1. Алексеев Б.В., Гришин А.М. Физическая газодинамика реагирующих сред. М.: Высш. шк., 1985. 2. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П. Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

Стаття надійшла до редколегії 16.06.94

УДК 517.648:517.68

П.С.Венгерський, П.С.Сеньо

# ОДИН ІНТЕРВАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ПОЧАТКОВИХ НАБЛИЖЕНЬ МЕТОДУ НЬЮТОНА

Під час застосування ітераційних методів для розв"язування систем нелінійних рівнянь одним з найскладніших завдань є вибір початкового наближення. Загалом способи знаходження початкового наближення грунтуються на апріорних оцінках. У даній роботі запропонований алгоритм знаходження початкового наближення для точкового методу Ньютона за допомогою одного з інтервальних методів, який гарантує виконання всіх умов збіжності методу.

Нехай $R^n$ – $n$ – мірний дійсний простір. Покажемо зв"язок понять інтервального аналізу і відповідних величин $R^n$.

1. Основні поняття інтервального аналізу в $R^n$. Припустимо, що окіл $O(y,\rho)$ в $R^n$ з центром $y$ і радіусом $\rho$ є особливим типом інтервалу, а саме

$$O(y,\rho)=\{x \mid \|x-y\|\le\rho\}=[y-\rho e,\ y+\rho e], \qquad /1/$$

де

$$e=(1,1,\dots,1)^T.$$

Основні інтервальні поняття тісно зв"язані з нормою

$$\|x\|=max\{|x_i|\} \text{ для } R^n, \qquad /2/$$

де

$$x=(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n).$$

Як відомо з /1/, абсолютна величина інтервалу $[a,b]$ в $R$ визначається так:

$$|[a,b]|=max\{|a|,|b|\}.$$

Аналогічно, для інтервалу $x=[a,b]$ в $R^n$

$$\omega(x)=\max_{1\le i\le n}\{(b_i-a_i)\}=\|b-a\|.$$

З означення ширини інтервалу $X$ маємо

$$|X| = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\max(|a_i|,|b_i|)\right\} = \max\left\{\|a\|,\|b\|\right\} = \max_{x\in X}\|x\|. \quad /3/$$

Матричну норму відповідно до /2/ для $A=(a_{ij})$ записуємо

$$\|A\| = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|. \quad /4/$$

Враховуючи /3/ і /4/, отримуємо

$$\|A\| = |A[-e,e]|.$$

Для матриці $M=([\alpha_{ij},\beta_{ij}])$ з інтегральними компонентами маємо

$$|M| = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|[\alpha_{ij},\beta_{ij}]| = \max_{A\in M}\left\{\|A\|\right\} = |M[-e,e]|,$$

Середня точка інтервалу $X=[a,b]$ визначається так:

$$m(X) = \frac{1}{2}(a+b).$$

Аналогічно в багатомірному випадку для $X=([a_i,b_i])$ отримуємо

$$m(X) = \left(\frac{1}{2}(a_i+b_i)\right).$$

2. Теорема Канторовича збіжності методу Ньютона до розв"язку $x^*$. Введемо позначення. Нехай $M_{nn}(R)$ – множина дійсних матриць розмірності $n\times n$.

Запишемо теорему, доведену у праці [3, с.693].

Теорема I. Нехай $\Omega_0 = O(x^{(0)},\rho)$ і відображення $f: R^n\to R^n$ двічі неперервно диференційовене. Припустимо, що для $Y\in M_{nn}(R)$ виконуються умови:

1/ $\|Yf(x^{(0)})\|\leq\bar{\eta}$;

2/ $\|Yf'(x^{(0)})-I\|\leq\delta$, $I$ – одинична матриця;

3/ $\|Yf''(x)\|\leq\bar{K}$ для всіх $x\in\Omega_0$.

Тоді, якщо

$$h = \frac{\bar{K}\bar{\eta}}{(1-\delta)^2}\leq\frac{1}{2},\quad \delta<1;$$

$$\rho\geq\rho_0 = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\,\frac{\eta}{1-\delta},$$

рівняння $f(x)=0$ має розв"язок $x^*\in\Omega_0$.

