3. Для визначення $\varphi(x_k)$ не потрібна точна одномірна оптимізація, достатньо знайти перше значення β_k, за якого досягається зменшення нев"язки $\| F'(\bar{x}_k)^T F(x_k) \|$.

4. Використання модифікованого розкладу Холеського успішно замінює регуляризацію методу /приміром, за А.М.Тихоновим/ в особливому випадку.

5. Запропоновані алгоритми ефективно розв"язують системи рівнянь, які відповідають мінімізації функцій багатьох змінних з рельефом типу яру.

Наведені результати розрахунків отримані на ПЕОМ IBM PC AT 286 за допомогою пакету програм, написаних на *Turbo Pascal*.

1. Б а р т і ш М.Я., Ш а х н о С.М. Про деякі методи розв"язування нелінійної задачі найменших квадратів // Симпоз. "Питання оптимізації обчислень". 22-24 лист. 1993 р.м.Київ: Тези доп. К., 1993. С.14-15. 2. Г и л л Ф., М ю р р е й У., Р а й т М. Практическая оптимизация. М., 1985. 3. Д э н н и с Дж., Ш н а б е л ь Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М., 1988. 440 с. 4. Е р м а к о в В.В., К а л и т к и н Н.Н. Методы решения линейных и нелинейных алгебраических уравнений. М., 1979. 24 с. /Препринт/ Ин-т прикл. математики АН СССР; -№ 169/. 5. Е р м а к о в В.В., К а л и т к и'н Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т.21. № 2. С.491-497.

Стаття надійшла до редколегії 01.02.94

УДК 517.958:519.6

І.Є.Бернакевич, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ОБОЛОНОК З РІДИНОЮ. І. ФОРМУЛЮВАННЯ І РОЗВ"ЯЗУВАНІСТЬ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

У даній праці вивчається задача акустичної взаємодії оболонок Тимошенка, заповнених ідеальною стисливою рідиною; подібні моделі можуть виникати в практиці проектування гідроакустичних пристроїв. Вважаючи невідомими вектор пружних зміщень в оболонці та потенціал швидкостей в рідині, ми формулюємо початково-крайову і відповідну варіаційну задачу взаємодії цих середовищ. За допомогою напівдискретизації Гальоркіна та апріорних енергетичних оцінок здійснене конструктивне доведення коректності варіаційної задачі взаємодії. Для спрощення викладу зупинимось на випадку осесиметричних процесів взаємодії.

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай замкнена осесиметрична оболонка, яка цілком заповнена рідиною, віднесена до циліндричної системи координат $/ r, z, \theta /$. Позначимо через Ω меридіанний перетин цієї конструкції при $\theta = const$, припускаючи, що частина Γ_S границі Γ області Ω визначається кривою $r = r(z)$, $0 \leq z \leq L$, яка описує меридіанний перетин оболонки. Вважатимемо, що границя Γ області Ω неперервна за Ліпшицем і $n = (\cos(n,r), \cos(n,z))$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Ω; очевидно, що $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_S$, де Γ_0 – частина границі Γ, що лежить на осі Oz.

Припускаючи, що акустичні процеси в такій конструкції породжені осесиметричними навантаженнями, що змінюються в часі $t \in [0, T]$, $0 < T \leq +\infty$, сформулюємо задачу:

знайти потенціал швидкостей рідини $\psi = \psi(r, z, t)$, тангенціальне зміщення $u = u(z, t)$, прогин $w = w(z, t)$ і кут повороту нормалі $\gamma = \gamma(z, t)$ серединної поверхні оболонки такі, що

$$\frac{1}{\rho_0 c_0}\psi'' - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right] = f_0 \text{ в } \Omega \times (0, T],$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_0 \times [0, T],\ \Gamma_0 \in \Gamma,\ mes(\Gamma_0) > 0,$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \psi}{\partial n} = w' \text{ на } \Gamma_0 \times [0, T],\ \Gamma_S = \Gamma \setminus \Gamma_0,$$

$$\rho h u'' - \frac{1}{A_1 r}\left\{\frac{\partial}{\partial z} r N_1 - \frac{\partial r}{\partial z} N_2 - A_1 \frac{r}{R_1} N_{13}\right\} = f_1,$$

$$\rho h w'' - \frac{1}{A_1 r}\left\{-A_1 \frac{r}{R_1} N_1 - A_1 \frac{r}{R_2} N_2 + \frac{\partial}{\partial z} N_{13}\right\} = \psi' + f_2,$$

$$\rho \frac{h^3}{12}\gamma'' - \frac{1}{A_1 r}\left\{\frac{\partial}{\partial z} r M_1 - \frac{\partial r}{\partial z} M_2 - A_1 r N_{13}\right\} = f_3,$$

