.Бартіш, С.М.Шахно, В.О.Ломіковський, А.І.Чипурко

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У праці [1] для розв"язування нелінійної задачі найменших квадратів ми запропонували методи, які є своєрідною комбінацією різних методів. Як показують чисельні результати, наведені нижче, за допомогою такого підходу можна отримати нові методи, які є ефективнішими від базових методів у сенсі кількості обчислень /менша кількість ітерацій, менший час рахунку/ та надійнішими в роботі /збіжність з ширшої області/. Крім цього, запропоновані методи дають змогу розв"язувати системи нелінійних рівнянь, в яких кількість рівнянь дорівнює або більша від кількості невідомих, а також системи, в яких визначник матриці Якобі перетворюється в нуль. Для порівняння брали метод Брауна [5], класичний метод Ньютона та різні варіанти методу Ньютона з оптимальним вибором кроку та частковою /ЧРАМН/ або повною /РАМН/ регуляризацією за А.М.Тихоновим. Останні методи /РАМН, ЧРАМН/, згідно з дослідженнями [5], виявились найбільш ефективними і надійними.

Розглянемо задачу знаходження розв"язку рівняння

$$F'(x)^T F(x) = 0, \qquad /1/$$

де $F(x): D \in R^n \to R^m$ $(m \geq n)$.

Перший метод є модифікацією демпфованого методу Гаусса-Ньютона [3] і має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k [F'(\bar{x}_k)^T F'(\bar{x}_k)]^{-1} F'(\bar{x}_k)^T F(x_k), \qquad /2/$$

$$\bar{x}_k = (1-\mu)x_k + \mu\varphi(x_k), \quad \varphi(x_k) = x_k - \beta_k F'(x_k)^T F(x_k), \qquad /3/$$

$$0 \leq \mu \leq 1, \quad \lambda_k, \beta_k \in (0,1], \quad k = 0,1,\dots$$

Зауважимо, що при $m=n$ і при $\lambda_k=1, \mu=0$ формула /2/ методу перетворюється в ітераційну формулу Ньютона.

Другий метод має вигляд

$$x_{K+1} = x_K - [F'(\bar{x}_K)^T F'(\bar{x}_K) + \gamma_K \dot{I}]^{-1} F'(\bar{x}_K)^T F(x_K), \qquad /4/$$

де $\bar{x}_K$ визначається за формулами /3/, $\gamma_K = \alpha \| F'(\bar{x}_K)^T F(x_K) \|$.
Цей метод містить як частковий випадок при $\mu = 0$ відомий метод Левенберга-Маркварта [3], варіанти якого деякі автори називають регуляризованим аналогом методу Ньютона [4, 5].

Введення дійсних числових параметрів λ_K, β_K в методи /2/-/3/, /4/ має такий зміст: λ_K, β_K впливають на довжину кроку в напрямі руху, вони вибирались шляхом дроблення починаючи з одиниці: параметр μ змінює напрям руху.

Метод /4/ придатний для розв"язування систем, в яких визначник якобіана $F'(\bar{x}_K)^T F'(\bar{x}_K)$ перетворюється в нуль. Для того щоб таку властивість мав метод /2/-/3/, на тих ітераціях, де отримуються погано зумовлені системи лінійних рівнянь, використовують алгоритм Гілла і Мюррея модифікованого розкладу Холеського [2]:

$$A + D = F'(\bar{x}_K)^T F'(\bar{x}_K) + D = LL^T,$$

де D - діагональна матриця з невід"ємними діагональними елементами, які дорівнюють нулю, коли матриця A надійно додатно визначена. У разі доброї зумовленості матриці A система лінійних рівнянь розв"язується за допомогою QR -розкладу матриці A.

Для порівняння всіх методів взяті чотири приклади з праці [5], які вважаються важкими. Наведемо ці приклади.