При цьому, якщо $\{x^{(n)}\}$ – послідовність наближень методу Ньютона, то

$$\|x^*-x^{(n)}\|\leq\frac{1}{2^n}[2h]^{2^n}\,\frac{\bar{\eta}}{h(1-\delta)}.$$

3. <u>Теорема існування розв"язку $x^*$ для одного типу інтервальних ітераційних методів.</u> Розглянемо модифікацію за Кравчиком методу /I.I2/ з праці [2], а саме

$$K(X^{(n)})=x^{(n)}-Y^{(n)}f(x^{(n)})+(I-Y^{(n)}F'(X^{(n)}))(X^{(n)}-x^{(n)}); \qquad /5/$$

$$X^{(n+1)}=K(X^{(n)})\cap X^{(n)},\ n=0,1,2,\dots, \qquad /6/$$

де $X^{(0)}$ - початковий інтервал; $F'(X^{(n)})=1/4 f'(x^{(n)})+$ $+3/4 f'(x^{(n)}+2/3(X^{(n)}-x^{(n)}))$; $Y^{(n)}$ - приблизна інверсія центру матриці $F'(X^{(n)})$; $I$ - одинична матриця; $x^{(n)}=mid(X^{(n)})$.

Сформулюємо два твердження існування розв"язку $x^*$ для методу /5/-/6/.

<u>Лема</u>. Нехай відображення $f: D\subset R^n \to R^n$ двічі неперервно диференційоване за Фреше в кожній точці опуклої множини $D_0\subset D$, $f(x)$ - його аналітичний вираз. Нехай визначене інтервальне розширення $f(x)$, $x^*$ - розв"язок рівняння $f(x)=0$ $(x^*\in X^{(0)}\subset D_0,\ x^{(0)}<x^*)$.

Якщо $X^{(0)}\supset[x^{(0)}, x^{(0)}+\frac{3}{2}(x^*-x^{(0)})]$, тоді

$$f''(x^{(0)}+\theta_2^0(x^*-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2\subset f''(x^{(0)}+\tfrac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(0)}-x^{(0)}))(X^{(0)}-x^{(0)})^2, \qquad /7/$$

де

$x^{(0)}+\theta_2^0(x-x^{(0)})$, $x^{(0)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](x-x^{(0)})$ - проміжні точки залишкових членів розкладів у ряди Тейлора до другої похідної в точці $x^{(0)}$ відповідно функцій $f(x)$ і $f'(x^{(0)}+\frac{2}{3}(x-x^{(0)}))$.

<u>Теорема 2.</u> Нехай виконуються умови і співвідношення /7/ леми.

Тоді послідовність інтервалів $\{X^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, обчислена за формулами /5/-/6/, задовольняє такі співвідношення:

I/ $x^*\in X^{(0)}$;

2/ якщо крім цього для $f(x)$ виконується умова

$$|I-Y^{(0)}F'(X^{(0)})|<1,$$

тоді $\lim\limits_{n\to\infty} X^{(n)}=x^*$.

Доведення леми і теореми 2 містить праця [2].

4. <u>Зв"язок умов існування і збіжності ітераційного методу Ньютона та інтервального методу /5/-/6/.</u> Позначимо через $V^{(n)}$ таку величину

$$V^{(n)}=|I-Y^{(n)}F'(X^{(n)})|.$$

Запишемо докладніше позначений вираз

$$|I-Y^{(n)}F'(X^{(n)})| = |I-Y^{(n)}(\frac{1}{4}f'(x^{(n)}+\frac{3}{4}f'(x^{(n)}+\frac{2}{3}(X^{(n)}-x^{(n)}))|.$$

Використовуючи означення 2 інтегральних операцій з [4], отримуємо

$$|I-Y^{(n)}(\frac{1}{4}f'(x^{(n)})+\frac{3}{4}f'(x^{(n)}+\frac{2}{3}(X^{(n)}-x^{(n)}))| =$$

$$=|I-Y^{(n)}(f'(x^{(n)})+\frac{1}{2}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))(X^{(n)}-x^{(n)}))| =$$

$$=|I-Y^{(n)}f'(x^{(n)})-\frac{1}{2}Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))(X^{(n)}-x^{(n)})|. \qquad /9/$$

Із властивостей абсолютної величини інтервалу, /9/ маємо

$$|I-Y^{(n)}f'(x^{(n)})-\frac{1}{2}Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))(X^{(n)}-x^{(n)})| =$$

$$=|\frac{1}{2}Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))(X^{(n)}-x^{(n)})-(I-Y^{(n)}f'(x^{(n)}))| \geq$$

$$\geq |\frac{1}{2}Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))(X^{(n)}-x^{(n)})|-|I-Y^{(n)}f'(x^{(n)})|.$$

Далі отримуємо

$$\frac{1}{2}|Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))(X^{(n)}-x^{(n)})|-|I-Y^{(n)}f'(x^{(n)})| =$$

$$=\frac{1}{2}|Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))||X^{(n)}-x^{(n)}|-|I-Y^{(n)}f'(x^{(n)})|. \qquad /10/$$