$$N_1(s) = B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2),\ N_2(s) = B(\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2),\ B = \frac{Eh}{2(1+\nu)},$$

$$M_1(s) = D(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2),\ M_2(s) = D(\nu\varkappa_1 + \varkappa_2),\ D = B\frac{h^2}{6(1-\nu)},$$

$$N_{13}(s) = B_S\,\varepsilon_{13}(s),\ B_S = kB \text{ на } \Gamma_S \times (0, T],$$

$$\varepsilon_1(s) = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{R_1} w,\ \varepsilon_2(s) = \frac{1}{A_1 r}\frac{\partial r}{\partial z} u + \frac{1}{R_2} w,$$

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{13}(s) = \gamma + \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{R_1}u \qquad s=(u,w,\gamma), \\
\chi_1(s) = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma}{\partial z}, \quad \chi_2(s) = \frac{1}{A_1 r}\frac{\partial r}{\partial z}\gamma, \\
A_1 = \left(1+\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right)^{1/2}, \quad A_2 = r, \\
R_1 = -A_1^3\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right)^{-1}, \quad R_2 = rA_1, \\
u|_{r=0} = \gamma|_{r=0} = N_{13}|_{r=0} = 0 \ \text{на} \ [0,T], \\
\psi|_{t=0} = \psi_0, \ \psi'|_{t=0} = \varphi_0 \ \text{в} \ \Omega, \\
s|_{t=0} = (u,w,\gamma)|_{t=0} = (u_0, w_0, \gamma_0) \ \text{на} \ \Gamma_s, \\
s'|_{t=0} = (u', w', \gamma')|_{t=0} = (v_0, y_0, \xi_0).
\end{cases} \qquad /I.I/
$$

Тут ρ, E, ν та h – густина, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і товщина оболонки відповідно; k – коефіцієнт поперечного зсуву; ρ_0, c_0 – густина і швидкість звуку в рідині; $g' = \frac{\partial}{\partial t} g$, $g'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} g$.

Більш змістовне висвітлення поданих у задачі /I.I/ рівнянь можна знайти у працях [2, 3, 6, 8, II].

2. Варіаційна постановка задачі взаємодії. Введемо простори

$$
\Phi = \{\varphi \in H^1(\Omega)\}, \quad H^0 = L^2(\Omega),
$$
$$
V = \{v \in H^1((0,L)) \mid v(0)=0\}, \quad Y = V \times V \times V, \quad Q = \Phi \times Y.
$$

Φ' і Y' – простори, спряжені до просторів Φ і Y відповідно. Припустимо, що для даних задачі /I.I/ справедливі включення

$$
\begin{cases}
\psi_0 \in \Phi, \ \varphi_0 \in H^0, \ s_0 = (u_0, w_0, \gamma_0) \in Y, \\
g_0 = (v_0, y_0, \xi_0) \in \mathcal{H} = [L^2((0,L))]^3, \\
f_0 \in L^2(0,T; H^0), \ f = \{f_i\}_{i=1}^3 \in L^2(0,T; \mathcal{H}).
\end{cases} \qquad /2.I/
$$

Тут і далі для функціональних просторів взяті позначення із праці [4].

Використовуючи принцип віртуальних робіт, сформулюємо варіаційний еквівалент початково-крайової задачі акустичної взаємодії оболонки з рідиною:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{задано } \{\psi_0, s_0\} \in Q = \Phi \times Y,\ \{\varphi_0, g_0\} \in H = H^0 \times \mathcal{X}, \\ \qquad l \in L^2(0,T;\Phi'),\ \lambda \in L^2(0,T;Y'), \\ \text{знайти пару } \sigma = (\psi, s) \in L^2(0,T;Q) \text{ таку, що} \\ m(\psi''(t),\varphi) + a(\psi(t),\varphi) - b(s'(t),\varphi) = \langle l(t),\varphi\rangle, \\ \mu(s''(t),g) + \alpha(s(t),g) + b(g,\psi'(t)) = \langle \lambda(t), g\rangle, \\ m(\psi'(0)-\varphi_0,\varphi) = 0,\ a(\psi(0)-\psi_0,\varphi) = 0\ \ \forall\varphi\in\Phi, \\ \mu(s'(0)-g_0,g) = 0,\ \alpha(s(0)-s_0,g) = 0\ \ \forall g\in Y. \end{array}\right. \qquad /2.2/$$

