УДК 539.3:519.68

В.Д.Вовк, І.І.Дияк, В.М.Макар

ПРОГРАМНИЙ КОМПЛЕКС БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ НАГРІВІ

У даній роботі описаний програмний комплекс для сучасних ПЕОМ розв"язання двокритеріальної задачі оптимального проектування кусково-однорідних осесиметричних об"єктів з умови мінімуму термонапружень в їхніх елементах за мінімальної матеріаломісткості.

Термонапруження в об"єкті визначають розв"язанням задач статичної і квазістатичної термопружності, тобто за відомим розподілом температур у даний момент часу /квазістатична задача/ визначають деформації та напруження, зумовлені цим полем і силовим навантаженням [2]. Зв"язністю задачі, тобто впливом поля деформацій на поле температур нехтують.

З метою застосування методу скінченних елементів /МСЕ/ для чисельного розв"язання задачі теплопровідності [3] розглянемо еквівалентну їй варіаційну постановку:

$$(\dot{u}, v) + a(u, v) + \langle \alpha u_0, v \rangle = (\omega, v) + \langle \alpha u_c, v \rangle \qquad /1/$$

$$\text{для } \forall v \in H_A,\ \tau \in]0, \tau^*],$$

$$(u, v)_{\tau=0} = (u_0, v) \quad \text{для } \forall v \in H_A . \qquad /2/$$

Тут $u(x,\tau)$ – температура в точці $x \in R^2$ у момент часу τ

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} \in L_2(0, \tau^*);$$

H_A – енергетичний простір оператора задачі:

$$H_A = \{u(x,\tau) : u = 0,\ (x,\tau) \in \partial\Omega_1 \times [0, \tau^*],\ u \in H^1(\Omega)\},$$

$H^1(\Omega)$ – простір Соболева І-го порядку;

$$a(u, v) = (Au, v) = -\int_\Omega \lambda \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx$$

– скалярний добуток в H_A; $\partial\Omega_1$ – частина границі області Ω із заданими однорідними умовами І-го роду; ω – потужність внутрішніх джерел тепла; u_c – температура зовнішнього середовища; α – коефіцієнт теплообміну; u_0 – початковий розподіл температури в тілі.

Апроксимацію Гальоркіна узагальненого розв"язку задачі /1/-/2/ шукаємо у вигляді

$$u_h(x,\tau)=\sum_{i=1}^{N} Q^i(\tau)\varphi_i(x), \qquad /3/$$

де $\varphi_i(x)$ – базові функції на чотирикутниках сирендипового типу. У програмному комплексі використовують чотирикутники з чотирма та вісьмома вузлами [3]. У співвідношенні /3/ коефіцієнти розкладу є функціями часової координати $\tau\in[0,\tau^*]$. На основі напівдискретних апроксимацій Гальоркіна /3/, варіаційна задача /1/, /2/ зводиться до розв"язання нелінійної задачі Коші, яку в матричному вигляді можна подати

$$M(Q)\dot{Q}(\tau)+G(Q)Q(\tau)=F(\tau), \qquad /4/$$

$$Q(0)=z, \qquad /5/$$

Тут $Q(\tau)=(Q^1(\tau),\dots,Q^N(\tau))^T$ – вектор невідомих коефіцієнтів розкладу /3/. Компоненти векторів і матриць цієї системи визначаються співвідношеннями

$$M_{ij}=(c\rho\varphi_i,\varphi_j),$$
$$G_{ij}=a(\varphi_i,\varphi_j)+<\alpha\varphi_i,\varphi_j>,$$
$$f_i=(\omega,\varphi_i)+<\alpha u_c,\varphi_i>.$$

Задача Коші /4/, /5/ розв"язується з використанням процедури Кранка-Ніколсона-Гальоркіна, на основі якої на кожному часовому кроці методом Холецького розв"язується система лінійних алгебраїчних рівнянь /СЛАР/. За знайденими значеннями температури із допустимих переміщень пружного тіла, які належать до простору

$$\dot{H}_A=\{u=(u_1,u_2)^T: u_i=g_i,\ x\in\partial\Omega_1,\ u_i\in W_2^1(\Omega),\ i=1,2\},$$

переміщення, що відповідають положенню рівноваги, мінімізують функціонал Лагранжа [2]:

$$\Pi(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon^T D\varepsilon d\Omega-\int_\Omega u^T F d\Omega-\int_\Omega \varepsilon^T D\varepsilon_T d\Omega-\int_\Gamma u^T f d\Gamma. \qquad /6/$$

Розв"язок задачі про мінімум функціоналу /6/ одержують за допомогою МСЕ з використанням апроксимацій на тій же СЕ сітці.