<u>Приклад 1.</u> Задана система N рівнянь /при значеннях N = 4, 8, 16, 32/ для функцій

$$f_i(x) = x_i + \sum_{j=1}^{N} x_j - N - 1, \quad 1 \le i \le N-1, \quad f_N(x) = \prod_{j=1}^{N} x_j - 1.$$

За нульове наближення обраний вектор $x_i^0 = 0{,}5$. Очевидний один із коренів $x_i^* = 1$. Є також принаймні ще один корінь. Для цієї системи $\det f'(x^0) = 1/2^{N-1}$. У разі великої розмірності системи $\det f'(x^0) \ll 1$.

<u>Приклад 2.</u> Задана система двох рівнянь для функцій

$$f_1(x) = x_1^2 - x_2 - 1,$$
$$f_2(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 0{,}5)^2 - 1.$$

Початкове наближення $x^0 =$ /0, 1, 2,0/, розв"язки $x^* \approx$ /1,5463, 1,3912/ і $x^* \approx$ /1,0673, 0,1392/.

Приклад 3. Задана система двох рівнянь для функцій

$$f_1(x) = x_1 - 13 + x_2(x_2(5-x_2)-2),$$
$$f_2(x) = x_1 - 29 + x_2(x_2(x_2+1)-14).$$

Початкове наближення $x^0 = /15, -2/$, $x^* = /5, 4/$. Визначник матриці Якобі цієї системи $det\ f'(x) = 6x_2^2 - 8x_2 - 12$ перетворюється в нуль на особливих лініях $x_2 \approx 2,53$ і $x_2 \approx -0,90$. Як бачимо, при русі від x^0 до кореня x^* траєкторія перетинає обидві ці лінії.

Приклад 4. Потрібно знайти мінімум функції, яка має рельєф типу яру з дуже крутими схилами:

$$\Phi(x) = x_1^2 + 100(x_1^2 - x_1 - x_2)^2.$$

Цю задачу зводимо до системи двох нелінійних рівнянь $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$ $/\ i = 1, 2/$ з очевидним коренем $x^* = /0, 0/$; $x^0 = /1, 1/$.

У табл. 1 наведена кількість ітерацій для знаходження коренів. У верхній частині таблиці вміщені результати праць [4, 5] з точністю 10^{-4}, у нижній – отримані нами з точністю 10^{-8}. Символ " ∞ " у таблиці означає, що даним методом розв'язок знайти неможливо. Зауважимо, що є випадки збіжності методів до різних коренів.

Наведена нижче система перевизначена – кількість рівнянь більша від кількості невідомих.

Приклад 5 [3]. Задана система трьох рівнянь з однією невідомою для функцій

$$f_i(x) = e^{t_i x} - y_i,\ i = 1,2,3;\ t_1 = 1,\ y_1 = 2;$$
$$t_2 = 2,\ y_2 = 4;\ t_3 = 3;\ \varepsilon = 10^{-10}.$$

Значення y_3, x^0 наведені в табл. 2. Для порівняння взяті результати, отримані в праці [3] методами січних і Ньютона для мінімізації

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} [f_i(x)]^2.$$

Підсумовуючи отримані результати, можна зробити такі висновки:

1. Запропонований спосіб побудови комбінованих ітераційних процесів дає змогу отримати високоефективні і надійні алгоритми.

2. Найбільш надійним і майже завжди найшвидше збіжним із порівнюваних методів є метод /2/–/3/ при значенні параметра $\mu = 0,5$. Близькі до нього характеристики має метод /4/ при $\mu = 0,5$.