Білінійні та лінійні форми, вжиті для запису задачі /2.2/, подаються виразами:

$$\left\{\begin{array}{l} m(\psi,\varphi) = \int_\Omega (\rho_0 c_0)^{-1}\psi\varphi\, r\,dr\,dz \quad \forall\psi,\varphi\in\Phi, \\ a(\psi,\varphi) = \int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\} r\,dr\,dz, \\ b(g,\varphi) = \int_0^L y\varphi r A_1\,dz \quad \forall s=(u,w,\gamma)\in Y,\ \forall g=(v,y,\xi)\in Y, \\ \mu(s,g) = \int_0^L \rho h\left\{uv + wy + \frac{h^2}{12}\gamma\xi\right\} A_1 r\,dz, \\ \alpha(s,g) = \int_0^L\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[N_j(s)\varepsilon_j(g) + M_j(s)\varkappa_j(g)\right] + N_{13}(s)\varepsilon_{13}(g)\right\} A_1 r\,dz, \\ \langle l,\varphi\rangle = \int_\Omega f_0\varphi\, r\,dr\,dz,\ \langle\lambda,g\rangle = \int_\Omega\left\{f_1 v + f_2 y + f_3\xi\right\} A_1 r\,dz. \end{array}\right. \qquad /2.3/$$

Якщо ввести позначення

$$\left\{\begin{array}{l} M(p,q) = m(\psi,\varphi) + \mu(s,g), \\ A(p,q) = a(\psi,\varphi) + \alpha(s,g),\ \ \forall p=(\psi,s)\in Q, \\ B(p,q) = -b(s,\varphi) + b(g,\psi),\ \ \forall q=(\varphi,g)\in Q, \\ \langle F,q\rangle = \langle l,\varphi\rangle + \langle\lambda,g\rangle; \end{array}\right. \qquad /2.4/$$

то варіаційна задача /2.2/ має вигляд

$$\left\{\begin{array}{l} \text{задано } p_0 = (\psi_0, s_0)\in Q,\ q_0 = (\varphi_0, g_0)\in H = H^0\times\mathcal{X}, \\ F\in L^2(0,T;Q'); \\ \text{знайти вектор } p = (\psi, s)\in L^2(0,T;Q) \text{ такий, що} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} M(p''(t),q)+B(p'(t),q)+A(p(t),q)=\langle F(t),q\rangle, \\ M(p'(0)-q_0,q)=0, \; A(p(0)-p_0,q)=0 \quad \forall q\in Q. \end{cases} \qquad /2.5/$$

3. <u>Коректність варіаційної задачі.</u> Неважко переконатись, що

$$\begin{cases} \text{білінійні форми } M(.,.): H\times H \to \mathbb{R}, \\ A(.,.): Q\times Q\to \mathbb{R} \quad \text{симетричні і неперервні.} \end{cases} \qquad /3.1/$$

Крім цього, форма $M(.,.)$ є H -еліптичною, що дає змогу ввести норму

$$\|q\|_H = M^{1/2}(q,q) \quad \forall q\in H. \qquad /3.2/$$

Нарешті відзначимо, що неперервна форма $B(.,.): Q\times Q\to\mathbb{R}$ має властивість

$$B(q,q)=0 \quad \forall q\in Q. \qquad /3.3/$$

<u>Теорема</u> про коректність варіаційної задачі /2.5/.

Нехай на додаток до включень /2.1/ дані варіаційної задачі /2.5/ такі, що

білінійна форма $A(.,.): Q\times Q\to\mathbb{R}$ Q – еліптична. /3.4/

Тоді існує єдиний розв'язок $p=(\varphi,s)$ задачі /2.5/ такий, що

$$p\in L^2(0,T;Q),\; p'\in L^2(0,T;H),\; p''\in L^2(0,T;Q'). \qquad /3.5/$$

<u>Доведення.</u> Нехай послідовність скінченновимірних підпросторів $\{Q_h\}$ із простору Q така, що

$\dim Q_h = N(h) = N \to \infty$ при $h\to 0$,

$\bigcup_{h>0} Q_h$ щільно вкладене в Q.

Неважко переконатись, що для кожного фіксованого $h>0$ існує єдиний $p_h(t)=(\psi_h(t),\, s_h(t))$, який задовольняє рівняння задачі /2.5/ для будь-яких $q\in Q_h$ і при цьому справджується рівняння балансу енергії:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|p_h'(t)\|_H^2+\|p_h(t)\|_Q^2\right\}=\langle F(t),p_h'(t)\rangle. \qquad /3.6/$$

Звідси з використанням нерівності Гронуолла [2,4] приходимо до апріорної оцінки

$$\|p_h'(t)\|_H^2+\|p_h(t)\|_Q^2 \le C\left\{\|p_0\|_Q^2+\|q_0\|_H^2+\int_0^t\|F(\tau)\|_*^2 d\tau\right\}, \qquad /3.7/$$
$$\forall t\in[0,T]\;\forall h>0.$$