Задача про зниження рівня термонапружень, визначених із розв"язку задачі квазістатичної термопружності, в деякій підобласті кусково-однорідного осесиметричного об"єкта, полягає у визначенні значень керуючих параметрів /геометричних розмірів/ $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, що задовольняють співвідношення [1]:

$$\Phi_K=\max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\max_{x_1,x_2}\left\{\sigma_{11}^{(K)}(\alpha),\sigma_{22}^{(K)}(\alpha),\sigma_{33}^{(K)}(\alpha)\right\}\to\min \qquad /7/$$

за таких обмежень:

$$AT_{i+1}^{(2)}=BT_i^{(2)}+F^{(2)}; \qquad /8/$$

$$Gu^{(K)}=R^{(K)}; \qquad /9/$$

$$\varepsilon^{(K)}=Bu^{(K)}; \qquad /10/$$

$$\sigma=D(\varepsilon^{(K)}-\varepsilon_T^{(K)}); \qquad /11/$$

$$\alpha_i^*\leq\alpha_i\leq\alpha_i^{**}; \qquad /12/$$

$$V_i^*\leq V_I\leq V_i^{**}. \qquad /13/$$

Тут /8/ - СЛАР, до якої зводиться розв"язування задачі теплопровідності; /9/ - СЛАР, до якої зводиться розв"язування задачі термопружності; /10/ - дискретна форма співвідношень Коші; /11/ - дискретна форма фізичних співвідношень; /12/ - обмеження на керуючі змінні; /13/ - функціональні обмеження на напруження та об"єми; k - індекс, що позначає розв"язок задачі статичної термопружності k = 1, і квазістатичної термопружності k = 2.

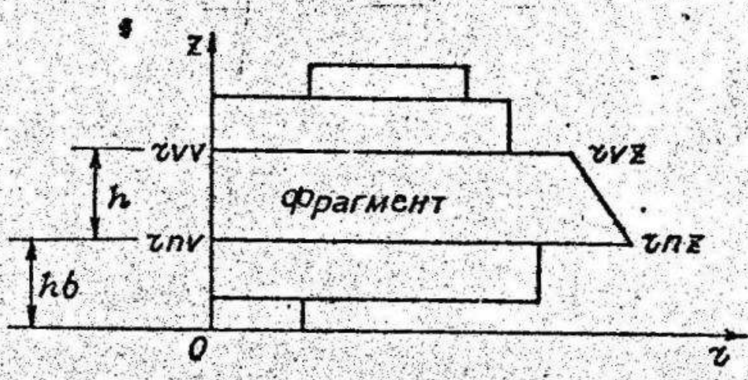
Як бачимо, сформульована задача оптимізації є двокритеріальною. Для її розв"язання використовується метод зондування простору, який дає змогу ефективно здійснювати розв"язування задачі в процесі діалогу з ПЕОМ [4]. У ролі пробних точок у просторі параметрів використовуються точки рівномірно розподіленої послідовності / $\Lambda\Pi_\tau$ - послідовності/.

Цілком очевидно, що основним інструментом оцінки якості та ефективності розроблених чисельних схем і алгоритмів є програмне забезпечення, створене на їх основі. Програми реалізації методів скінченних та граничних елементів, передбачають велику кількість арифметичних обчислень, що вимагає використання потужної обчислювальної техніки. Однак, враховуючи значне поширення, швидкий ріст продуктивності та зручність користування персональними комп"ютерами, вважаємо за доцільне використовувати їх для розв"язування прикладних інженерних задач такого класу.

Вищеописаний алгоритм реалізований у вигляді пакета прикладних програм "Тиран" /Тиристорний аналіз/. Цей пакет можна використовувати як зручний інструментарій для наукових розрахунків, а також як складову робочого місця конструктора.