Таблиця 1

Метод	Приклад I, $N=4$	8	16	32	II	III	IV
Ньютона	18	∞	∞	∞	24	57	8
Брауна	6	7	8	-	10	10	-
РАМН з опт. кроком							
$\alpha = 10^{-4}$	12	2	4	3	8	∞	50
$\alpha = 10^{-2}$	3	4	5	3	7	∞	67
ЧРАМН з опт. кроком							
$\alpha = 10^{-3}$	4	4	3	5	8	12	43
Ньютона	14	107	∞	5	26	41	5
Гауса-Ньютона	9	10	5	5	24	29	5
Метод /2/-/3/							
$\mu = 0$	7	10	3	4	8	29	∞
$\mu = 0{,}25$	9	11	3	4	6	15	41
$\mu = 0{,}50$	6	9	3	4	5	10	27
$\mu = 0{,}75$	4	5	5	12	10	∞	5
$\mu = 1{,}00$	8	7	3	9	∞	5	36
Метод /4/ $\alpha = 10^{-3}$							
$\mu = 0$	3	4	4	4	7	26	38
$\mu = 0{,}25$	4	4	4	4	4	18	46
$\mu = 0{,}50$	5	5	4	4	5	14	5
$\mu = 0{,}75$	6	6	5	4	5	∞	36
$\mu = 1{,}00$	5	8	11	4	5	8	∞

Таблиця 2

Початкові значення і розв"язки	Метод /2/-/3/: Параметр μ	Час, мс	Кількість ітерацій	Метод січних	Метод Ньютона
$y_3 = 8$	0,00	0,16	5	6	7
$x^0 = 1$	0,25	0,16	6		
$x^* =$	0,50	0,10	3		
$= 0{,}69315$	0,75	0,21	5		
$f(x^*) = 0$	1,00	0,16	5		
$y_3 = 3$	0,00	0,38	11	8	9
$x^0 = 1$	0,25	0,27	8		
$x^* =$	0,50	0,21	7		
$= 6{,}44005$	0,75	0,32	9		
$f(x^*) =$ $= 1{,}63900$	1,00	0,32	9		

3. Для визначення $\varphi(x_k)$ не потрібна точна одномірна оптимізація, достатньо знайти перше значення β_k, за якого досягається зменшення нев"язки $\| F'(\bar{x}_k)^T F(x_k) \|$.

4. Використання модифікованого розкладу Холеського успішно замінює регуляризацію методу /приміром, за А.М.Тихоновим/ в особливому випадку.

5. Запропоновані алгоритми ефективно розв"язують системи рівнянь, які відповідають мінімізації функцій багатьох змінних з рельєфом типу яру.

Наведені результати розрахунків отримані на ПЕОМ IBM PC AT 286 за допомогою пакету програм, написаних на *Turbo Pascal*.

I. Баргіш М.Я., Шахно С.М. Про деякі методи розв"язування нелінійної задачі найменших квадратів // Симпоз. "Питання оптимізації обчислень". 22-24 лист. 1993 р.м.Київ: Тези доп. К., 1993. С.14-15. 2. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., 1985. 3. Дэннис Дж.,Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М., 1988. 440 с. 4. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Методы решения линейных и нелинейных алгебраических уравнений. М., 1979. 24 с. /Препринт/ Ин-т прикл. математики АН СССР; -№ 169/. 5. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т.21. № 2. С.491-497.

Стаття надійшла до редколегії 01.02.94

УДК 517.958:519.6

І.Є.Бернакевич, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ОБОЛОНОК З РІДИНОЮ. I. ФОРМУЛЮВАННЯ І РОЗВ"ЯЗУВАНІСТЬ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

У даній праці вивчається задача акустичної взаємодії оболонок Тимошенка, заповнених ідеальною стисливою рідиною; подібні моделі можуть виникати в практиці проектування гідроакустичних пристроїв. Вважаючи невідомими вектор пружних зміщень в оболонці та потенціал швидкостей в рідині, ми формулюємо початково-крайову і відповідну варіаційну задачу взаємодії цих середовищ. За допомогою напівдискретизації Гальоркіна та апріорних енергетичних оцінок здійснене конструктивне доведення коректності варіаційної задачі взаємодії. Для спрощення викладу зупинимось на випадку осесиметричних процесів взаємодії.