Оскільки $x^{(n)}=mid(X^{(n)})$ , то

$$|X^{(n)}-x^{(n)}|=|X^{(n)}-mid(X^{(n)})|=\frac{\omega(X^{(n)})}{2}|[-1,1]|=\frac{\omega(X^{(n)})}{2}.$$

Тоді з /10/ маємо

$$\frac{1}{2}|Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))||X^{(n)}-x^{(n)}|-|I-Y^{(n)}f'(x^{(n)})| =$$

$$=\frac{1}{2}|Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))|\frac{\omega(X^{(n)})}{2}-|I-Y^{(n)}f'(x^{(n)})| =$$

$$=\frac{1}{4}|Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))|\omega(X^{(n)})-|I-Y^{(n)}f'(x^{(n)})|. \qquad /11/$$

Враховуючи позначення /8/, зі співвідношення /11/ дістаємо

$$|Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))| \leq 4(V^{(n)}+|I-Y^{(n)}f'(x^{(n)})|)/\omega(X^{(n)}).$$

Позначаючи, через

$$\Delta^{(n)}=\|I-Y^{(n)}f'(x^{(n)})\|,\quad \omega^{(n)}=\omega(X^{(n)}).$$

маємо

$$S^{(n)}=|Y^{(n)}f''(x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)}))| \leq 4(V^{(n)}+\Delta^{(n)})/\omega^{(n)}.$$

Інтервал, що є аргументом у другій похідній, задовольняє співвідношення /7/ леми, тобто містить $x^*$ .

Якщо $x \in \Omega_n = O(x^{(n)},\varrho)=x^{(n)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(n)}-x^{(n)})$, тоді

$$|Y^{(n)}f''(x)| \leq S^{(n)} \leq 4(V^{(n)}+\Delta^{(n)})/\omega^{(n)}.$$

5. Алгоритм знаходження початкових наближень методу Ньютона інтервальним методом /5/–/6/.

1. Вибираємо $X^{(0)}, x^{(0)} = mid(X^{(0)})$.

2. Обчислюємо $X^{(n+1)}, n=0,1,2,\dots$ за формулами /5/–/6/, доки не виконуватиметься умова $X^{(n+1)} \subset X^{(n)}, n=0,1,2,\dots$ .

3. Знаходимо
$$g^{(n)} = \| y^{(n)} f(x^{(0)}) \| .$$

4. Шукаємо значення констант
$$V^{(n)} = | I - y^{(n)} F'(X^{(n)}) | ;$$
$$\Delta^{(n)} = \| I - y^{(n)} f'(x^{(n)}) \| .$$

5. Отримуємо оцінку для другої похідної:
$$\bar{\xi}^{(n)} = 4(V^{(n)} + \Delta^{(n)}) / \omega^{(n)} .$$

6. Знаходимо
$$h^{(n)} = \frac{\bar{\xi}^{(n)} g^{(n)}}{(1-\Delta^{(n)})^2} .$$

7. Якщо $h^{(n)} \leq \frac{1}{2}$ , то застосовуємо далі ітераційний метод Ньютона, обравши за початкове наближення точку $x^{(n)}$ з $X^{(n)}$ . Інакше потрібно перейти до кроку 2.

Зауваження. Якщо методом /5/–/6/ отримуємо $X^{(n)} = \{\emptyset\}$ , то це ознака того, що в даному інтервалі немає коренів. На кроці 2 може бути обчислений набір інтервалів, які локалізують різні корені рівняння, тому алгоритм потрібно виконувати доти, доки не вичерпається весь набір інтервалів.

6. Висновки. Отриманий алгоритм, для знаходження початкового наближення ітераційного методу Ньютона, яке гарантує виконання умов збіжності методу. Для оцінки $h^{(n)}$ майже не потрібні додаткові обчислення; вирази для оцінок $g^{(n)}, V^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)}, \omega^{(n)}$ використовуються безпосередньо в самому методі /5/–/6/.

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 358 с. 2. Венгерский П.С., Сеньо П.С. Интервальный метод решения систем нелинейных уравнений, базирующийся на предельных теоремах о среднем. Львов, 1990. 23 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 20.09.90; № 1612-Ук90. 3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с. 4. Сеньо П.С., Венгерський П.С. Інтервальний ітераційний метод розв"язування нелінійних систем рівнянь, який не містить інверсій інтервальних матриць // Вісн. Львів.ун-ту. Сер.мех-мат. 1991. Вип. 35. С.18-24.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.94