У створенні промислового зразка програми важливе місце належить розробці "дружнього" інтерфейсу між користувачем і програмою. Він передбачає зручне і легке введення даних про задачу /геометричні розміри конструкції, термомеханічні характеристики матеріалів, параметри оптимізації/, можливість керування ходом її розв"язування та широкий вибір інструментарію для аналізу отриманих результатів. Важливе значення має *HELP* -підтримка всіх етапів розв"язування задачі. Усі вказані функції в ППП "Тиран" реалізовані в інтерактивному режимі.

Вважається, що осьовий перетин тиристора є набором трапецій, кожна з яких описує геометрію однієї зі складових пристрою /структури, основи, термокомпенсатора, припою тощо/. Вважаємо також, що основи трапецій паралельні між собою, тому геометрія кожного з *NSE* елементів тиристора визначається шістьма величинами: внутрішнім радіусом нижньої площини /rnv/; зовнішнім радіусом нижньої площини /rnz/; внутрішнім радіусом верхньої площини /rvv/; зовнішнім радіусом верхньої площини /rvz/; висотою /h/ ; висотою бази /hb/ /див. рисунок/. Ці ж геометричні параметри можна вважати параметрами оптимізації.



У результаті аналізу користувач одержує впорядковану за обома критеріями таблицю випробувань, яка може бути рекомендацією для інженера-проектувальника. Далі він може докладно проаналізувати бажані варіанти, підвищивши порядок апроксимації та оцінивши одержані значення на графіках, ізотермах або лініях однакових напружень.

1. Д и я к І.І., К о с с а к О.С., С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е н к о Г.А. Расчет и оптимизация термонапряжений в паянных силовых полупроводниковых приборах // Теорет. электротехника. Львов, 1990. Вып. 48. С.24-28. 2. К о в а л е н к о А.Д. Избранные труды. К.: Наук. думка, 1976. 762 с. 3. М а р ч у к Г.И., А г о ш к о в В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с. 4. С о б о л ь И.М., С т а т н и к о в Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981. 110 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.94

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОГО ТА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ НА БАЗІ ПЕРСОНАЛЬНИХ КОМП'ЮТЕРІВ

Нехай Z і R – декартові координати довільної точки евклідового простору $\mathbb{R}^2$ за умови, що $R \geq 0$. Припустимо, що інформація про геометрію зарядженого електрода подається за допомогою параметричних рівнянь $Z = Z(\tau)$, $R = R(\tau)$ $(\alpha \leq \tau \leq \beta)$, які описують деяку незамкнену криву L, розташовану в півплощині $R \geq 0$. Ця крива є твірною певної циліндричної поверхні S, на якій задається граничне значення потенціалу U_0. Електростатичне поле, утворене зарядженою поверхнею S, є осесиметричним і цілком характеризується своїми значеннями в точках півплощини $R \geq 0$. Припустимо також, що $Z(\tau), R(\tau) \in C^1[\alpha, \beta]$, як мінімум.

Відповідна математична модель, побудована на основі теорії потенціалу, дає змогу подати поле в будь-якій точці $(\bar{Z}, \bar{R})$, $\bar{R} \geq 0$, за формулою [1, 6, 7]

$$U(\bar{Z},\bar{R}) = \int_{\alpha}^{\beta} q(\tau) R(\tau) K(k) \left\{ [R(\tau)+\bar{R}]^2 + [Z(\tau)-\bar{Z}]^2 \right\}^{-1/2} M(\tau)\, d\tau, \qquad /1/$$

де $q(\tau)$ – густина розподілу зарядів уздовж L; $K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \gamma)^{-1/2} d\gamma$ – повний еліптичний інтеграл першого роду, причому $k^2 = 4 \cdot R(\tau) \cdot \bar{R} \times$

$$\times \left\{ [R(\tau)+\bar{R}]^2 + [Z(\tau)-\bar{Z}]^2 \right\}^{-1},$$

а

$$M(\tau) = \left\{ [Z'(\tau)]^2 + [R'(\tau)]^2 \right\}^{1/2},$$