Остання показує, що з послідовності наближених розв"язків $\{\rho_h\}$ можна вибрати підпослідовність, яку знову позначимо через $\{\rho_h\}$, таку, що

$$\begin{cases} \rho_h \to \rho \text{ в } L^{\infty}(0,T;Q) \text{ *- слабо}, \\ \rho_h' \to \rho' \text{ в } L^{\infty}(0,T;H) \text{ *- слабо}. \end{cases} \qquad /3.8/$$

Тепер залишається переконатись, що побудована в /3.8/ границя ρ є розв"язком задачі /2.5/. Повторюючи міркування праці [2], можна переконатись, що вектор ρ дійсно задовольняє рівняння задачі /2.5/.

Зауваження. Щодо статичних варіаційних задач теорії оболонок див. праці [5, 8].

4. Підсумкові зауваження. Одержаний тут результат стосовно коректності варіаційної задачі взаємодії оболонок Тимошенка зі стисливою ідеальною рідиною цілком можна узагальнити на випадок матеріалу оболонки з короткочасною пам"яттю та в"язкої стисливої рідини, як це зроблено у праці [9] для задач взаємодії пружних тіл з рідинами.

Зауважимо, що знайдені тут умови коректності варіаційної задачі /2.5/ можуть служити запорукою успішної побудови проекційно-сіткових схем для їх розв"язування; основою цього підходу з використанням методу скінченних елементів по простору та однокрокових схем інтегрування в часі можуть служити результати [1, 2, 7, 8, 9, 11].

1. Бернакевич И.Е., Шельвах О.П., Шинкаренко Г.А. Численное исследование вариационных задач теории балок Тимошенко проекционно-сеточными методами. Львов, 1991. 53 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 04.06.91; № 814-Ук91. 2. Горлач В.М., Шинкаренко Г.А. Численное моделирование акустических волн в упругих телах с жидкостью: динамическое процессы. Львов, 1987. 33 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 22.12.87; № 3256-Ук87. 3. Динамика тел, взаимодействующих со средой. Гузь А.Н., Маркуш Ш., Пуст Л. и др. К. Наук. думка, 1991. 392 с. 4. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 382 с. 5. Литвинов В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 368 с. 6. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища шк. 1978. 159 с. 7. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Знание, 1988. 284 с. 8. Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Расчет и оптимизация оболочек с разными срединными поверхностями. Львов: Вища шк. 1989. 172 с. 9. Шинкаренко Г.А. Чисельне моделювання динаміки взаємодії фізико-механічних полів: Автореф. дис. ... д-ра

фіз.- мат. наук. Львів, 1993. 36 с. 10. Boujot J. Mathematical formulation of fluid-structure interactin problem // M²AN. 1987. Vol. 21. №2. P. 239-260. 11. Mankenholtz O. Problems with fluid-structure interaction // Comput. Meth. Appl. Sci. Ed. Ch. Hirch. Elsevier Sci. Publ., 1992. P. 25-35.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.94

УДК 517.958

О.В.Блажиевська

АВТОМОДЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ЗАДАЧІ ГОРІННЯ СУМІШІ ГАЗІВ

Математичне моделювання процесу горіння реакційноздатних газових сумішей є актуальним для багатьох галузей науки і техніки. Скажімо, моделювання процесу нанесення тонких плівок кремнію, арсеніду галію та інших речовин шляхом хімічного осадження їх з газової фази вимагає розгляду послідовності процесів горіння, термофорезу, адсорбції продуктів реакції на поверхні плівки тощо. Моделюючи кожну стадію процесу, потрібно правильно описати асимптотику еволюції попередньої стадії. Відомо [2], що ефективним методом дослідження аналогічних задач є побудова та аналіз асимптотично стійких автомодельних розв"язків.

Нехай нерухома реакційноздатна суміш газів, яка має температуру T_0 і густину ρ_0, заповнює замкнену трубу. Після підведення тепла до границі $x = 0$ в її околі створюється зона підвищеної температури. Це ініціює хімічну реакцію, внаслідок чого по суміші поширюється хвиля горіння. Якщо полум"я є ламінарним і ефектами примежового шару можна знехтувати, то адекватним є одновимірний опис зміни параметрів уздовж труби.

Дією масових сил нехтуємо. Припустимо, що фронт полум"я рухається набагато повільніше, ніж звукова хвиля. Тоді тиск у трубі практично не залежить від координат, але через те, що труба закрита, тиск монотонно зростає з часом. Додатково припустимо, що швидкість хімічної реакції визначається законом Арреніуса та залежить від температури і концентрації одного лімітуючого компонента. За вказаних припущень замкнена система